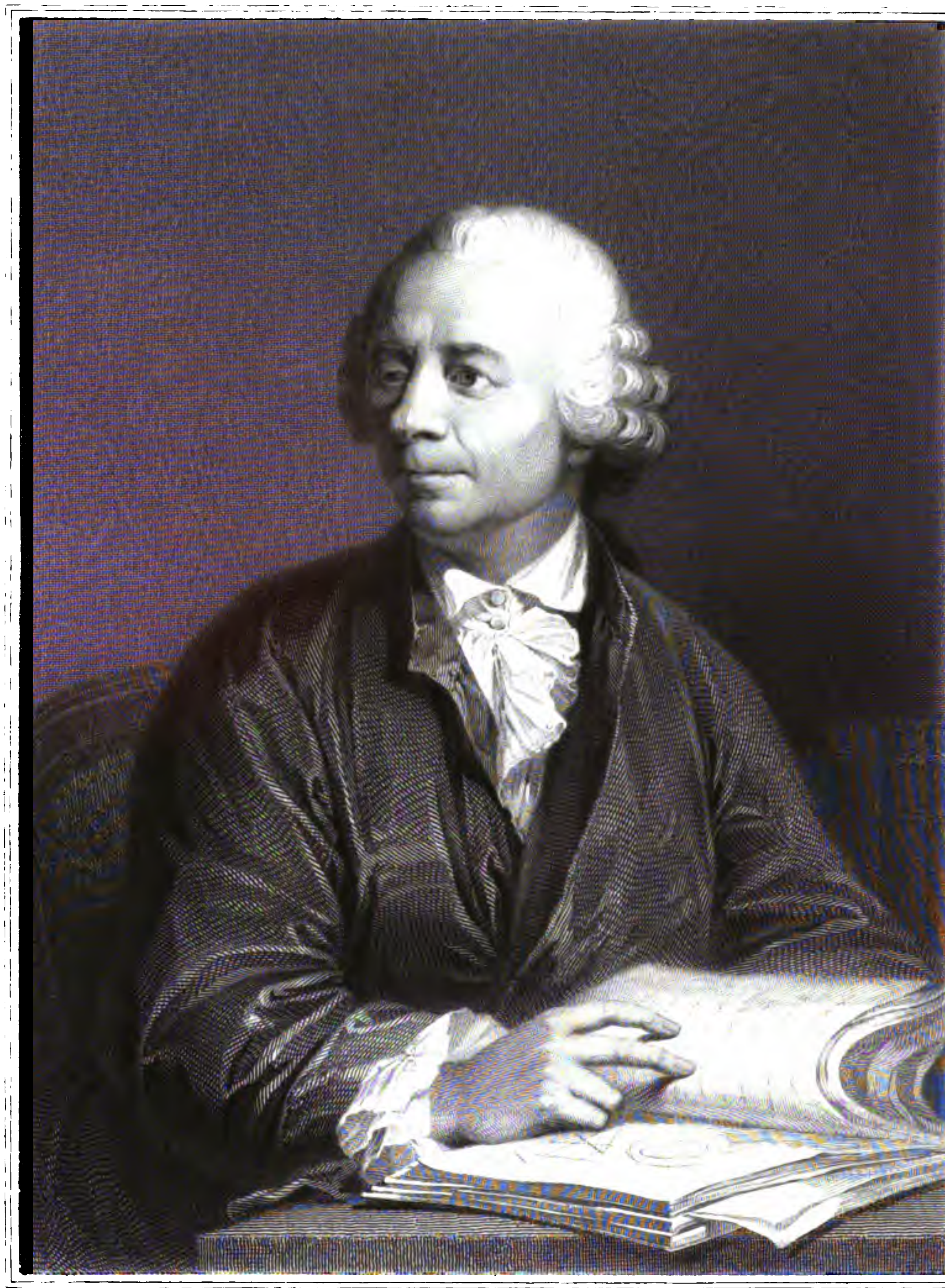


Em. Handmann Basil. pinx.   Frid. Weber Basil. sculpsit

LEONARDI EULERI BASILIENSIS

imaginem

aere incidendam curavit

grata Civitas

MDCCCLI

Petropoli
apud Eggers et Socios;

Rigae
apud Samuelem Schmidt;

Lipsiae
apud Leopoldum Voss.

Pretium: 6 Rub. 85 Cop. = 7 Thlr. 18 Ngr.

aeri incidendam curavit

Grata Civitas

MDCCCLI

LEONHARDI EULERI

OPERA POSTUMA

MATHEMATICA ET PHYSICA

ANNO MDCCCXLIV DETECTA

QUAE

ACADEMIAE SCIENTIARUM PETROPOLITANAE

OBTULERUNT EJUSQUE AUSPICIIS EDIDERUNT

AUCTORIS PRONEPOTES

PAULUS HENRICUS FUSS ET NICOLAUS FUSS.

TOMUS PRIOR.

PETROPOLI, 1862.

Petropoli apud Eggers et Socios; **Rigae** apud Samuelem Schmidt; **Lipsiae** apud Leopoldum Voss.

Pretium: 6 Rub. 85 Cop. = 7 Thlr. 18 Ngr.

Consensu Academiae impressum.

C. Vesselofski, Academiae secretarius perpetuus.

Mense Decembri a. 1861.

Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.

PRAEFATIO.

Anno 1844, tum in tabulario Academiae scientiarum Petropolitanae, tum inter privatas gentis Eulerianae schedas, inventi sunt Leonhardi Euleri tractatus complures, bene limati et ad umbilicum adducti. Primum quidem his manuscriptis nulla tribuebatur attentio, quae jamdudum publici juris facta esse nemo non putaret; mox vero nihildum earum commentationum typis descriptum esse diligentiore inquisitione facta intellectum est. Proinde ne viri docti carerent tanti auctoris operibus postumis, Paulus Henricus Fuss, Academiae scientiarum Petropolitanae secretarius perpetuus, coetui auctor fuit ut editio operum omnium Euleri institueretur.

Arridebat sane hoc consilium, sed, ratione habita magnarum ejus rei impensarum, melius visum est edere collectionem non omnium sed minorum tantum Euleri operum, ita ut his recens detecta adderentur. Itaque congestae sunt et suo ordine dispositae commentationes Euleri tam editae quam ineditae; et ex omnibus eae quae de theoria numerorum agunt prelo subjectae sunt. Tandem anno 1849 in lucem prodierunt volumina duo sic inscripta:

Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae. Auspiciis Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae ediderunt auctoris pronepotes P. H. Fuss et Nicolaus Fuss. Insunt plura inedita.

Neque tamen inchoata tali modo minorum Euleri operum collectio continuari potuit, quippe cum neque statuti Academiae reditus sumptibus operis pares essent, neque extraordinarias opes tum temporis sperare liceret. Videlicet per Academiam non stetit, quominus expleret pietatis quoddam officium viro debitum, qui per plus quam quinquaginta annos

coetus Academici quondam fuerat sodalis optime de litteris meritus. At si coepta editio ad finem perduci non potuit, illis tamen quae Eulerus reliquerat scriptis viros doctos destitui minime fas erat; quare Academia opera postuma Euleri seorsum edenda statuit. Facta est negotio longior mora varias per causas, sed jam lector ante oculos habet hos tomos duos operum postumorum Euleri. Quae his continentur, erant hucusque inedita, exceptis nonnullis quae ex altero tomo commentationum arithmeticarum repetenda erant et quorum conspectum subjicimus:

	Opp. post. t. I.	Comm. arithm. t. II.
1. Tractatus de numerorum doctrina	p. 5 — 75.	p. 501 — 575.
2. Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs	p. 76 — 84.	p. 639 — 647.
3. De numeris amicabilibus	p. 85 — 100.	p. 627 — 636.
4. Fragmenta commentationis cujusdam majoris de invenienda relatione inter latera triangulorum, quorum area rationaliter exprimi possit	p. 101 — 104.	p. 648 — 650.
5. 6. Recherches sur deux problèmes de l'analyse de Diophante*)	p. 105 — 127.	p. 603 — 616.
7. Considerationes circa analysin Diophanteam	p. 128 — 139.	p. 576 — 587.
8. De quadratis magicis	p. 140 — 151.	p. 593 — 602.
9. Theorema arithmeticum ejusque demonstratio	p. 152 — 156.	p. 588 — 592.

Praeter scripta postuma ab Eulero ipso elaborata et maximam partem ipsius manu exarata extstant volumina tria, quibus titulus est: *Adversaria mathematica*. His adversariis administri et discipuli Euleri inferre solebant theses quasdam et sententias breves, quas quidem a magistro acceptas ipsi fusius et accuratius explicaverant. Ex his thesibus selectae sunt graviores, quae operibus postumis suo loco insererentur, et primum quidem nonaginta dignae visae sunt quae typis describerentur. Deinde clarissimus Tschebyscheff, perlustratis iterum dictis voluminibus, invenit alias sex theses quas addendas esse censuit; has tomus

*) Haec duo problemata novum poscebant examen, quod suscepit clarissimus Tschebyscheff, uti dictum est in praefatione ad Commentationes arithmeticas.

prior exhibet sub Numero XXIII, pagg. 487—493. In hunc praeterea ex adversariis illatae sunt theses geometricae octo, theses analytici argumenti quatuor et duae ad calculum integralem spectantes: ita ut omnino tomo priori 110 theses ex adversariis depromptae contineantur.

Complectitur igitur tomus prior ea quae de theoria numerorum et de analysi, Eulerus scripta reliquerat; tomus alter scripta de mechanica, de astronomia et de physica. Quum vero tomus alter multo plures impleturus esset plagulas quam prior, placuit Paulo Henrico Fuss adjicere huic tomo litteras quasdam Euleri ad N. Bernoullium, Fridericum II Borussiae regem et Lagrangium datas, quas quidem litteras editor alio consilio collectas habuit.

Jam totius operis haec est dispositio. Tomus prior sistit sectiones tres, quarum I[mam] efficiunt *a*) Arithmetica, quae quidem in «Commentationibus» jam habebantur, in hac autem collectione operum postumorum Euleri omnium repeti debebant. *b*) Nonaginta theses ex adversariis supra dictis depromptae ac secundum materias digestae. Harum singulae nomen prae se ferunt discipuli, qui unamquamque exposuit et codici intulit.

Sectio II[da] pertinet ad analysin et comprehendit undecim dissertationes varii argumenti, porro commentationem majorem, cui titulus: «Institutiones calculi differentialis. Sectio III» Commentatio haec praebet continuationem operis jam dudum typis vulgati «de calculo differentiali».

Sectio III[tia] affert varia. Leguntur hic viginti theses, ex illis, quae supra commemoravimus, adversariis transcriptae. Harum sex de theoria numerorum agunt, octo sunt geometrici argumenti, quatuor analytici et duae calculum integralem spectant. Tum sequuntur litterae illae ab Eulero datae ad N. Bernoullium (6), ad Fridericum regem (2) et ad Lagrangium (18).

Tomus alter exhibet commentationes de mechanica, de astronomia mechanica, de astronomia (pura), de physica; in fine adduntur varia.

Hoc loco non possumus non laudare studium a civibus Basileae exornando huic operi adhibitum. Curaverunt enim imaginem Leonhardi Euleri, viri immortalis et civis olim Basileensis, de tabula picta, quae in eorum urbe servatur, aeri incidendam: exemplaria chartis impressa Academiae dono miserunt, quae in fronte operis collocarentur. Ita hoc opus quasi monumentum exstat communi duarum splendidarum urbium opera Euleri memoriae dedicatum, qui utriusque urbis decus fuit et gloria.

In edendo opere frater meus Paulus Henricus Fuss, Academiae scientiarum Petropolitanae secretarius perpetuus, atque ego versati sumus. Quum jam in eo esset ut tomus prior prelum relinqueret, frater meus praematura morte litteris, officio et suis ereptus est.

Paulus Henricus Fuss die 10mo Januarii anno 1855, aetatis 56mo, gravi morbo, quo per sex menses continuos laboraverat, succubuit. Gesserat per 29 annos studio indefesso munus illud gravissimum perpetui Academiae secretarii; rebus Academiae prudentissime et impigerrime consulendo laudem et gratiam sodalium sibi comparaverat. In testimonium grati animi collegae voluerunt imaginem defuncti tomo alteri operis nostri praefigi; cujus adspectum speramus jucundissimum fore plurimis qui memoriam fratris dilectissimi colunt.

Mihi superstiti petenti mandavit Academia, ut editionem operis ad finem perducerem; neque ego labori peperci ad rem ea qua par erat fide ac diligentia absolvendam.

Nicolaus Fuss.

L. Euleri Operum postumorum Tomi I Index.

Arithmetica. p. 1 — 266

Analysis.

Varia. p. 487 — 588

ARITHMETICA.

I.

Tractatus de numerorum doctrina Capita XVI, quae supersunt.

Caput I.

De compositione numerorum.

1. *Numerus* est multitudo unitatum.

2. Quilibet ergo numerus indicat, quot unitates in eo contineantur.

3. Ab unitate incipiendo numeri sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., quorum quisque praecedentem unitate superat.

4. Quia quemque numerum unitate augere licet, series numerorum in infinitum progreditur.

5. Cum primus, scilicet unitas, praecedentem etiam unitate superet, praecedens nihilum 0 sit necesse est.

6. Hic tantum de numeris integris sermo est, ad quos definitio est restricta, unde fractos multoque magis surdos hinc excludi oportet.

7. Si numerus quicunque sit a, erunt eum sequentes $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, etc., quorum primus $a+1$ datum a superat unitate, secundus $a+2$ duobus unitatibus, tertius $a+3$ tribus, etc.

8. Simili modo, proposito numero a, antecedentes erunt $a-1$, $a-2$, $a-3$, $a-4$, etc., quorum primus $a-1$ a dato a unitate deficit, secundus $a-2$ duabus unitatibus, tertius $a-3$ tribus, et ita porro.

9. Si numero a tot unitates addantur, quot numerus b continet, oritur $a+b$; sin autem a numero a tot unitates auferantur, quot numerus b continet, oritur $a-b$: illo casu numerus b numero a *additus*, hoc vero ab eo *subtractus* dicitur.

10. Si idem numerus a sibi ipsi addatur, oritur ejus duplum $a+a$, quod ita scribitur $2a$: si idem denuo addatur, prodit triplum $3a$; tum eodem numero a insuper addito, ejus quadruplum $4a$, et ita porro, quae in genere vocantur ejus *multipla*.

11. Multipla ergo numeri a sunt $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc., quorum quodque praecedens superat ipso numero a; horumque respectu ipse numerus a *simplum* vocatur.

12. Si a esset unitas, ejus multipla omnes plane numeros praeberent; at si a non est unitas, sed multitudo unitatum, ejus multipla non omnes numeros praebebunt: hocque casu dabuntur numeri, qui non sunt multipla ipsius a.

13. Cum multipla ipsius a sint $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc., inter ea primo non reperiuntur omnes numeri ipso a minores, qui sunt $1, 2, 3, \ldots (a-1)$; totidemque non-multipla occurrent a quovis multiplo usque ad sequens.

14. Si ergo fuerit α numerus minor quam a, tum neque α neque hi numeri $a+\alpha$, $2a+\alpha$, $3a+\alpha$, $4a+\alpha$, etc. inter multipla ipsius a reperiuntur.

15. Quia ob $\alpha < a$, est $2a-\alpha$ minus quam $2a$, simulque majus quam a, numerus $2a-\alpha$ non erit multiplum ipsius a, neque ullus horum numerorum $a-\alpha$, $2a-\alpha$, $3a-\alpha$, $4a-\alpha$, etc. inter multipla ipsius a continetur.

16. Proposito ergo quocunque numero b, qui non sit multiplum ipsius a, is vel ipso a erit minor, vel ita superabit aliquod ejus multiplum, ut tamen minor sit multiplo sequente.

17. Cum multipla binarii sint 2, 4, 6, 8, 10, etc. (ejus simplo non excluso), numeri reliqui ab his unitate differunt. Simili modo ob ternarii multipla: 3, 6, 9, 12, 15, etc. reliqui numeri ab his vel unitate, vel binario distant.

18. Duplum cujusque numeri a, scilicet $2a$, est etiam multiplum binarii. Cum enim a sit multitudo unitatum $1+1+1+1$ etc. duplicatio ita repraesentetur

$$a = 1+1+1+1+\text{etc.}$$

$$a = 1+1+1+1+\text{etc.}$$

unde additione prodit

$$2a = 2+2+2+2+\text{etc.}$$

19. Vel cum numerus a sit multitudo unitatum, numerus a duplicabitur singulis unitatibus bis sumendis, unde oritur multitudo binariorum. Ex quo patet duplum $2a$ toties continere binarium, quoties a continet unitatem.

20. Simili modo triplum $3a$ toties continebit ternarium, quoties ipse numerus a continet unitatem, eritque itaque $3a$ multiplum ternarii, quod etiam de omnibus multiplis est intelligendum.

21. *Index* multipli vocatur numerus indicans, quoties multiplum in se contineat simplum, ita index dupli est binarius, tripli ternarius, quadrupli quaternarius, etc.

22. Si numerus a toties sumatur, quot numerus n continet unitates, multipli inde orti index est n, ipsum autem multiplum hoc ita exprimitur na, ita ut na denotet multiplum ipsius a, cujus index sit n.

23. Tale ergo multiplum na ipsius a est etiam multiplum indicis n, quandoquidem toties in se continet indicem, quoties ipse numerus a continet unitatem.

24. Hinc ergo patet multiplum numeri a, cujus index sit n, congruere cum eo multiplo numeri n, cujus index sit a; quare cum illud multiplum per na, hoc vero per an exprimatur, erit $na = an$.

25. Cum in quovis multiplo na tam numerus a, cujus multiplum sumitur, quam index multipli n inter se permutari queant, hi duo numeri a et n sine discrimine *factores* appellantur, multiplo autem ipsi na nomen *producti* seu *facti* indi solet.

26. Quemadmodum quisque numerus est multiplum unitatis, cujus ipse est index, ita etiam est sui ipsius simplum, indice existente unitate. In posterum ergo tam multipla unitatis quam simpla cujusque numeri a denominatione multiplorum segregabimus.

27. Multipla ergo nobis erunt ejusmodi numeri, qui cujuspiam numeri, praeter unitatem, sunt multipla (excluso simplo), constabunt ergo duobus factoribus, quorum alter alterius respectu tanquam index spectari potest.

28. Factum ergo ab, cujus factores sunt a et b, est multiplum tam ipsius a quam ipsius b. Quatenus est multiplum ipsius a, index est b, quatenus autem est multiplum ipsius b, index est a.

29. Multipla hujus facti ab simul erunt multipla tam ipsius a, quam ipsius b. Sit nab tale multiplum, cujus index sit n, et quia etiam est multiplum ipsius n, erit multiplum uniuscujusque horum numerorum n, a et b.

30. Hinc patet etiam in facto ex tribus factoribus constante, tres factores inter se esse permutabiles, atque tale factum abc non solum esse multiplum singulorum a, b, c, sed etiam factorum ex binis ab, ac, bc.

31. Si in serie numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. omnia multipla deleantur, reliqui numeri non erunt multipla ullius numeri (quandoquidem simpla excludimus), hique numeri vocantur *simplices*, vel *primi*.

32. Deletis scilicet multiplis binarii 4, 6, 8, 10, 12, etc. restat haec series 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.; hinc porro extinguantur multipla ternarii 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc. quae quidem adhuc adsunt, et restat 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.; ita relinquentur tandem numeri primi 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, etc.

33. Si ergo p sit numerus primus, is neque inter multipla binarii neque inter multipla cujusquam alius numeri occurrit, neque ergo hujusmodi facto ab ullo modo exhiberi potest, nisi sit vel $a = 1$, vel $b = 1$, quos autem casus exclusimus (26).

34. Omnes numeri, qui non sunt primi, vocantur *compositi;* unde patet omnes numeros compositos esse multipla aliorum numerorum minorum, qui cum iterum sint primi, vel multipla aliorum denuo minorum, multipla autem cujusvis producti sint simul multipla singulorum ejus factorum, sequitur omnes numeros compositos tandem reduci ad multipla numerorum primorum.

35. Omnis ergo numerus est vel primus, vel multiplum cujuspiam numeri primi; quo posteriori casu cum numerus sit compositus, omnis numerus compositus exhiberi potest producto, cujus singuli factores sint numeri primi.

36. Inter numeros compositos primum occurrunt ii, qui constant duobus tantum factoribus primis. Veluti si p et q denotent duos numeros primos quoscunque, productum pq in genere exhibebit ejusmodi numeros compositos primae speciei, qui duobus tantum constant factoribus primis.

37. Talis ergo numerus compositus pq erit tam multiplum numeri q, indice existente p, quam multiplum ipsius p, indice existente q, neque vero ullius alius numeri erit multiplum. Si enim esset multiplum alius cujuspiam numeri a, indice existente b, hi numeri a et b ejus essent factores, contra hypothesin.

38. Hujusmodi autem productum pa, cujus quidem factor p est primus, alter vero a compositus, factores habens α, β, γ, etc., non solum erit multiplum numerorum p et a, sed etiam inter multipla numerorum α, β, γ, etc. occurret.

39. Post numeros compositos, duobus factoribus primis constantes, considerandi veniunt ii, qui tribus factoribus primis constant, cujus ergo speciei forma est pqr, denotantibus p, q, r numeros primos quoscunque.

40. Tum vero sequentur numeri compositi, qui sunt producta ex quaternis numeris primis, quorum forma erit $pqrs$. Sequentes autem species erunt producta vel ex quinis, vel senis, vel septenis etc. numeris primis constantia.

41. Hinc omnes numeri ita in classes distribuentur, ut prima contineat omnes numeros primos singulos; secunda, producta ex binis primis; tertia, producta ex ternis primis; quarta, ex quaternis; quinta, ex quinis, et ita porro.

42. Post unitatem ergo numeri primae classis, seu primi centenario non majores sunt:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

43. Numeri vero secundae classis centenario minores sunt

2. 2 = 4,	3. 3 = 9,	5. 5 = 25,	7. 7 = 49,
2. 3 = 6,	3. 5 = 15,	5. 7 = 35,	7.11 = 77,
2. 5 = 10,	3. 7 = 21,	5.11 = 55,	7.13 = 91.
2. 7 = 14,	3.11 = 33,	5.13 = 65,	
2.11 = 22,	3.13 = 39,	5.17 = 85,	
2.13 = 26,	3.17 = 51,	5.19 = 95,	
2.17 = 34,	3.19 = 57,		
2.19 = 38,	3.23 = 69,		
2.23 = 46,	3.29 = 87,		
2.29 = 58,	3.31 = 93,		
2.31 = 62,			
2.37 = 74,			
2.41 = 82,			
2.43 = 86,			
2.47 = 94,			

44. Tum vero numeri tertiae classis centenario inferiores sunt

2.2. 2 = 8,	2.3. 3 = 18,	3.3. 3 = 27,
2.2. 3 = 12,	2.3. 5 = 30,	3.3. 5 = 45,
2.2. 5 = 20,	2.3. 7 = 42,	3.3. 7 = 63,
2.2. 7 = 28,	2.3.11 = 66,	3.3.11 = 99,
2.2.11 = 44,	2.3.13 = 78,	
2.2.13 = 52,		3.5. 5 = 75.
2.2.17 = 68,	2.5. 5 = 50,	
2.2.19 = 76,	2.5. 7 = 70,	
2.2.23 = 92,	2.7. 7 = 98,	

45. Quartae autem classis numeri infra 100 sunt

2.2.2. 2 = 16,	2.2.3.3 = 63,	2.3.3.3 = 54,
2.2.2. 3 = 24,	2.2.3.5 = 60,	2.3.3.5 = 90,
2.2.2. 5 = 40,	2.2.3.7 = 84,	
2.2.2. 7 = 56,		3.3.3.3 = 81.
2.2.2.11 = 88,	2.2.5.5 = 100,	

46. Quintae classis numeri centenario non majores sunt

2.2.2.2.2 = 32, 2.2 2.2.5 = 80,

2.2.2.2.3 = 48, 2.2.2.3.3 = 72,

47. In sexta classe hujusmodi numeri duo occurrunt

2.2.2.2.2.2 = 64, 2.2.2.2.2.3 = 96.

Sequentes autem classes nullos continent numeros centenario minores.

48. Cujusque classis numeri charactere peculiari distinguuntur a numeris aliarum classium, et quilibet numerus ita ad certam quandam classem pertinet, ut non simul ad ullam aliam referri possit.

49. Quodsi ergo p, q, r, s, etc. denotent numeros primos, formae harum classium ita exhiberi possunt:

Forma classis I....p

« II...pq,

« III...pqr,

« IV...$pqrs$,

« V...$pqrst$,

« VI...$pqrstu$,

etc.

50. Quoniam in his classibus omnes numeri continentur, si seriem numerorum naturalem 1, 2, 3, 4, etc. usque ad n continuemus, ita ut multitudo numerorum sit $= n$, ac multitudo numerorum primorum in hac serie contentorum sit $= \alpha$, multitudo numerorum secundae classis $= \beta$, tertiae classis $= \gamma$, quartae $= \delta$, et ita porro, necesse est sit $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= n$. Ita vidimus, si sumatur $n = 100$, fore $\alpha = 26$ (unitate inter numeros primos comprehensa), $\beta = 34$, $\gamma = 22$, $\delta = 12$, $\varepsilon = 4$, $\zeta = 2$, $\eta = 0$, estque utique $26 + 34 + 22 + 12 + 4 + 2 = 100$.

51. Si n denotet potestatem binarii, multitudo numerorum cujusque classis ad numerum n usque ita se habebit:

numerus	*multitudo numerorum*									
n	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
2	2									
4	3	1								
8	5	2	1							
16	7	6	2	1						
32	12	10	7	2	1					
64	19	22	13	7	2	1				
128	32	42	30	14	7	2	1			
256	55	82	60	34	15	7	2	1		
512	98	157	125	71	36	15	7	2	1	
1024	173	304	256	152	77	37	15	7	2	1

52. Si indolem numerorum attentius contemplemur, facile percipiemus, ab initio numeros primos frequentissime occurrere, compositos autem rarissime interspersos esse debere. Quo longius autem progrediamur, eo plures reperientur numeri compositi, contra autem pauciores primi.

53. Deinde etiam notari oportet in progressione numerorum primorum 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. nullum plane ordinem apparere, unde lex hujus progressionis definiri possit, etiamsi in genere certum sit, quo longius progrediamur, minus frequentes eos esse debere.

54. Tabulae habentur, in quibus numeri primi secundum centurias sunt dispositi; atque in prima centuria ab 1 ad 100 sunt 26 numeri primi, in secunda 21, in sequentibus vero pauciores; neque tamen eorum multitudo continuo minuitur, sed potius admodum irregulariter modo crescit, modo decrescit. Sic a 200 ad 300 occurrunt 16 numeri primi, at a 400 ad 500 sunt 17, totidemque adhuc a 1400 ad 1500. Porro a 79700 ad 79800 tres tantum reperiuntur numeri primi; hoc tamen non obstante in centuria a 90000 ad 90100 adhuc 13 numeri primi deprehenduntur.

Caput II.

De divisoribus numerorum.

55. Quatenus quidam numerus est multiplum alius numeri, eatenus hic illius dicitur *divisor*, et index multiplicitatis vocari solet *quotus* ex divisione ortus.

56. Ita si numerus N fuerit multiplum ipsius a, indice existente n, ut sit $N = na$, numerus a erit divisor numeri N, et index n praebebit quotum. Scilicet si numerus $N = na$ per a dividatur, quotus erit n.

57. Cum numeri n et a inter se sint permutabiles, hocque respectu factores appellentur, numerus $N = na$ etiam divisorem habebit n, quotusque tum erit a. In genere ergo divisor per quotum multiplicatus ipsum numerum divisum reproducit.

58. Cum quilibet numerus sit sui ipsius simplum, unitas cujusque numeri est divisor, ipseque numerus quotus. Tum vero quilibet numerus est sui ipsius divisor, quoto existente unitate.

59. Quilibet ergo numerus N primo unitatem pro divisore habet, eritque tum ipse numerus N quotus. Deinde etiam quilibet numerus N se ipsum habet pro divisore, quoto existente unitate.

60. Nullus numerus alios habet divisores, nisi quorum est multiplum (simplo ex idea multipli hic non excluso); si enim alium haberet divisorem, eo ipso hujus futurus esset multiplum, quoto praebente indicem multipli.

61. Cum igitur numerus primus nullius alius numeri, praeter unitatem, sit multiplum, numerus primus alios non habet divisores, praeter unitatem et se ipsum. Scilicet si p denotet numerum primum, ejus divisores erunt 1 et p, neque praeter hos ullos habet alios.

62. Numeri ergo primi, seu primae classis, duos tantum habent divisores, excepta unitate, quippe quae unicum habet; quam ob causam etiam unitas numeris primis non accenseri solet.

63. Numeri secundae classis, qui constant duobus factoribus primis pq, quia sunt multipla utriusque, praeter divisores 1 et pq etiam divisores habent p et q, ita ut omnes eorum divisores sint 1, p, q et pq.

64. Casus autem hic seorsim est perpendendus, quo ambo factores p et q sunt inter se aequales, quoniam eundem numerum non bis inter divisores numerare licet. Hinc numeri pp, qui sunt quadrata numerorum primorum, tres tantum habent divisores 1, p et pp.

65. Hanc ob causam numeros secundae classis in duas species subdividi convenit, quarum prior continet numeros formae pp et divisores habet tres $1, p, pp$; altera vero species continet numeros formae pq, denotantibus litteris p, q numeros primos diversos. Hujusque speciei numeri habebunt quaternos divisores $1, p, q, pq$.

66. Simili modo classis tertia subdividi debet in tres species, quarum formae sunt p^3, p^2q, pqr, siquidem p, q, r denotent numeros primos diversos, vel enim omnes tres factores sunt aequales vel bini tantum, vel omnes tres inaequales.

67. Pro tertia autem classe numerorum

speciei primae	p^3	divisores erunt	quatuor	$1, p, p^2, p^3$,
secundae	p^2q		sex	$1, p, q, p^2, pq, p^2q$,
tertiae	pqr		octo	$1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr$,

neque praeterea alii divisores locum habere possunt.

68. Classis quarta, quae numeros quatuor factoribus primis constantes continet, prout horum factorum bini, vel tres, vel omnes quatuor fuerint aequales, subdividenda est in quinque species, quarum formae sunt I. p^4, II. p^3q, III. p^2q^2, IV. p^2qr, V. $pqrs$.

69. Jam facile erit omnes divisores cujusque speciei in classe quarta enumerare:

Speciei:		divisores erunt	
I.	p^4	quinque:	$1, p, p^2, p^3, p^4$,
II.	p^3q	octo:	$1, p, q, p^2, pq, p^3, p^2q, p^3q$,
III.	p^2q^2	novem:	$1, p, q, p^2, pq, q^2, p^2q, pq^2, p^2q^2$,
IV.	p^2qr	duodecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, qr, p^2q, p^2r, pqr, p^2qr$,
V.	$pqrs$	sedecim:	$1, p, q, r, s, pq, pr, ps, qr, qs, rs, pqr, pqs, prs, qrs, pqrs$.

70. In classe quinta, quae numeros ex quinque factoribus primis compositos complectitur, ob aequalitatem aliquot factorum, sequentes species constitui oportebit:

I. p^5, II. p^4q, III. p^3q^2, IV. p^3qr, V. p^2q^2r, VI. p^2qrs, VII. $pqrst$.

71. Tum vero singularum harum specierum divisores ita enumerabuntur:

Speciei:		divisores erunt	
I.	p^5	sex:	$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$,
II.	p^4q	decem:	$1, p, q, p^2, pq, p^3, p^2q, p^4, p^3q, p^4q$,
III.	p^3q^2	duodecim:	$1, p, q, p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2, p^3q, p^2q^2, p^3q^2$,
IV.	p^3qr	sedecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, qr, p^3, p^2q, p^2r, pqr, p^3q, p^3r, p^2qr, p^3qr$,
V.	p^2q^2r	octodecim:	$1, p, q, r, p^2, pq, pr, q^2, qr, p^2q, p^2r, pq^2, pqr, q^2r, p^2q^2, p^2qr, pq^2r, p^2q^2r$,
VI.	p^2qrs	viginti quatuor:	$1, p, q, r, s, p^2, pq, pr, ps, qr, qs, rs, p^2q, p^2r, p^2s, pqr, pqs, prs, qrs, p^2qr, p^2qs, p^2rs, pqrs, p^2qrs$,

VII. $pqrst$ triginta duo: $1, p, q, r, s, t, pq, pr, ps, pt, qr, qs, qt, rs, rt, st, pqr, pqs, pqt, prs, prt, pst, qrs, qrt, qst, rst, pqrs, pqrt, pqst, prst, qrst, pqrst$.

72. Simili modo reliquarum classium species constituentur, singularumque specierum divisores omnes assignabuntur. Simul autem hac ratione patebit natura singulorum divisorum, atque tam classis quam species, quorsum singuli sunt referendi.

73. Si numeri N divisores sint: $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots N$, isque multiplicetur per numerum primum p, qui in eo nondum contineatur, tum productum Np praeter illos divisores $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots N$ insuper eosdem per p multiplicatos $p, \alpha p, \beta p, \gamma p, \delta p \ldots Np$ pro divisoribus habebit, ideoque numerus divisorum duplo erit major.

74. At si ille numerus N per quadratum numeri primi p, qui in ipso non insit tanquam factor, multiplicetur, numerus divisorum triplicabitur. Primo enim productum Np^2 eosdem habebit divisores quos numerus N, tum vero eosdem per p multiplicatos, ac tertio eosdem per p^2 multiplicatos.

75. Simili modo si p sit numerus primus in N non contentus, numerusque N per p^3 multiplicetur, productum Np^3 habebit primo omnes divisores numeri N, deinde eosdem per p, porro eosdem per p^2, ac denique eosdem per p^3 multiplicatos, quo pacto multitudo divisorum producti Np^3 quadruplo major est quam numeri N.

76. Atque in genere si numeri N multitudo divisorum sit $= m$, isque per potestatem p^λ numeri primi p multiplicetur, producti Np^λ multitudo divisorum erit $(\lambda + 1)\, m$; ubi notasse juvabit ipsius potestatis p^λ multitudinem divisorum esse $\lambda + 1$.

77. Hinc patet regula facilis multitudinem divisorum cujuscunque numeri definiendi: Sit enim $p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi$ forma numeri propositi; et quia numeri p^λ multitudo divisorum est $\lambda + 1$, erit numeri $p^\lambda q^\mu$ multitudo divisorum $(\lambda + 1)\,(\mu + 1)$, hujus vero numeri $p^\lambda q^\mu r^\nu$ erit

$(\lambda + 1)\,(\mu + 1)\,(\nu + 1)$, porroque hujus $p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi$ erit $(\lambda + 1)\,(\mu + 1)\,(\nu + 1)\,(\xi + 1)$.

Classis autem, ad quam hic numerus est referendus, indicatur numero $\lambda + \mu + \nu + \xi$, qui est summa exponentium.

78. Infiniti ergo numeri exhiberi possunt, quorum multitudo divisorum sit data. Si enim multitudo divisorum sit $= a$, existente a numero primo, numeri quaesiti in hac forma p^{a-1} continentur, denotante p numerum primum quemcunque.

79. Si a, b, c, d, etc. denotent numeros primos, pariter ac litterae p, q, r, s, etc., numeri, quorum multitudo divisorum est ab, sunt vel p^{ab-1}, vel $p^{a-1} q^{b-1}$; quorum autem multitudo divisorum est abc, ii sunt vel p^{abc-1}, vel $p^{ab-1} q^{c-1}$, vel $p^{ac-1} q^{b-1}$, vel $p^{bc-1} q^{a-1}$, vel $p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}$, ubi litterae a, b, c, etc. eundem quoque numerum primum significare possunt, dummodo litterae p, q, r, etc. significent diversos.

80. Hinc si multitudo divisorum sit $= 2$, soli numeri primi satisfaciunt, seu numeri in hac forma p contenti. Tum vero si fuerit

multitudo divisorum:	erit forma numerorum:
3	p^2
4	p^3, pq
5	p^4
6	p^5, p^2q
7	p^6
8	p^7, p^3q, pqr
9	p^8, p^2q^2
10	p^9, p^4q
11	p^{10}
12	p^{11}, p^5q, p^3q^2, p^2qr.

81. Cognita ergo forma cujusque numeri, classe scilicet ejusque specie, quo est referendus, non solum multitudo divisorum, sed etiam ipsi divisores ope regularum traditarum assignari possunt.

Caput III.

De summa divisorum cujusque numeri.

82. Proposito quocunque numero n, summam omnium ejus divisorum hoc modo $\int n$ designemus, ita ut haec scriptura $\int n$ denotet summam divisorum numeri n.

83. Cum ergo unitas alium divisorem praeter se ipsam non habeat, erit $\int 1 = 1$; cujusque vero alius numeri summa divisorum se ipso erit major, erit scilicet $\int n > n$, nisi sit $n = 1$.

84. Pro numeris primis p, quia alios non agnoscunt divisores praeter se ipsos et unitatem, erit $\int p = p + 1$. Tum vero pro potestatibus numerorum primorum erit

$$\int p^1 = p + 1 = \frac{pp - 1}{p - 1},$$

$$\int p^2 = pp + p + 1 = \frac{p^3 - 1}{p - 1},$$

$$\int p^3 = p^3 + p^2 + p + 1 = \frac{p^4 - 1}{p - 1},$$

et in genere

$$\int p^n = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

85. Cum numerorum in forma pq contentorum divisores sint 1, p, q, pq, erit eorum summa

$$1 + p + q + pq = (1 + p)\ (1 + q), \quad \text{ideoque} \quad \int pq = (p + 1)\ (q + 1).$$

Simili modo erit ex classe tertia

$$\int p^2q = (pp + p + 1)\ (q + 1) \quad \text{et} \quad \int pqr = (p + 1)\ (q + 1)\ (r + 1).$$

86. Eodem modo in reliquis classibus divisores in unam summam colligere liceret; verum quo indoles harum summarum clarius perspiciatur, consideremus in genere numerum N, cujus divisores sint 1, α, β, γ, δ, $\ldots N$, quorum summa sit $\int N$. Multiplicetur ille per numerum primum p,

*

in eo non contentum, et productum Np praeter illos divisores insuper eosdem, per p multiplicatos, habebit, quorum ergo summa erit $p\int N$, unde colligitur fore $\int Np = (p+1)\int N = \int p \int N$.

87. Eodem modo ex § 74 colligitur, si numerus N per quadratum numeri primi p, in ipso non contenti, multiplicetur, producti Np^2 summam divisorum fore

$$(1+p+p^2)\int N, \quad \text{seu} \quad \int Np^2 = \int N . \int p^2; \quad \text{eodemque modo fore} \quad \int Np^3 = \int N . \int p^3$$

et ita porro.

88. Hinc pro singulis classibus et speciebus, divisorum summae ita exprimentur

$$\begin{aligned}
\int p &= 1+p \\
\int p^2 &= 1+p+p^2 \\
\int pq &= (1+p)(1+q) \\
\int p^3 &= 1+p+p^2+p^3 \\
\int p^2q &= (1+p+p^2)(1+q) \\
\int pqr &= (1+p)(1+q)(1+r) \\
\int p^4 &= 1+p+p^2+p^3+p^4 \\
\int p^3q &= (1+p+p^2+p^3)(1+q) \\
\int p^2q^2 &= (1+p+p^2)(1+q+q^2) \\
\int p^2qr &= (1+p+p^2)(1+q)(1+r) \\
\int pqrs &= (1+p)(1+q)(1+r)(1+s)
\end{aligned}$$

etc.

89. Ex his formulis deducimus sequentes conclusiones:

$$\begin{aligned}
&\int p^2 = p^2 + \int p = 1 + p\int p \\
&\int p^3 = p^3 + \int p^2 = 1 + p\int p^2 = 1 + p + p^2\int p \\
&\int p^4 = 1 + p\int p^3 = 1 + p + p^2\int p^2 = 1 + p + p^2 + p^3\int p \\
&\int p^5 = 1 + p\int p^4 = 1 + p + p^2\int p^3 = 1 + p + p^2 + p^3\int p^2 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4\int p
\end{aligned}$$

etc.

unde patet esse in genere

$$\int p^n = 1 + p\int p^{n-1} = 1 + p + p^2\int p^{n-2} = 1 + p + p^2 + p^3\int p^{n-3} \text{ etc.}$$

90. Proposito ergo numero N, cujus summam divisorum assignare oporteat, resolvatur is in suos factores primos, sitque

$$N = p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi, \quad \text{quo facto erit} \quad \int N = \int p^\lambda . \int q^\mu . \int r^\nu . \int s^\xi .$$

91. Dummodo ergo tam numerorum primorum ipsorum, quam eorum potestatum summae divisorum assignari queant, omnium plane numerorum summae divisorum definiri poterunt.

92. Pro ipsis numeris primis p, cum sit $\int p = p+1$, summa divisorum semper erit numerus par, nisi sit $p=2$, quo casu est $\int 2 = 3$. Si enim sit $p = 2a - 1$, erit $\int(2a-1) = 2a$. At ob $\int p^2 = p^2+p+1$, summa divisorum quadrati cujusvis numeri primi semper erit numerus impar, ac subinde adeo numerus primus, veluti $\int 2^2 = 7$, $\int 3^2 = 13$, $\int 5^2 = 31$.

93. Deinde si N sit cubus numeri primi, seu

$$N = p^3, \quad \text{erit} \quad \int p^3 = 1 + p + pp + p^3 = (1 + p)\,(1 + pp),$$

ideoque numerus compositus, ac nisi sit $p = 2$, ad minimum erit summa divisorum divisibilis per 4, quia uterque factor $1 + p$ et $1 + pp$ est par. Erit ergo $\int p^3 = (1 + pp) \int p$.

94. Si numerus N sit potestas quarta numeri primi, seu $N = p^4$, erit summa divisorum $\int p^4 = 1 + p + pp + p^3 + p^4$, ideoque semper impar, fierique adeo poterit, ut ea sit numerus primus, veluti $\int 2^4 = 31$.

95. Si sit $N = p^5$, quia est $\int p^5 = 1 + p + pp + p^3 + p^4 + p^5$, erit summa divisorum

$$\int p^5 = (1 + p + pp)\,(1 + p^3) = (1 + p)\,(1 + p + pp)\,(1 - p + pp),$$

ideoque numerus compositus, qui ex summis inferiorum potestatum ita componitur, ut sit

$$\int p^5 = (1 - p + pp) \int p \cdot \int p^2.$$

96. Proposito autem producto MN, cujus factores M et N nullum habeant factorem primum communem, erit $\int MN = \int M . \int N$, quae ergo summa divisorum eo magis erit composita, quo plures numeri primi dispares ingrediantur.

97. Proposito numero quocunque N, cujus summa divisorum sit $\int N$, si is per numerum primum p multiplicetur, summa divisorum producti Np semper major est quam $p \int N$. Nam $\int Np$ primum complectitur omnes divisores numeri N per p multiplicatos, quorum summa est $p \int N$, ac praeterea etiam eos divisores numeri N, qui per p non sunt affecti.

98. Hoc etiam ita bipartito ostenditur. Primo si numerus primus p non contineatur in N, erit utique $\int Np = \int p . \int N = (1 + p) \int N = p \int N + \int N$, quo casu sine dubio est $\int Np > p \int N$.

99. At si p jam contineatur in N, ut sit $N = Mp^n$, erit $\int N = \int M . \int p^n$; sed $\int Np = \int M \int p^{n+1}$. Ex superioribus vero constat esse $\int p^{n+1} = 1 + p \int p^n$, unde colligitur $\int Np = \int M + p \int p^n \int M$, ita ut sit $\int Np = p \int N + \int M$, ideoque $\int Np > p \int N$.

100. Numerorum naturali ordine progredientium summae divisorum ita se habebunt:

$\int 1 = 1$	$\int 13 = 14$	$\int 25 = 31$	$\int 37 = 38$	$\int 49 = 57$
$\int 2 = 3$	$\int 14 = 24$	$\int 26 = 42$	$\int 38 = 60$	$\int 50 = 93$
$\int 3 = 4$	$\int 15 = 24$	$\int 27 = 40$	$\int 39 = 56$	$\int 51 = 72$
$\int 4 = 7$	$\int 16 = 31$	$\int 28 = 56$	$\int 40 = 90$	$\int 52 = 98$
$\int 5 = 6$	$\int 17 = 18$	$\int 29 = 30$	$\int 41 = 42$	$\int 53 = 54$
$\int 6 = 12$	$\int 18 = 39$	$\int 30 = 72$	$\int 42 = 96$	$\int 54 = 120$
$\int 7 = 8$	$\int 19 = 20$	$\int 31 = 32$	$\int 43 = 44$	$\int 55 = 72$
$\int 8 = 15$	$\int 20 = 42$	$\int 32 = 63$	$\int 44 = 84$	$\int 56 = 120$
$\int 9 = 13$	$\int 21 = 32$	$\int 33 = 48$	$\int 45 = 78$	$\int 57 = 80$
$\int 10 = 18$	$\int 22 = 36$	$\int 34 = 54$	$\int 46 = 72$	$\int 58 = 90$
$\int 11 = 12$	$\int 23 = 24$	$\int 35 = 48$	$\int 47 = 48$	$\int 59 = 60$
$\int 12 = 28$	$\int 24 = 60$	$\int 36 = 91$	$\int 48 = 124$	$\int 60 = 168.$

101. Inter has divisorum summas non omnes occurrunt numeri, sed usque ad 60 excluduntur sequentes:

2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 59.

Numeri autem, qui summas divisorum exprimunt, sunt:

1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 24, 28, 30, 31, 32, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 48, 54, 56, 57, 60.

102. Hinc patet duos pluresve numeros quandoque eandem divisorum summam praebere, veluti

$$\begin{array}{ll} \int 6 = \int 11 = 12 & \int 14 = \int 15 = \int 23 = 24 \\ \int 10 = \int 17 = 18 & \int 20 = \int 26 = \int 41 = 42 \\ \int 16 = \int 25 = 31 & \int 33 = \int 35 = \int 47 = 48 \\ \int 21 = \int 31 = 32 & \int 24 = \int 38 = \int 59 = 60. \\ \int 34 = \int 53 = 54 & \\ \int 28 = \int 39 = 56 & \end{array}$$

103. Problema hic proponi solet, quo quaeritur numerus, qui ad summam divisorum suorum habeat datam rationem: scilicet ut sit $N : \int N = n : m$, sive $\frac{\int N}{N} = \frac{m}{n}$, ubi quidem primo necesse est ut sit $m > n$; si enim esset $m = n$, foret $N = 1$.

104. Ratione $m : n$ in minimis terminis expressa, numerus N vel ipsi n, vel cuipiam ejus multiplo aequalis erit. Statuatur ergo $N = an$, eritque $\int N = \int an = am$. At nisi sit $a = 1$, est $\int an > a \int n$, hinque $m > \int n$. Quocirca si fuerit $m < \int n$, nulla solutio locum habet, sin autem $m = \int n$, unica datur solutio, scilicet $N = n$.

105. Nisi ergo sit vel $m = \int n$, vel $m > \int n$, problema solutionem non admittit. Priori quidem casu numerus quaesitus N ipsi n aequabitur, neque praeterea ulla alia dabitur solutio. Posteriori vero casu, quo $m > \int n$, numerus N aequabitur multiplo cuipiam ipsius n, puta $N = an$, siquidem ulla solutio locum habet. Dantur enim utique ejusmodi rationes $m : n$, quibus nequaquam satisfieri potest, etiamsi sit $m > \int n$.

106. Numerus *perfectus* est, cujus summa divisorum ipso duplo est major. Ita si fuerit $\int N = 2N$, erit N numerus perfectus. Qui si sit par, erit hujusmodi $2^n A$, existente A numero impari, sive primo, sive composito. Cum ergo sit

$$N = 2^n A, \quad \text{erit } \int N = (2^{n+1} - 1) \int A = 2^{n+1} A, \quad \text{unde fit } \frac{\int A}{A} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}.$$

107. Quia hujus fractionis $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$ numerator unitate tantum superat denominatorem, excedere nequit summam divisorum denominatoris; erit ergo vel aequalis, vel minor. Posteriori casu nulla datur solutio, prior vero existere nequit, nisi sit $2^{n+1} - 1$ numerus primus. Quare quoties $2^{n+1} - 1$ fuerit numerus primus, ei A aequalis capi debet, eritque numerus perfectus $= 2^n (2^{n+1} - 1)$.

108. Omnes ergo numeri perfecti pares in hac formula $2^n (2^{n+1} - 1)$ continentur, siquidem $2^{n+1} - 1$ fuerit numerus primus, quod quidem evenire nequit nisi $n + 1$ sit numerus primus; etiamsi non omnes primi pro $n + 1$ assumti praebeant $2^{n+1} - 1$ primum. Utrum vero praeter hos numeros perfectos pares, dentur quoque impares, nec ne? nemo adhuc demonstravit.

109. Si daretur numerus perfectus impar, omnes ejus factores impares sint necesse est. Sit ergo $= ABCD$ etc. oportetque fieri $\int A . \int B . \int C . \int D = 2ABCD$ numero impariter pari. Quare inter

summas divisorum $\int A, \int B, \int C, \int D$ unica debet esse impariter par, reliquae omnes impares: omnes ergo factores A, B, C, D, praeter unum, erunt potestates pares numerorum primorum, unus autem ille vel numerus primus formae $4n+1$, vel ejusdem potestas, cujus exponens sit $4\lambda+1$. Sicque talis numerus perfectus hujusmodi habebit formam $(4n+1)^{4\lambda+1}PP$, existente P numero impari, et $4n+1$ primo.

110. Plurima alia problemata huc referenda, quibus alia proponitur relatio inter numeros investigandos eorumque summas divisorum hic praetermitto, quoniam ex traditis principiis methodus ea solvendi non difficulter elicitur.

Caput IV.

De numeris inter se primis et compositis.

111. Duo numeri, qui praeter unitatem nullum alium habent factorem seu divisorem communem, vocantur numeri *primi inter se*; qui autem praeter unitatem alium habent divisorem communem, vocantur *compositi inter se.* Ita 8 et 15 sunt numeri inter se primi, at 9 et 15 numeri inter se compositi.

112. Unitas ergo est ad omnes numeros primus. Scilicet denotante n numerum quemcunque, numeri 1 et n sunt numeri primi inter se, quia praeter unitatem nullum alium admittunt divisorem communem.

113. Pari modo duo numeri unitate differentes n et $n+1$ sunt primi inter se; quoscunque enim divisores habuerit numerus n, nullus eorum dividere potest numerum $n+1$. Namque si p sit divisor numeri n, numerus proxime major per p divisibilis erit $n+p$, neque vero $n+1$ divisionem per p admittet.

114. Numerus primus p ad omnes numeros, nisi qui ejus sunt multipla, est primus; hinc numeri a et p sunt primi inter se, nisi sit vel $a=p$, vel $a=np$. Ergo numerus primus p ad omnes numeros se minores est primus.

115. Multitudo numerorum, dato numero a minorum, est $a-1$, inter quos quot sint ad a vel primi, vel compositi, operae pretium est definire; quoniam inde judicium ad omnes numeros ipso a majores facile extenditur.

116. Sit enim $b<a$, ac si b et a fuerint primi inter se, etiam omnes hi numeri $b+a$, $b+2a$, $b+3a$, etc. ad a erunt primi; ac si b et a habuerint communem divisorem, idem erit divisor numerorum $b+a$, $b+2a$, etc.

117. Si ergo a sit numerus primus $=p$, quia omnes numeri ipso minores ad eum sunt primi, horum multitudo est $=p-1$.

118. Si sit $a=2p$, ab 1 ad a dantur p numeri pares, qui ergo ad a non sunt primi, deinde ipse numerus p ad a etiam non est primus. Auferantur hi a numeris omnibus ab 1 usque ad a, quorum multitudo est $=p$, ac relinquentur $p-1$, totidemque ad a erunt primi.

119. Si sit $a=3p$, inter numeros ipso non majores primum ii, qui sunt per 3 divisibiles, ad eum non sunt primi, quorum multitudo est $=p$, deinde insuper p et $2p$ ad a non sunt primi; reliqui, quorum multitudo est $3p-p-2=2(p-1)$, omnes ad $a=3p$ erunt primi.

120. Simili modo si $a = 5p$, numeri, qui cum a communem habent divisorem, sunt primo omnes per 5 divisibiles, quorum multitudo est $= p$, ac praeterea qui per p sunt divisibiles, nempe p, $2p$, $3p$ et $4p$; ipse enim numerus $5p$ jam ante est notatus: unde multitudo numerorum ad a compositorum est $p + 4$, ideoque multitudo numerorum ad a primorum $= 4p - 4 = 4\ (p - 1)$, qui scilicet ipso a non sunt majores.

121. Generalius si sit $a = pq$, existente utroque factore p et q primo, ab unitate ad a dantur p numeri per q divisibiles, scilicet q, $2q$, $3q \ldots pq$; deinde dantur q numeri per p divisibiles, scilicet p, $2p$, $3p, \ldots qp$, quorum ultimus qp jam est numeratus. Multitudo ergo omnium numerorum a non superantium, qui ad a sunt compositi, erit $= p + q - 1$, unde reliqui, quorum multitudo est

$$= qp - p - q + 1 = (p - 1)\ (q - 1),$$

ad a erunt primi.

122. Hic autem pro p et q numeros primos diversos sumsimus. Nam si esset $a = pp$, alii numeri ad a non essent compositi, nisi qui sunt per p divisibiles, quorum multitudo cum sit $= p$, reliquorum, qui ad a sunt primi, multitudo erit $= pp - p = p\ (p - 1)$.

123. Simili modo si sit $a = p^3$, quia alium divisorem primum praeter p non habet, omnes numeri ab 1 ad a, ad a compositi sunt p, $2p$, $3p \ldots p^2p$, quorum multitudo cum sit p^2, reliqui numeri omnes, quorum multitudo est $p^3 - p^2 = p^2\,(p - 1)$, ad a erunt primi.

124. Hinc in genere patet, si a fuerit potestas quaecunque p^n numeri primi p, multitudinem numerorum ad a primorum, qui quidem ipso a non sint majores, fore $= p^{n-1}\,(p - 1)$.

125. Sit $a = p^2q$, existentibus p et q numeris primis diversis, et cum a alios non habeat divisores primos praeter p et q, numeri ad a compositi vel erunt per p divisibiles, qui sunt p, $2p$, $3p \ldots pq.p$, multitudine $= pq$, vel per q divisibiles, qui sunt q, $2q$, $3q, \ldots p^2.q$ multitudine $= p^2$. Inter hos vero occurunt, qui ibi jam sunt numerati pq, $2pq$, $3pq \ldots p.pq$ multitudine $= p$, ita ut multitudo omnium ad a compositorum sit $= pq + p^2 - p$. Quare reliqui, quorum multitudo est $= ppq - pq - pp + p = p\,(p - 1)\ (q - 1)$, omnes ad a erunt primi.

126. Sit $a = pqr$, existentibus p, q, r numeris primis diversis, ac numeri ad a compositi sunt divisibiles

1)	per p,	scilicet	p, $2p$, $3p \ldots qr.p$	multitudine	qr
2)	per q,	«	q, $2q$, $3q \ldots pr.q$	«	pr
3)	per r,	«	r, $2r$, $3r \ldots pq.r$	«	pq.

Hic autem bis numerantur divisibiles per pq multitudine r, tum divisibiles per pr multitudine q, ac denique divisibiles per qr multitudine p, qui inde auferantur; at hoc modo numerus ipse pqr penitus tolleretur, qui ergo iterum est adjiciendus. Sicque multitudo numerorum ad a compositorum erit $qr + pr + pq - r - q - p + 1$; unde reliqui, quorum multitudo est

$$pqr - qr - pr - pq + r + q + p - 1 = (p - 1)\ (q - 1)\ (r - 1),$$

ad numerum $a = pqr$ erunt primi.

127. Ex his colligetur pro omnibus numerorum generibus fore

si sit numerus propositus	multitudinem numerorum ipso a minorum ad eumque primorum
$a=p$	$p-1$
$a=p^2$	$p(p-1)$
$a=pq$	$(p-1)(q-1)$
$a=p^3$	$p^2(p-1)$
$a=p^2q$	$p(p-1)(q-1)$
$a=pqr$	$(p-1)(q-1)(r-1)$
$a=p^4$	$p^3(p-1)$
$a=p^3q$	$p^2(p-1)(q-1)$
$a=p^2q^2$	$p(p-1)q(q-1)$
$a=p^2qr$	$p(p-1)(q-1)(r-1)$
$a=pqrs$	$(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$

128. Quo autem haec conclusio firmius corroboretur neque inductioni nimium indulgeatur, consideremus hanc formam $a=Mp$, ubi M sit numerus quicunque, et p primus in M non contentus. Ponamus autem ad 1 ab M multitudinem numerorum ad M primorum esse $=\mu$, ideoque multitudinem numerorum ad M compositorum $=M-\mu$.

129. Cum ergo ab 1 ad M sint $M-\mu$ numeri compositi ad M, ab 1 ad Mp erunt $p(M-\mu)$ numeri compositi ad M, qui ergo etiam erunt compositi ad Mp, sed praeterea ad Mp compositi sunt isti: p, $2p$, $3p\ldots Mp$, multitudine M, unde autem expungendi sunt ii, qui jam ad M sunt compositi, quorum multitudo est $M-\mu$; sicque tantum relinquentur μ numeri, qui tantum ad Mp, non vero ad M sunt compositi. Quare ab 1 ad Mp omnino ad Mp compositi erunt tot: $p(M-\mu)+\mu$, et reliqui, quorum multitudo est $Mp-p(M-\mu)-\mu=\mu(p-1)$, ad numerum Mp erunt primi.

130. Simili modo ostenditur, si numerus propositus sit $=Mp^n$, existente p numero primo in M non contento, atque μ fuerit multitudo numerorum ad M primorum, qui quidem inter limites 1 et M contineantur, tum multitudinem omnium numerorum infra Mp^n, ad hunc ipsum numerum Mp^n primorum, fore $=p^{n-1}\mu(p-1)$.

131. Quaeramus enim numeros compositos ad Mp^n, qui vel ad M, vel ad p erunt compositi. At ab 1 ad Mp^n multitudo numerorum ad M compositorum est $=p^n(M-\mu)$, qui vero ad p sunt compositi erunt: p, $2p$, $3p\ldots Mp^{n-1}.p$, multitudine $=Mp^{n-1}$. Hinc autem excludi oportet eos, qui jam ad M sunt compositi, quorum multitudo est $p^{n-1}(M-\mu)$: sicque multitudo eorum, qui ad Mp^n, non vero ad M sunt compositi, erit $=Mp^{n-1}-p^{n-1}(M-\mu)=p^{n-1}\mu$, unde omnino ab 1 ad Mp^n multitudo numerorum ad Mp^n compositorum est $=p^n(M-\mu)+p^{n-1}\mu$. Quocirca reliqui, quorum multitudo est $Mp^n-p^n(M-\mu)-p^{n-1}\mu=p^{n-1}\mu(p-1)$ erunt ad Mp^n primi.

132. Cum ergo multitudo numerorum ad p^n primorum ipsoque minorum sit $=p^{n-1}(p-1)$, ex praecedente propositione summo rigore concludimus: Si numerus propositus sit $=p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi$ etc. fore multitudinem omnium numerorum ad eum primorum ipsoque minorum

$$=p^{\lambda-1}(p-1).q^{\mu-1}(q-1).r^{\nu-1}(r-1).s^{\xi-1}(s-1) \text{ etc.}$$

133. Si igitur M et N fuerint numeri inter se primi, atque multitudo numerorum ab 1 ad M, primorum ad M, sit $=m$, multitudo vero numerorum ab 1 ad N, primorum ad N, sit $=n$, tum multitudo numerorum ad productum MN primorum ipsoque non majorum, erit $=mn$.

134. Hinc patet multitudinem omnium numerorum primorum, quemadmodum jam Euclides demonstravit, finitam esse non posse. Si enim ultimus et maximus numerus primus esset $=p$, statuatur numerus M aequalis producto omnium numerorum primorum $M=2.3.5.7\ldots p$, qui ergo ad omnes plane numeros esset compositus: cum igitur idem numerus M ad $M-1$, vel $M+1$ certe sit primus, patet assertionem esse absurdam.

135. Ex superioribus autem patet, inter numeros ipso M minores non solum numerum $M-1$, sed etiam plures alios ad M certe esse primos, cum multitudo horum numerorum ad M primorum sit $=1.2.4.6\ldots(p-1)$, quae eo est major, quo plures numeri primi in se invicem multiplicentur.

136. Ponamus $m=1.2.4.6\ldots(p-1)$, existente $M=2.3.5.7\ldots p$; et cum ab 1 ad M tot sint numeri ad M primi, quot m continet unitates, hi vel ipsi erunt primi, vel compositi ex primis, qui sint ipso p majores.

137. Si ab 1 ad M fuerint m numeri ad M primi, ab 1 ad $2M$ erunt $2m$ numeri ad M primi, et in genere ab 1 ad NM erunt Nm numeri ad M primi. In quovis enim intervallo

$$1\ldots M,\quad M+1\ldots 2M,\quad 2M+1\ldots 3M,\quad 3M+1\ldots 4M,\ \text{etc.}$$

multitudo numerorum ad M primorum est eadem.

138. Si N designet alium numerum quemcunque, atque ab 1 ad N fuerint n numeri ad N primi, ab 1 ad MN erunt Mn numeri ad N primi. At in eodem intervallo sunt Nm numeri ad M primi. Qui autem sunt primi ad MN, ii quoque sunt primi tam ad M quam ad N.

139. Ante autem ostendimus, si hi numeri M et N fuerint primi inter se, tum in intervallo $1\ldots MN$ tot dari numeros ad MN primos, quot mn contineat unitates; hique numeri in utraque praecedente multitudine Mn et Nm occurrunt. (*)

Caput V.

De residuis ex divisione natis.

140. Si numerus a non sit multiplum numeri b, divisio illius per hunc non succedit, et excessus numeri a supra multiplum ipsius b proxime minus vocatur *residuum* ex divisione ortum. Ita si sit $a=mb+r$, erit r residuum ex divisione numeri a per b natum.

(*) *Notae Ill. Auctoris margini adscriptae.* De maximo communi divisore ejusque inventione. — Si A et B sint numeri primi, inveniri potest multiplum ipsius A, quod per B divisum relinquat datum numerum C. — Qui numeri inter se fuerint primi, eorum potestates quaecunque inter se erunt primi. — Si A sit primus ad B, atque etiam ad C, erit quoque ad BC primus. — Si productum AB sit divisibile per primum p, alteruter factor per eum erit divisibilis. — Si A et B sint primi inter se, inveniri possunt numeri m et n, ut fiat $mA-nB=1$, vel alii cuivis numero dato. — Si sit φ maximus communis factor numerorum A et B, tum $\frac{A}{\varphi}$ et $\frac{B}{\varphi}$ erunt primi inter se. — Si a per b divisum det residuum r, tum na per nb divisum dabit residuum nr. — Si a per b divisum det residuum r, communis factor numerorum a et b, si quem habent praeter unitatem, simul erit factor residui r. Vicissim, si b et r habeant communem factorem, idem quoque factor erit ipsius a. — Si a et b sint numeri inter se primi et $a>b$, erit $a=mb+p$; et $b>p$, tum vero $b=np+q$ et $p>q$, sicque tandem ad unitatem pervenietur.

141. Hinc patet residuum r semper minus esse numero b seu divisore; si enim esset aequale, seu $r = b$, aucto indice multipli m unitate, foret a verum multiplum ipsius b, scilicet $a = (m+1)b$; et si esset $r > b$, augendo indicem m reduceretur infra b.

142. Proposito ergo divisore quocunque b, si dividendus a fuerit multiplum ipsius b, residuum erit $= 0$; sin antem a non fuerit multiplum ipsius b, residuum erit vel 1, vel 2, vel 3, vel quicunque alius numerus minor quam b, ita ut multitudo residuorum, quae oriri possunt, sit $b - 1$, vel adeo b, si cyphra simul numeretur.

143. Pro quovis ergo divisore b omnes numeri in tot classes distribui possunt, quot b continet unitates. Prima nempe classis continebit omnes numeros multiplos ipsius b, seu formae mb; secunda eos, qui per b divisi pro residuo relinquunt 1, tertia eos, qui 2, quarta eos, qui 3, et denique ultima, qui relinquunt $b - 1$.

144. Ita sumto 2 pro divisore, duae habentur classes, quarum prima continet numeros formae $2m$, altera vero numeros formae $2m+1$. Numeri prioris classis vocantur *pares*, posterioris vero *impares*.

145. Si ternarius pro divisore assumatur, omnes numeri in tres classes distinguentur: prima complectitur numeros formae $3m$, secunda numeros formae $3m+1$, ac tertia numeros formae $3m+2$.

146. Si divisor statuatur $= 4$, quaternae classes omnium numerorum his quatuor formis comprehenduntur: I. $4m$, II. $4m+1$, III. $4m+2$, IV. $4m+3$, ubi prima classis nomen sortita est numerorum *pariter parium*; tertia vero numerorum *impariter parium*. At secunda et quarta numeros impares in duas classes subdivisos exhibent.

147. Simili modo divisor 5 has quinque numerorum classes suppeditat: I. $5m$, II. $5m+1$, III. $5m+2$, IV. $5m+3$, V. $5m+4$: ac divisor 6 praebet has sex classes:

I. $6m$, II. $6m+1$, III. $6m+2$, IV. $6m+3$, V. $6m+4$, VI. $6m+5$,

et ita porro pro quovis alio divisore.

148. Sic igitur quilibet numerus pro quovis divisore ad certam quandam classem refertur, seu certa quadam forma exprimitur, quod, cum divisorum numerus in infinitum augeri queat, infinitis modis fieri potest.

149. Si enim numerus fuerit minor divisore proposito, ipse ut residuum spectari potest, indice multipli evanescente: ita si sit $a < b$, erit $a = mb + a$ existente $m = 0$, numerus ergo 3 respectu divisoris 5 pertinet ad classem $5m+3$.

150. Quaelibet classis infinitos continet numeros in arithmetica progressione crescentes, secundum differentiam divisori aequalem. Ita in genere si divisor sit b et residuum r, omnes numeri ad classem $mb+r$ relati sunt: r, $b+r$, $2b+r$, $3b+r$, $4b+r$, $5b+r$, etc. cujus progressionis arithmeticae terminus generalis est ipsa formula $mb+r$, unde est nata.

151. Formula $mb+r$ etiam hoc modo $(m+1)b - b + r$ potest repraesentari, sicque residuo positivo r aequivalens censendum est residuum negativum $-(b-r)$, unde patet ideam residuorum latius extensam etiam numeros negativos complecti.

152. Hinc divisore b existente $=2$, formula numerorum imparium $2m+1$ etiam ita $2m-1$ repraesentari potest; atque si divisor b sit $=3$, classis numerorum, qui per 3 divisi relinquunt binarium, etiam formula $3m-1$ continetur; sicque omnes numeros in una harum trium formularum $3m$, $3m+1$ et $3m-1$ contineri necesse est.

153. Quare si residua negativa admittere velimus, omnes formulas $mb \pm r$ ita repraesentare poterimus, ut residuum r semissem divisoris b non superet. Si enim esset $r > \frac{1}{2}b$, pro r sumamus $-(b-r)$ eritque $b-r < \frac{1}{2}b$.

154. Simili modo cum sit $mb+r=(m-1)b+b+r$, residuo r etiam aequivalet residuum $b+r$, vocabulo in latiori sensu accepto. Generatim ergo residua minus proprie ita dicta $b+r$, $2b+r$, $3b+r$, etc. aequivalent residuo r proprie sic dicto.

155. Scilicet divisore existente b, omnis numerus, etiamsi sit major quam b, tanquam residuum spectari potest, qui ad residuum proprie ita dictum reducetur, divisorem b inde toties auferendo, quoties fieri licet, quod adeo negativa admittendo infra semissem ipsius b deprimi poterit.

156. Ita si divisor sit 6 et residuum 16, hoc residuum improprium reducetur ad proprium 4, atque adeo ad negativum -2, sive istae formulae $6m+16$, $6m+4$, $6m-2$ pro aequivalentibus sunt habendae, quia omnes numeri in una contenti simul in reliquis continentur.

157. Circa residua plures insignes proprietates perpendi oportet. Si numerus A per divisorem d divisus, praebeat residuum α, numeri quoque $A+d$, $A+2d$, $A+3d$, etc. idem relinquent residuum α, at numerus $A+1$ per eundem divisus dabit residuum $\alpha+1$, et generaliter numerus $A+n$ residuum dabit $\alpha+n$, quod si excedat divisorem d, eo subtrahendo quoties fieri potest, ad minimam formam reducetur.

158. Simili modo, si sumto divisore d, numero A residuum conveniat α, numeri quoque $A-d$, $A-2d$, $A-3d$, etc. idem relinquent residuum, at numero $A-1$ residuum conveniet $\alpha-1$, et numero $A-n$ residuum $\alpha-n$, quod si forte sit negativum, additione divisoris d ad positivum reducetur.

159. Sumto divisore d, si numero A conveniat residuum α, numero vero B residuum β, aggregato horum numerorum $A+B$ conveniet residuum $\alpha+\beta$, quod congruit cum $\alpha+\beta-d$, si forte sit $\alpha+\beta > d$. Hinc patet si sit $\alpha+\beta=d$, fore $A+B$ multiplum ipsius d.

160. Iisdem positis, differentiae numerorum $A-B$ conveniet residuum $\alpha-\beta$, vel etiam $\alpha-\beta+d$, si forte sit $\beta > \alpha$. Unde si sit $\alpha=\beta$, seu si numeri A et B paria relinquant residua, eorum differentia erit per divisorem d divisibilis.

161. Sumto divisore d, si numerus A praebeat residuum α, ejus duplum $2A$ dabit residuum 2α, vel etiam $2\alpha-d$, triplum vero $3A$ dabit residuum 3α, cujus, si sit majus quam d, minima forma erit vel $3\alpha-d$, vel $3\alpha-2d$. Atque in genere multipli cujusvis nA residuum erit $n\alpha$, sive $n\alpha-md$.

162. Si divisore posito $=d$, numero A respondeat residuum α, numero vero B residuum β, producto AB residuum conveniet $\alpha\beta$, quod si forte majus fuerit quam divisor d, reducitur ad $\alpha\beta-d$, vel $\alpha\beta-md$.

163. Erit enim $A = md + \alpha$ et $B = nd + \beta$, unde fit productum

$$AB = mnd^2 + (m\beta + n\alpha)\, d + \alpha\beta,$$

cujus partes priores cum sint per d divisibiles, postrema $\alpha\beta$ pro residuo haberi potest.

164. Hinc colligimus, si numerus A per d divisus relinquat residuum α, ejus quadrato A^2 respondere residuum $\alpha\alpha$, ejusque cubo A^3 residuum α^3, et potestati cuicunque A^n residuum α^n, quod, divisione per d facta, porro ad minimam formam reducetur.

165. Quare si numero A per d diviso relinquatur residuum $= 1$, omnes ejus potestates A^2, A^3, A^4, etc. per eundem divisorem d divisi idem residuum relinquent $= 1$. At si residuum numeri A sit -1, aequipollens ipsi $d - 1$, potestatum parium A^2, A^4, A^6, A^8, etc. residua erunt $+1$, imparium vero -1.

166. Denique notandum est, si numerus A per d divisus praebeat residuum α, tum fore $A - \alpha$ per numerum d divisibile. Unde cum A^n pro divisore d det residuum α^n, erit quoque $A^n - \alpha^n$ per d divisibile.

Caput VI.

De residuis ex divisione terminorum progressionis arithmeticae ortis.

167. Incipiamus a serie numerorum naturalium, cujus termini 1, 2, 3, 4, etc. per divisorem quemcunque d divisi, dabunt residua 1, 2, 3, 4, etc. donec perveniatur ad terminum d, cui residuum convenit $= 0$, sequentes vero termini $d + 1$, $d + 2$, $d + 3$, etc. eodem ordine residua 1, 2, 3, etc. reddent, usque ad $2d$, cujus residuum iterum evanescit, et ita porro.

168. Sit jam proposita progressio arithmetica quaecunque

$$a,\ a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ a + 4b,\ a + 5b,\ \text{etc.}$$

cujus singuli termini per divisorem d dividantur, et ex primo oritur residuum a, quod idem ante non recurret, quam perveniatur ad terminum $a + nb$, cujus pars nb per d divisibilis existat, et post hunc terminum residua eodem ordine prodibunt atque ab initio (*).

169. Primo quidem statim liquet, hinc plura diversa residua resultare non posse, quam divisor d contineat unitates. Unde, si ab initio jam tot diversa residua prodierint, necesse est, ut deinceps priores iterum redeant. Semper autem terminus $a + db$, cujus index est $d + 1$, idem praebet residuum ac primus a.

170. Si differentia progressionis b fuerit factor divisoris d, vel si saltem b et d communem habeant factorem φ, ut sit $b = B\varphi$ et $d = D\varphi$, tum antequam ad terminum $a + db$ perveniatur, primum residuum a revertetur, scilicet hoc continget in termino $a + Db$, cujus index est $D + 1$, quoniam $Db = BD\varphi = Bd$ per d est divisibile.

171. Hic ergo duos casus evolvi conveniet, alterum, quo divisor d et differentia progressionis a sunt numeri inter se primi, alterum vero, quo sunt numeri inter se compositi, seu quo habent quempiam factorem communem, praeter unitatem.

(*) *Script. ad marg.* Haec residua excedent numero a residua orta ex progressione 0, b, $2b$, $3b$, $4b$, etc. quare hanc evolvisse sufficiet.

172. Si divisor d et differentia progressionis b fuerint numeri primi inter se, primum residuum a ante non recurrit, quam in termino $a+db$; si enim ex termino quodam antecedente resultaret, puta $a+(d-n)b$, esset $(d-n)b$, ac proinde etiam nb per d divisibile, ideoque etiam n, quod foret absurdum.

173. Ad definienda ergo residua considerari oportet terminos progressionis, a primo a usque ad $a+(d-1)b$, quorum multitudo est d, quos terminos ordine dispositos cum suis residuis ita repraesentemus:

Indices:	1,	2,	3,	4,	5,	d
Progressio:	a,	$a+b$,	$a+2b$,	$a+3b$,	$a+4b$, ...	$a+(d-1)b$
Residua:	α,	β,	γ,	δ,	ε,	λ

174. Primum ergo observo cuncta haec residua, quorum multitudo est $=d$, inter se esse diversa. Quemadmodum enim primum α non amplius occurrere ostensum est, ita etiam secundum β semel tantum adesse docetur. Si enim ex termino $a+nb$, existente $n<d$, idem oriretur residuum, foret differentia terminorum $(n-1)b$ per d divisibilis, ideoque et $n-1$, quod repugnat.

175. Cum igitur omnia residua $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda$ sint inter se diversa, eorumque multitudo sit $=d$, inter ea omnes numeri ipso d minores una cum cyphra occurrent, numeri scilicet $0, 1, 2, 3, \ldots (d-1)$ occurrent, quorum multitudo pariter est $=d$.

176. Quare si r fuerit numerus quicunque minor quam divisor d, dabitur certe progressionis terminus $a+nb$, existente $n<d$, qui per d divisus relinquat residuum r. Ac sumto $r=0$, dabitur ejusmodi terminus $a+nb$ per d divisibilis.

177. Si terminus $a+nb$ residuum praebeat r, erit $a+nb-r$ per d divisibile. Unde si b et d sint numeri inter se primi, et $a-r$ denotet numerum quemcunque, semper dabitur numerus n minor quam d, ita ut numerus $a-r+nb$ fiat per d divisibilis.

178. Sit $a+mb$ terminus per d divisibilis, existente $m<d$, ac terminus sequens $a+(m+1)b$ residuum dabit b, praecedens vero $a+(m-1)b$ residuum $-b$, seu $d-b$. Sit porro $a+nb$ terminus, qui per d divisus unitatem relinquat, atque illo numero hinc ablato differentia $(n-m)b$ etiam unitatem relinquet.

179. Ponamus $n-m=p$, ut numerus pb per d divisus unitatem relinquat, sumtoque termino $a+mb$ per d divisibili, termino $a+(m+p)b$ conveniet residuum $=1$, termino $a+(m+2p)b$ residuum $=2$, termino $a+(m+3p)b$ residuum $=3$, et in genere termino $a+(m+np)b$ residuum $=n$.

180. Si $m+np$ fuerit majus divisore d, hic toties inde auferatur, donec remaneat numerus $k<d$, et terminus $a+kb$ per d divisus relinquet residuum $=n$.

181. Facilius autem termini data residua relinquentes definiri possunt, dum innotuerit productum pb, quod per d divisum relinquat unitatem. Cum enim terminus primus a relinquat α, terminus $a+npb$ relinquet $\alpha+n$.

182. Si ergo datum residuum fuerit $=r$, ponatur $\alpha+n=r$, et ob $n=r-\alpha$, invento p, terminus residuum r praebens erit $a+(r-\alpha)pb$; vel etiam generaliter $a+((r-\alpha)p\pm\mu d)b$, ubi μ ita assumere licet, ut fiat $(r-\alpha)p\pm\mu d<d$.

183. Totum ergo negotium huc redit, ut numeri b id investigetur multiplum pb, quod per d divisum unitatem relinquat. Cum itaque $pb - 1$ per d sit divisibile, posito $pb - 1 = qd$, numeros p et q investigari oportet, ut fiat $pb - qd = 1$. Semper autem p infra d assignari poterit.

184. Saepe ejusmodi productum πb facilius reperitur, quod per d divisum relinquat $d - 1$, seu $- 1$; tum autem hoc productum $(d - \pi)\, b$ residuum praebebit $= + 1$, ita ut invento π futurum sit $p = d - \pi$. Tum igitur terminus $a + ((a - r)\, \pi \pm \mu d)\, b$ datum residuum r relinquat.

185. Consideremus nunc etiam residua, quae oriuntur si differentia progressionis b et divisor d non fuerint numeri inter se primi. Atque jam vidimus, si factor communis sit φ, ut sit $b = B\varphi$ et $d = D\varphi$, jam terminum $a + Db$ idem praebere residuum, quod primus a.

186. Quare si φ fuerit maximus factor communis numerorum b et d, quoniam primum residuum a, vel α demum in termino $a + Db$ recurrit, plura residua diversa locum habere nequeunt, quam numero D: neque ergo omnes numeri divisore d minores inter residua occurrent.

187. Quo haec residua facilius scrutemur, ponamus esse $a = 0$, sintque termini progressionis cum suis residuis:

Indices	1	2	3	4	D
Termini	0,	$B\varphi$,	$2B\varphi$,	$3B\varphi \ldots\ldots$	$(D - 1)\, B\varphi$
Residua	0,	$\beta\varphi$,	$\gamma\varphi$,	$\delta\varphi$,	$\lambda\varphi$

manifestum enim est, si hi termini per $d = D\varphi$ dividantur, residua quoque per φ esse divisibilia.

188. Nam si mB divisum per D praebeat residuum r, erit $mB = nD + r$, ideoque $mB\varphi = nD\varphi + r\varphi$. Unde si $mB\varphi$ per $D\varphi = d$ dividatur, residuum erit $r\varphi$, multiplum ipsius φ. Cum igitur pro r omnes numeri ipso D minores prodire queant, etiam inter illa residua omnia multipla ipsius φ, quae quidem divisorem $d = D\varphi$ non superant, occurrere debent, quorum multitudo utique est $= D$.

189. Si ad singulos terminos adjiciamus numerum a, eodem singula residua augebuntur, quae ergo ita se habebunt, existente $b = B\varphi$ et $d = D\varphi$:

Indices	1	2	3	4	5	D
Termini	a,	$a + b$,	$a + 2b$,	$a + 3b$,	$a + 4b \ldots\ldots$	$a + (D - 1)\, b$
Residua	a,	$a + \beta\varphi$,	$a + \gamma\varphi$,	$a + \delta\varphi$,	$a + \varepsilon\varphi$,	$a + \lambda\varphi$

ubi series β, γ, δ, $\varepsilon \ldots \lambda$ omnes numeros ipso D minores continet.

190. Hoc ergo casu ex serie residuorum excluduntur omnes numeri, qui numero a minuti non sunt divisibiles per φ, seu maximum communem divisorem differentiae b et divisoris d.

191. Cum numeri B et D sint primi inter se, ejusmodi multiplum prioris, puta mB, exhiberi potest, quod per D divisum, datum relinquat residuum r; tum autem nostrae progressionis terminus $a + mB\varphi$, seu $a + mb$ per $D\varphi = d$ divisus, relinquet residuum $a + r\varphi$ (*).

Caput VIII.

De residuis ex divisione terminorum progressionis geometricae ortis.

192. Progressionem geometricam in genere ita repraesentamus: a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, etc.

(*) *Script. ad marg.* Methodus definiendi formulam $ax + b$, ut ea per datum numerum d fiat divisibilis.

cujus termini, si per numerum quemcunque d dividantur, ejusmodi dabunt residua, quae facile ex residuis hujus progressionis 1, b, b^2, b^3, etc. colligi possunt, his scilicet per a multiplicandis.

193. Haec ergo de residuis quaestio ad meras potestates revocatur, ita ut residuum definiendum sit, quod potestas quaecunque b^n per datum numerum d divisa relinquit. Ubi quidem casus distingui convenit, quibus numeri b et d sunt vel primi inter se, vel compositi.

194. Si sit $b = p\varphi$ et $d = q\varphi$, quaeratur residuum ex $p^n\varphi^{n-1}$ ortum, si per q dividatur; illudque per φ multiplicatum dabit residuum ortum ex divisione numeri $p^n\varphi^n$ per $q\varphi$, hocque modo deducimur ad divisionem ejusmodi potestatis b^n per d, ubi b et d sint numeri inter se primi.

195. Sint ergo b et d numeri inter se primi, et residua ex divisione potestatum ipsius b oriunda ita indicentur:

$$\begin{array}{lllllllllll} \text{Potestates} & 1, & b, & b^2, & b^3, & b^4, & b^5, & b^6, & b^7, & \text{etc.} \\ \text{Residua} & 1, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \text{etc.} \end{array}$$

quae omnia ad divisorem d quoque erunt prima, quia d ad omnes potestates ipsius b est primus.

196. Quia haec residua 1, α, β, γ, δ, etc. omnia sunt minora quam d, ea omnia a se invicem diversa esse non possunt. Quin si multitudo numerorum, ad d primorum eoque simul minorum, sit μ, plura residua diversa resultare nequeunt, quam μ continet unitates.

197. Cum ergo innumerabiles potestates paria praebeant residua, si ponamus b^m et b^{m+n} idem dare residuum, harum potestatum differentia $b^{m+n} - b^m = b^m(b^n - 1)$ per d erit divisibilis. Quia igitur b^m ad d est primus, sequitur $b^n - 1$ per d esse divisibile, seu potestatem b^n dare residuum $= 1$.

198. Quia plura quam μ residua diversa occurrere nequeunt, si progressio ad terminum b^μ continuetur, ob terminorum numerum $= \mu + 1$, unum saltem residuum bis occurret, sicque casus ante positus contingat, antequam $m + n$ superet μ, unde potestas b^n residuum $= 1$ reproducens dabitur, ita ut n non superet μ.

199. Ponamus post unitatem b^n infimam esse potestatem, quae per d divisa unitatem relinquat, atque sequentes potestates b^{n+1}, b^{n+2}, b^{n+3}, etc. eadem praebebunt residua, quae potestates initiales b, b^2, b^3, etc. donec perveniatur ad potestatem b^{2n}, quae iterum unitatem pro residuo relinquet.

200. Cum igitur a potestate b^n progrediendo eadem residua recurrant, atque ab initio, non solum omnes potestates b^0, b^n, b^{2n}, b^{3n}, b^{4n}, etc. idem relinquent residuum 1, sed etiam hae b^1, b^{n+1}, b^{2n+1}, b^{3n+1}, b^{4n+1}, etc. idem habebunt residuum, quin etiam istae b^m, b^{n+m}, b^{2n+m}, b^{3n+m}, etc. per d divisae aequalia residua relinquent.

201. Posita ergo b^n infima potestate unitatem pro residuo relinquente, ita ut n non excedat μ, multitudinem numerorum ipso d minorum ad eumque primorum, omnes antecedentes potestates 1, b, b^2, b^3, ... b^{n-1} disparia praebebunt residua, quae deinceps eodem ordine recurrent. Si enim duo eorum essent paria, minor valor pro n haberetur, contra hypothesin.

202. Quodsi ergo in residuis omnes numeri ad divisorem d primi eoque minores occurrant, quorum multitudo est $= \mu$, erit $n = \mu$, atque $b^\mu - 1$ per d erit divisibile. Sin autem non omnes illi numeri ad d primi inter residua occurrant, necesse est, ut sit $n < \mu$. Ostendemus autem his casibus n esse partem aliquotam ipsius μ.

203. Si non omnes numeri ad d primi eoque minores, quorum multitudo est $= \mu$, inter residua, quorum multitudo est $= n$, occurrant, eos, qui ex ordine residuorum excluduntur, nomine *non-residuorum* appellabo, ita ut multitudo residuorum n cum multitudine non-residuorum exhaurire debeat numerum μ.

204. Si in serie residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. occurrant numeri r et s, in ea quoque occurret numerus rs, seu residuum ipsi aequivalens. Si enim residua r et s respondeant potestatibus b^ϱ et b^σ, potestati $b^{\varrho+\sigma}$ respondebit residuum rs. Hincque inter residua occurret numerus $r^f s^g$, sumtis exponentibus f et g utcunque.

205. Vicissim si potestati b^ϱ conveniat residuum r, potestati vero $b^{\varrho+\sigma}$ residuum rs, vel $rs - \lambda d$, tum potestati b^σ conveniet residuum s. Nam producto $b^\varrho s$ conveniet residuum rs, idem quod potestati $b^{\varrho+\sigma}$; hinc differentia $b^{\varrho+\sigma} - b^\varrho s = b^\varrho (b^\sigma - s)$ per d erit divisibilis. Quare cum b^ϱ ad d sit primus, necesse est sit $b^\sigma - s$ per d divisibile, sicque potestati b^σ respondebit residuum s.

206. Si ergo numeri r et rs inter residua reperiantur, certum est et numerum s ibidem repertum iri. Quodsi jam series residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., quorum numerus est $= n$, non omnes numeros ipso d minores, ad eumque primos complectatur, quorum multitudo est $= \mu$, dabitur unus pluresve, quos in classem non-residuorum referri oportet.

207. Sit x tale non-residuum, ac manifestum est etiam hos numeros $\alpha x, \beta x, \gamma x, \delta x$, etc. inter non-residua reperiri, nam si αx in residuis inveniretur, quia α ibidem extat, etiam x ibidem reperiri deberet, contra hypothesin. Ex unico ergo non-residuo necessario sequuntur tot non-residua quot habentur residua, scilicet numero n. Sunt enim haec non-residua inter se aeque disparia ac ipsa residua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ac si ibi duo aequalia darentur, etiam hic talia esse deberent, quod foret absurdum (*).

208. Statim ergo atque est $n < \mu$, ad minimum dantur n non-residua, quae si omnia complectantur, erit tam residuorum quam non-residuorum numerus $= n + n$, ipsi μ aequandus, unde fit $n = \frac{\mu}{2}$; hinc si $n < \mu$, fieri nequit, ut numerus residuorum n semissem numeri μ superet.

209. Si in modo expositis non-residuis $x, \alpha x, \beta x, \gamma x$, etc. non omnia occurrant, sit y numerus $< d$ ad eumque primus, qui neque in his non-residuis neque residuis reperiatur, atque simili modo etiam hi numeri $\alpha y, \beta y, \gamma y$, etc. a praecedentibus diversi, ad non-residua referri debent, sicque denuo n numeri ad non-residua accedunt.

210. Si his duobus ordinibus nondum omnia non-residua exhauriantur, novus ordo accedet, pariter n terminis constans, ac fortasse denuo novus totidem constans terminis; unde colligitur numerum omnium non-residuorum, nisi sit nullus, vel ipsi numero n, vel ejus duplo, vel triplo, vel in genere multiplo cuicunque aequari.

211. Cum igitur omnia non-residua una cum residuis multitudinem omnium numerorum ipso divisore d minorum ad eumque primorum exhaurire debeant, erit vel $n = \mu$, vel $2n = \mu$, vel $3n = \mu$ etc. sicque semper exponens n est pars aliquota numeri μ.

(*) *Script. ad marg.* Si x et y non-residua, erit $y = \alpha x$ et $xy = \alpha xx$; jam si numerus non-residuorum = numero residuorum, demonstrandum est xx inter residua contineri.

212. Quodsi ergo b et d sint numeri inter se primi, et μ denotet multitudinem omnium numerorum ad d primorum ipsoque minorum, tum vero b^n fuerit minima potestas post casum $n=0$, quae per d divisa unitatem relinquat, tum erit vel $n=\mu$, vel n aequabitur parti cuipiam aliquotae ipsius μ, ita ut sit $n=\frac{\mu}{m}$, existente m divisore quopiam ipsius μ.

213. Cum autem post potestatem b^n etiam omnes istae b^{2n}, b^{3n}, b^{4n}, etc. unitatem pro residuo agnoscant, semper potestas $b^{mn}=b^{\mu}$ per d divisa unitatem relinquet. Hinc dum b et d fuerint numeri inter se primi, haec formula $b^{\mu}-1$ semper per numerum d erit divisibilis.

214. Si praeterea etiam c et d fuerint numeri inter se primi, quoniam $c^{\mu}-1$ divisionem per d admittit, harum formularum differentia $b^{\mu}-c^{\mu}$ semper per numerum d erit divisibilis, dummodo uterque numerus b et c ad d fuerit primus.

215. Si pro d sumamus numerum primum p, erit $\mu=p-1$, atque haec formula $b^{p-1}-1$ semper erit per p divisibilis, nisi ipse numerus b fuerit multiplum ipsius p. Fieri autem potest, ut forma simplicior b^n-1 etiam divisionem per p admittat, ubi autem necessario requiritur, ut exponens n sit pars aliquota ipsius $p-1$.

216. Si divisor sit $d=pq$, existentibus p et q numeris primis inaequalibus, neque b alterutrum horum numerorum complectatur, tum ob $\mu=(p-1)(q-1)$, haec forma $b^{(p-1)(q-1)}-1$ per d erit divisibilis.

217. Ac si existentibus p, q, r, s numeris primis inaequalibus, fuerit $d=p^{\lambda}q^{\mu}r^{\nu}s^{\xi}$, ac b numerus quicunque ad d primus, tum posito

$$m=p^{\lambda-1}(p-1)\,q^{\mu-1}(q-1)\,r^{\nu-1}(r-1)\,s^{\xi-1}(s-1),$$

haec forma b^m-1 semper per d erit divisibilis, atque interdum fieri potest, ut formula simplicior b^n-1, existente n parte quapiam aliquota ipsius m, divisibilis evadat.

218. Sed retineamus divisorem generalem d, sitque μ multitudo numerorum ipso minorum ad eumque primorum, pro b autem sumatur numerus quicunque ad d primus, cujus minima potestas per d divisa unitatem relinquens sit b^n, atque vidimus necessario fore vel $n=\mu$, vel $n=\frac{1}{2}\mu$, vel $n=\frac{1}{3}\mu$, vel $n=\frac{1}{4}\mu$, vel $n=\frac{1}{5}\mu$, siquidem μ tales partes aliquotas admittat; quos casus diligentius evolvi conveniet.

219. Statim quidem suspicari licet, hoc discrimen ab indole numeri b pendere, ita ut pro dato divisore d, certi numeri pro b sumti praebeant $n=\mu$, alii $n=\frac{1}{2}\mu$, alii $n=\frac{1}{3}\mu$, alii $n=\frac{1}{4}\mu$, seu adhuc minori parti aliquotae ipsius μ.

220. Quaecunque autem n sit pars aliquota ipsius μ, si binae potestates b^n et c^n unitatem relinquant, etiam composita $(bc)^n$ unitatem relinquet. Deinde etiam manifestum est potestatem $(b\pm\lambda d)^n$ per d divisam, esse relicturam unitatem.

221. Cum potestas b^{μ} semper unitatem relinquat, quaeramus numeros pro b sumendos, ut etiam $b^{\frac{1}{2}\mu}$ unitatem relinquat, quo casu ante omnia necesse est ut μ sit numerus par, quod quidem semper evenit nisi sit $d=2$.

222. Si jam capiatur $b = ee$, ita ut e sit numerus ad d primus, certum est $b^{\frac{1}{2}\mu} = e^{\mu}$ unitatem relinquere, quod etiam evenit si $b = ee \pm \lambda d$. Minores ergo numeri pro b sumendi sunt residua, quae ex divisione numerorum quadratorum per d resultant, si modo quadrata ad d fuerint prima.

223. Simili modo potestas $b^{\frac{1}{3}\mu}$ per d divisa unitatem relinquet, si fuerit $b = e^3$, et generalius si $b = e^3 \pm \lambda d$. Minores ergo valores ipsius b idonei sunt residua, ex divisione cuborum ad d primorum per ipsum numerum d orta. Evidens autem est hoc evenire non posse, nisi numerus μ sit per 3 divisibilis.

224. Si μ per 4 sit divisibile, tum potestas $b^{\frac{1}{4}\mu}$. per d divisa unitatem relinquet, si fuerit $b = e^4$, et generalius $b = e^4 \pm \lambda d$. Minores ergo numeri sunt residua, quae ex divisione biquadratorum per d oriuntur, iis scilicet tantum biquadratis sumendis, quae ad d sunt prima.

225. In genere ergo, si numerus μ divisibilis sit per ν, potestas $b^{\frac{\mu}{\nu}}$ per d divisa unitatem relinquet, si capiatur $b = e^{\nu}$; vel adeo $b = e^{\nu} \pm \lambda d$, ita ut idonei numeri pro b substituendi sint residua, quae ex divisione potestatum ordinis ν per numerum d oriuntur, potestatibus illis ad d existentibus primis.

226. Sufficit ergo pro b numeros sumsisse ipso d minores, qui quidem ad eum sint primi; atque unitas quidem pro b sumta omnia residua unitati aequalia reddit, ita ut hoc casu semper sit $n = 1$, seu $n = \frac{\mu}{\mu}$. Casus autem iste solus relinquitur, si capiatur divisor $d = 2$, quippe quo fit $\mu = 1$.

227. Sit divisor $d = 3$, erit $\mu = 2$, et praeter casum $b = 1$, quo $n = 1$, habebimus casum $b = 2$, unde oritur progressio geometrica cum suis residuis:

Progr. geom.	1,	2,	2^2,	2^3,	2^4,	etc.,	ubi est $n = 2$,
Residua	1,	2,	1,	2,	1,	etc.,	seu $n = \mu$.

228. Sit divisor $d = 4$, erit $\mu = 2$, et praeter casum $b = 1$, quo $n = 1 = \frac{1}{2}\mu$, habemus casum $b = 3$.

Progr. geom.	1,	3,	3^2,	3^3,	3^4,	etc.,	hinc ergo fit $n = 2 = \mu$
Residua	1,	3,	1,	3,	1,	etc.	

229. Sit divisor $d = 5$, erit $\mu = 4$, et habebimus hos casus

	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$
Progr. geom.	1, 1	1, 2, 2^2, 2^3, 2^4	1, 3, 3^2, 3^3, 3^4	1, 4, 4^2
Residua	1, 1	1, 2, 4, 3, 1	1, 3, 4, 2, 1	1, 4, 1
	$n = 1$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 2$

duobus ergo casibus hic est $n = 4$, uno $n = 2$ et uno $n = 1$.

230. Si divisor $d = 6$, erit $\mu = 2$, et duo erunt casus

	$b = 1$	$b = 5$
Progr. geom.	1, 1	1, 5, 5^2
Residua	1, 1	1, 5, 1
	$n = 1$	$n = 2$

231. Si divisor $d = 7$, erit $\mu = 6$ totidemque habentur casus

	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$
Progr. geom.	$1, 1$	$1, 2, 2^2, 2^3$	$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$	$1, 4, 4^2, 4^3$
Residua	$1, 1$	$1, 2, 4, 1$	$1, 3, 2, 6, 4, 5, 1$	$1, 4, 2, 1$
	$n = 1$	$n = 3$	$n = 6$	$n = 3$

	$b = 5$	$b = 6$
Progr. geom.	$1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6$	$1, 6, 6^2$
Residua	$1, 5, 4, 6, 2, 3, 1$	$1, 6, 1$
	$n = 6$	$n = 2$

232. Si divisor $d = 8$, erit $\mu = 4$ totidemque casus

	$b = 1$	$b = 3$	$b = 5$	$b = 7$
Prog. geom.	$1, 1$	$1, 3, 3^2$	$1, 5, 5^2$	$1, 7, 7^2$
Residua	$1, 1$	$1, 3, 1$	$1, 5, 1$	$1, 7, 1$
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 2$	$n = 2$

nullo ergo casu erit $n = \mu$, sed tribus $n = \frac{1}{2}\mu$, et uno casu $n = \frac{1}{4}\mu$.

233. Si divisor sit $d = 9$, erit $\mu = 6$ totidemque casus

	$b = 1$	$b = 2$	$b = 4$
Prog. geom.	$1, 1$	$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$	$1, 4, 4^2, 4^3$
Residua	$1, 1$	$1, 2, 4, 8, 7, 5, 1$	$1, 4, 7, 1$
	$n = 1$	$n = 6$	$n = 3$

	$b = 5$	$b = 7$	$b = 8$
Progr. geom.	$1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6$	$1, 7, 7^2, 7^3$	$1, 8, 8^2$
Residua	$1, 5, 7, 8, 4, 2, 1$	$1, 7, 4, 1$	$1, 8, 1$
	$n = 6$	$n = 3$	$n = 2$

234. Si sit divisor $d = 10$, erit $\mu = 4$

	$b = 1$	$b = 3$	$b = 7$	$b = 9$
Progr. geom.	$1, 1$	$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$	$1, 7, 7^2, 7^3, 7^4$	$1, 9, 9^2$
Residua	$1, 1$	$1, 3, 9, 7, 1$	$1, 7, 9, 3, 1$	$1, 9, 1$
	$n = 1$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 2$

235. Sit $d = 11$, erit $\mu = 10$ totidemque casus

	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$
Progr. geom.	$1, 1$	$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$	$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$
Residua	$1, 1$	$1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1$	$1, 3, 9, 5, 4, 1$
	$n = 1$	$n = 10$	$n = 5$

	$b = 4$	$b = 5$
Progr. geom.	$1,\ 4,\ 4^2,\ 4^3,\ 4^4,\ 4^5$	$1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5$
Residua	$1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ 1$	$1,\ 5,\ 3,\ 4,\ 9,\ 1$
	$n = 5$	$n = 5$

	$b = 6$	$b = 7$
Progr. geom.	$1,\ 6,\ 6^2,\ 6^3,\ 6^4,\ 6^5,\ 6^6,\ 6^7,\ 6^8,\ 6^9,\ 6^{10}$	$1,\ 7,\ 7^2,\ 7^3,\ 7^4,\ 7^5,\ 7^6,\ 7^7,\ 7^8,\ 7^9,\ 7^{10}$
Residua	$1,\ 6,\ 3,\ 7,\ 9,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$	$1,\ 7,\ 5,\ 2,\ 3,\ 10,\ 4,\ 6,\ 9,\ 8,\ 1$
	$n = 10$	$n = 10$

	$b = 8$
Progr. geom.	$1,\ 8,\ 8^2,\ 8^3,\ 8^4,\ 8^5,\ 8^6,\ 8^7,\ 8^8,\ 8^9,\ 8^{10}$
Residua	$1,\ 8,\ 9,\ 6,\ 4,\ 10,\ 3,\ 2,\ 5,\ 7,\ 1$
	$n = 10$

	$b = 9$	$b = 10$
Progr. geom.	$1,\ 9,\ 9^2,\ 9^3,\ 9^4,\ 9^5$	$1,\ 10,\ 10^2$
Residua	$1,\ 9,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1$	$1,\ 10,\ 1$
	$n = 5$	$n = 2$

236. Sit $d = 12$, erit $\mu = 4$ totidemque casus

	$b = 1$	$b = 5$	$b = 7$	$b = 11$
Progr. geom.	$1,\ 1$	$1,\ 5,\ 5^2$	$1,\ 7,\ 7^2$	$1,\ 11,\ 11^2$
Residua	$1,\ 1$	$1,\ 5,\ 1$	$1,\ 7,\ 1$	$1,\ 11,\ 1$
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 2$	$n = 2$

hic ergo semper est $n < \mu$, tribus casibus scilicet $n = \frac{1}{2}\mu$, et uno $n = \frac{1}{4}\mu$.

237. Si sit divisor $d = 13$, erit $\mu = 12$, et pro minima potestate b^n, quae per 13 divisa relinquit unitatem, reperitur

$$\text{si } b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$$
$$\text{est } n = 1,\ 12,\ 3,\ 6,\ 4,\ 12,\ 12,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12,\ 2.$$

238. Quemadmodum semper si $b = 1$ fit $n = 1$, quicunque fuerit divisor d, ita etiam sumto $b = d - 1$, fit $n = 2$, seu $(d-1)^2$ per d divisum relinquit unitatem, quod in potestate prima nunquam contingit. De reliquis autem valoribus pro b assumtis difficilius est judicium.

239. Quoniam potestas $(kd + 1)^n$ per d divisa relinquit 1, si fuerit $kd + 1 = bc$, et potestas b^n per d divisa relinquat etiam unitatem, tum quoque potestas c^n unitatem relinquet. Cum enim b^n relinquat 1, productum $b^n c^n$ relinquet c^n, ac per hypothesin $b^n c^n$ relinquit 1; ergo in aestimatione residuorum c^n aequivalet unitati, seu c^n per d divisum unitatem relinquet.

240. Quare si b^n fuerit minima potestas per d divisa unitatem relinquens, sitque $bc = kd + 1$, minima potestas ipsius c unitatem relinquens vel erit c^n, vel adhuc minor, exponente existente parte

aliquota ipsius n. At si minor potestas ipsius c, puta $c^{\frac{n}{\nu}}$, relinqueret unitatem, etiam talis potestas ipsius b relinqueret unitatem, quod cum sit contra hypothesin, sequitur, si b^n fuerit minima potestas unitatem relinquens, etiam c^n fore minimam potestatem 1 relinquentem.

241. Ita posito $d=13$, quia 5^4 est minima potestas unitatem relinquens, si sit $5c=13k+1$, erit quoque c^4 minima potestas unitatem relinquens. Verum ut fiat $13k+1$ per 5 divisibile, sumi debet $k=5\lambda-2$, eritque $c=13\lambda-5$, cujus minimus valor est $c=8$, ita ut etiam 8^4 sit minima potestas per 13 divisa unitatem relinquens.

242. Quicunque autem fuerit numerus b minor quam d ad eumque primus, semper quoque dabitur numerus c, etiam minor quam d ad eumque primus, ut sit $bc=kd+1$, neque plures. Si enim duo dentur, ut esset tam $bc=kd+1$, quam $be=ld+1$, foret $bc-be=b(c-e)$ per d divisibile, unde ob b et d primos, esset $c-e$ per d divisibile, quod cum c et e sint minores quam d, fieri nequit, nisi sit $e=c$. Hoc autem evenire potest, ut fiat $c=b$, quod semper contingit, si sit vel $b=1$, vel $b=d-1$.

Caput VIII.

De potestatibus numerorum, quae per numeros primos divisae, unitatem relinquunt.

243. Quodcunque residuum potestas a^n per numerum d divisa relinquit, idem etiam relinquent omnes potestates ejusdem exponentis $(a+\lambda d)^n$, atque si n fuerit numerus par, idem residuum relinquet etiam potestas $(\lambda d-a)^n$, unde judicium residuorum ad numeros a divisore d minores revocatur.

244. Sit jam divisor d numerus primus quicunque, et quia binarius nullam habet difficultatem, ponatur $d=2p+1$, eritque $2p$ multitudo numerorum ipso d minorum ad eumque primorum. Jam si a sit numerus quicunque ad d primus, quod fit dummodo a non sit d ejusve multiplum, vidimus ejus potestatem a^{2p} per $d=2p+1$ divisam semper unitatem relinquere.

245. Saepe autem evenire potest, ut etiam potestas inferior a^n, existente $n<2p$, per eundem numerum $d=2p+1$ divisa unitatem relinquat; tum autem exponens n certo est pars aliquota ipsius $2p$. Quod ergo si evenit, non solum formula $a^{2p}-1$, sed etiam formula a^n-1 per numerum primum $2p+1$ erit divisibilis.

246. Quod si ergo formula a^n-1 fuerit divisibilis per numerum primum $2p+1$, erit etiam formula $a^{mn}-1$ divisibilis, unde cum formula $a^{2p}-1$ certo sit etiam per $2p+1$ divisibilis, erit etiam differentia $a^{mn}-a^{2p}$, seu $a^{2p}(a^{mn-2p}-1)$ divisibilis; quare cum factor a^{2p} divisionen non admittat, alter $a^{mn-2p}-1$ divisibilis sit necesse est, quicunque numerus pro m sumatur.

247. Sit λ maximus communis divisor numerorum n et $2p$; ac si formula a^n-1 fuerit divisibilis per numerum primum $2p+1$, etiam haec formula $a^\lambda-1$ per $2p+1$ erit divisibilis. Sit enim $n=\alpha\lambda$ et $2p=\beta\lambda$, ut α et β sint numeri primi inter se, et quoniam tam $a^{\alpha\lambda}-1$ quam $a^{\beta\lambda}-1$ sunt multipla ipsius $2p+1$, etiam hae formulae $a^{\mu\alpha\lambda}-1$ et $a^{\nu\beta\lambda}-1$ erunt multipla. At ob α et β numeros primos, μ et ν ita accipi possunt, ut fiat $\mu\alpha=\nu\beta+1$, unde differentia erit

$a^{\nu\beta\lambda+\lambda} - a^{\nu\beta\lambda} = a^{\nu\beta\lambda}(a^\lambda - 1)$, quae cum sit divisibilis per $2p+1$, necesse est sit $a^\lambda - 1$ per $2p+1$ divisibile.

248. Si ergo n sit numerus ad $2p$ primus, forma $a^n - 1$ divisibilis esse nequit per numerum primum $2p+1$, nisi sit $a-1$ per eundem divisibile. Unde si $a-1$ non sit multiplum numeri primi $2p+1$, formula $a^n - 1$ per eum divisibilis esse nequit, nisi n et $2p$ sint numeri inter se compositi, quorum si maximus communis divisor sit λ, adeo haec formula $a^\lambda - 1$ per $2p+1$ erit divisibilis.

249. Si igitur a^n fuerit minima potestas ipsius a, quae per numerum primum $2p+1$ divisa unitatem relinquit, tum certe est n pars aliquota numeri $2p$. Tum autem si fuerit $ab = k(2p+1)+1$, erit etiam b^n minima potestas ipsius b, quae per $2p+1$ divisa unitatem relinquit.

250. Si n sit numerus primus et formula $a^n - 1$ divisibilis per numerum primum $2p+1$, vel erit n pars aliquota ipsius $2p$ (quia alius communis divisor locum non habet), vel si fuerit ad $2p$ primus, numerus $a-1$ per $2p+1$ erit divisibilis. Quare praeter divisores ipsius $a-1$ formula $a^n - 1$ alios divisores primos non admittit, nisi hujusmodi formae $2p+1$, ut $2p$ sit multiplum ipsius n. Unde omnes ejus divisores primi in hac forma $2mn+1$ continebuntur.

251. Quare haec forma $a^3 - 1$ praeter divisorem $a-1$ alios divisores primos non admittit nisi formae $6m+1$, qui sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc. Cum ergo $aa+a+1$ sit factor ipsius $a^3 - 1$, etiam is per nullos alios numeros primos est divisibilis.

252. Simili modo forma $a^5 - 1$ praeter divisorem $a-1$ alios non habet, nisi qui in forma $10m+1$ contineantur, quales sunt 11, 31, 41, 61, 71 etc. Quare etiam tales numeri

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1,$$

nisi sint primi, alios divisores non admittunt.

253. Quoniam numeri perfecti inveniuntur, quoties formula $2^n - 1$ est numerus primus, primum patet hoc evenire non posse, nisi n sit numerus primus. At si n fuerit talis, formula $2^n - 1$ certe alios non habet divisores nisi formae $2mn+1$, unde exploratio utrum sit primus, nec ne? faciliori negotio absolvitur.

254. Cum $a^{2p} - 1$ semper sit divisibile per numerum primum $2p+1$, illa autem forma constet factoribus $a^p - 1$ et $a^p + 1$, necesse est ut alteruter per $2p+1$ sit divisibilis. Vidimus autem, si sit $a = ee \pm \lambda(2p+1)$, fore $a^p - 1$ divisibilem; his ergo casibus formula $a^p + 1$ per $2p+1$ certe non est divisibilis.

255. Hic quaestio oritur, num forte semper formula $a^p - 1$ per $2p+1$ sit divisibilis? ideoque nunquam altera $a^p + 1$, quod casu, quo p est numerus impar, statim negandum esse patet. Quia enim tum $a^p + 1$ factorem habet $a+1$, ista formula sumto $a = 2p$ manifesto per $2p+1$ fit divisibilis.

256. In genere autem sequenti modo ostendi potest formulam $a^n - 1$, existente $n < 2p$, non semper divisibilem esse per numerum primum $2p+1$, sed dari utique ejusmodi numeros pro a adhibendos, quibus divisio formulae $a^n - 1$ non succedat, quod per deductionem ad absurdum sic commodissime demonstrabitur.

257. Qui enim hoc negaverit, affirmare debet omnes has formulas 1^n-1, 2^n-1, 3^n-1, 4^n-1, $5^n-1, \ldots n^n-1$ per $2p+1$ esse divisibiles, ideoque etiam earum differentias tam primas 2^n-1, 3^n-2^n, 4^n-3^n, 5^n-4^n, etc. quam secundas $3^n-2.2^n+1^n$, $4^n-2\,3^n+2^n$, $5^n-2.4^n+3^n$, etc. et sequentes omnes.

258. Differentiae autem ordine n sunt constantes, quae si littera N indicentur, ita exprimuntur ut sit $N=(n+1)^n-n.n^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^n-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-2)^n+$ etc. cujus expressionis valores pro variis valoribus ipsius n facile colliguntur:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n=1 & \text{est} & N=2-1=1 \\ n=2 & & N=3^2-2.2^2+1=2=1.2 \\ n=3 & & N=4^3-3.3^3+3.2^3-1=6=1.2.3 \\ n=4 & & N=5^4-4.4^4+6.3^4-4.2^4+1=24=1.2.3.4 \end{array}$$

etc.

259. Ad quod clarius ostendendum sit, pro n scribendo $n+1$,

$$P=(n+2)^{n+1}-(n+1)\,(n+1)^{n+1}+\frac{(n+1)n}{1.2}n^{n+1}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-1)^{n+1}+\text{ etc.}$$

et a termino anteriori incipiendo

$$P=(n+1)^{n+1}-(n+1)\,n^{n+1}+\frac{(n+1)n}{1.2}(n-1)^{n+1}-\text{ etc.}$$

At valor ipsius N ita repraesentari potest

$$N=(n+1)^n-n^{n+1}+\frac{n}{1.2}(n-1)^{n+1}-\frac{n(n-1)}{1.2.3}(n-2)^{n+1}+\text{ etc.}$$

quae per $n+1$ multiplicata praebet valorem ipsius P, ita ut sit $P=(n+1)\,N$.

260. Cum igitur casu $n=1$ sit $N=1$, casu $n=2$ erit $N=1.2$, casu $n=3$ erit $N=1.2.3$, et in genere pro numero quocunque n erit $N=1.2.3\ldots.n$. At haec differentia ordinis n non est divisibilis per numerum primum $2p+1$, ob $n<2p$, unde sequitur non omnes terminos seriei § 257 expositae per eum esse divisibiles.

261. Sit $6p+1$ numerus primus, et cum forma $a^{6p}-1$ per eum sit divisibilis, nisi a ejus sit multiplum, dabuntur casus, quibus etiam $a^{2p}-1$ per eum dividi poterit, scilicet sumto $a=e^3\pm\lambda\,(6p+1)$. Tum vero etiam dantur casus, quibus formula $a^{2p}-1$ non erit divisibilis per istum numerum primum $6p+1$, uti ex demonstratione modo allata patet.

262. Çum ante ostenderimus formulam $a^{3p}-1$ fore per $6p+1$ divisibilem, si fuerit

$$a=cc\pm\lambda\,(6p+1),$$

nunc colligere licet, si numerus a simul in hac forma $cc\pm\lambda\,(6p+1)$ et in hac $c^3\pm\lambda\,(6p+1)$ contineatur, tum etiam formulam a^p-1 per $6p+1$ fore divisibilem, id quod quoque continget si fuerit $a=c^6\pm\lambda\,(6p+1)$.

263. Si sit $4p+1$ numerus primus, ut $a^{4p}-1$ per eum sit divisibile, tum adeo a^p-1 per eum dividi poterit, si fuerit $a=c^4\pm\lambda\,(4p+1)$. Dantur vero etiam casus, quibus formula a^p-1 divisionem non admittet: iis ergo vel a^p+1, vel $a^{2p}+1$ certe per $4p+1$ erit divisibile.

Caput IX.

De divisoribus numerorum formae $a^n \pm b^n$.

264. Posito $2p+1$ numero primo, dum a et b ejus non sint multipla, tam haec formula $a^{2p}-1$ quam ista $b^{2p}-1$ per eum erit divisibilis; ideoque etiam earum differentia $a^{2p}-b^{2p}$ semper per numerum primum $2p+1$ divisionem admittet.

265. Ponamus jam numerum a^n-b^n divisibilem esse per numerum primum $2p+1$, et ut exploremus, quomodo hoc fieri possit, ponamus φ esse maximum communem divisorem numerorum n et $2p$, ita ut posito $n=\alpha\varphi$ et $2p=\beta\varphi$, numeri α et β futuri sint primi inter se.

266. Cum autem α et β sint numeri primi inter se, fieri potest $\mu\alpha=\nu\beta+1$. Quare cum $a^{\alpha\varphi}-b^{\alpha\varphi}$ per $2p+1$ sit divisibilis, etiam $a^{\mu\alpha\varphi}-b^{\mu\alpha\varphi}$, hoc est $a^{(\nu\beta+1)\varphi}-b^{(\nu\beta+1)\varphi}$ erit divisibilis, tum vero ob $a^{\beta\varphi}-b^{\beta\varphi}$, quoque hic numerus $a^{\nu\beta\varphi}-b^{\nu\beta\varphi}$, nec non idem per a^{φ} multiplicatus, scilicet $a^{(\nu\beta+1)\varphi}-a^{\varphi}b^{\nu\beta\varphi}$.

267. Auferatur haec posterior forma a praecedente, et differentia $a^{\varphi}b^{\nu\beta\varphi}-b^{(\nu\beta+1)\varphi}=b^{\nu\beta\varphi}(a^{\varphi}-b^{\varphi})$ divisibilis erit per numerum primum $2p+1$. At $b^{\nu\beta\varphi}$ per eum non est divisibilis, ergo alter factor $a^{\varphi}-b^{\varphi}$ divisibilis sit necesse est.

268. Quare si numerus a^n-b^n divisibilis sit per numerum primum $2p+1$, fueritque φ maximus communis divisor numerorum n et $2p$, etiam hic numerus $a^{\varphi}-b^{\varphi}$ per $2p+1$ divisibilis erit, et nisi posterior divisionem admittat, ne prior quidem admittet.

269. Quodsi ergo n et $2p$ fuerint numeri inter se primi, seu unitas maximus eorum communis divisor, nisi $a-b$ sit divisibile per $2p+1$, etiam a^n-b^n per hunc numerum primum divisionem non admittet.

270. Divisores ergo primos numeri a^n-b^n investigaturi, praeter divisores ipsius $a-b$, qui sponte se offerunt, reliquos quaerere debemus inter eos numeros primos $2p+1$, in quibus $2p$ ad n non est primus, sed compositus.

271. Unde si n sit numerus primus, omnes divisores numeri a^n-b^n praeter eos, quos $a-b$ continet, tantum inter numeros primos hujus formae $\lambda n+1$ quaerere debemus, siquidem a et b sint numeri primi inter se, quam conditionem adjici debere manifestum est.

272. Pro variis ergo valoribus ipsius n divisores primi formae a^n-b^n praeter $a-b$ quaeri debent, ut sequitur: (*)

formae	divisores quaeri debent inter hos numeros primos:
a^2-b^2	$2\lambda+1$ . . . 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, nullis exclusis
a^3-b^3	$3\lambda+1$ . . . 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, etc.
a^5-b^5	$5\lambda+1$ . . . 11, 31, 41, 61, 71, 101, etc.
a^7-b^7	$7\lambda+1$ . . . 29, 43, 71, 113, 127, etc.
$a^{11}-b^{11}$	$11\lambda+1$ . . . 23, 67, 89, 199, 331, etc.

etc.

(*) *Script. ad marg.* 1. Ad divisores formae a^n-b^n etiam accedere potest ipse numerus n. 2. Ex a^3-b^3 sequitur numerum $aa+ab+bb$ alios divisores habere non posse nisi $3\lambda+1$; ergo $3\lambda-1$ certe non sunt divisores.

273. Si n non sit numerus primus, sed productum duorum primorum, puta $n=\alpha\beta$, divisores primi formae $a^{\alpha\beta}-b^{\alpha\beta}$ praeter $a-b$ continentur in forma $2p+1$, existente $2p$ ad $\alpha\beta$ non primo, unde, prout vel α, vel β, vel adeo $\alpha\beta$ fuerit maximus communis divisor, forma divisorum primorum erit vel $\lambda\alpha+1$, vel $\lambda\beta+1$, vel $\lambda\alpha\beta+1$, in quarum prima λ non debet continere β, in secunda autem non α, in tertia vero non limitatur.

274. At divisores formae $\lambda\alpha+1$ simul divident $a^{\alpha}-b^{\alpha}$, et divisores formae $\lambda\beta+1$ simul hanc $a^{\beta}-b^{\beta}$, siquidem in priore λ sit numerus primus ad β, in posteriori autem ad α.

275. Quare si formulae $a^{\alpha\beta}-b^{\alpha\beta}$ ii tantum divisores desiderentur, qui non simul dividant vel $a^{\alpha}-b^{\alpha}$, vel $a^{\beta}-b^{\beta}$, ii quaeri debent inter numeros primos formae $\lambda\alpha\beta+1$; sin autem tantum divisores formae $a^{\alpha}-b^{\alpha}$ excludere velimus, reliquos inter numeros primos $\lambda\beta+1$ quaerere debemus.

276. Sit $\alpha=2$ et $\beta=2$, atque omnes divisores primi hujus numeri a^4-b^4, qui non simul dividant a^2-b^2, continebuntur in forma $4\lambda+1$; hique ergo divisores erunt numeri a^2+b^2; unde patet numeros formae a^2+b^2 alios divisores primos non admittere, nisi qui sint formae $4\lambda+1$.

277. Sit $\alpha=3$ et $\beta=2$, atque omnes divisores primi numerorum a^6-b^6, qui non simul dividant a^3-b^3, continentur in forma $2\lambda+1$; qui autem insuper quoque non a^2-b^2 dividant, in hac $6\lambda+1$; hi ergo erunt divisores formae a^2-ab+b^2, neque tales numeri alios divisores agnoscunt.

278. Ex his in genere colligimus, si definiendi sint divisores numeri $a^{2m}-b^{2m}$, qui non simul sint divisores numeri a^m-b^m; hoc est, si desiderentur divisores numeri a^m+b^m, eos inter numeros primos hujus formae $2\lambda m+1$ quaeri oportere. Hinc autem excluditur divisor $a+b$, si m sit numerus impar.

279. Ita pro variis valoribus ipsius m faciamus hanc tabulam:

Numerorum formae	divisores quaeri debent inter numeros primos formae
a^2+b^2	$4\lambda+1$ qui sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97
a^3+b^3	$6\lambda+1$.........7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97
a^4+b^4	$8\lambda+1$.........17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193
a^5+b^5	$10\lambda+1$........11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, 151, 181
a^6+b^6	$12\lambda+1$.........13, 37, 61, 73, 97, 109, 157, 181, 193
a^7+b^7	$14\lambda+1$.........29, 43, 71, 113, 127, 197, 211, 239
a^8+b^8	$16\lambda+1$.........17, 97, 113, 193, 241, 257, 337

etc.

hic casus, ubi exponens est potestas binarii, prae reliquis sunt notandi, quia in reliquis generatim divisores assignari possunt. Tales ergo numeri $a^{2^n}+b^{2^n}$ alios divisores primos non habent, nisi qui in forma $2^{n+1}\lambda+1$ contineantur.

280. At a^n-b^n dividi poterit per numerum primum $mn+1$, si numeri a et b ita fuerint comparati, ut ax^m-by^m fiat divisibile per $mn+1$; dum scilicet pro x et y numeri assignari queant, quibus ista conditio adimpleatur, tum certe a^n-b^n per $mn+1$ erit divisibile.

281. Si enim $ax^m - by^m$ sit divisibile per $mn+1$, tum etiam $a^n x^{mn} - b^n y^{mn}$ erit divisibile. At semper divisibilis est haec forma $x^{mn} - y^{mn}$, ideoque etiam ista $a^n x^{mn} - a^n y^{mn}$, quamobrem etiam differentia $a^n y^{mn} - b^n y^{mn}$, ac proinde $a^n - b^n$ per numerum primum $mn+1$ divisibile erit.

282. Si ergo pro a et b ejusmodi numeri assumantur, ut $a^n - b^n$ non sit divisibilis per numerum quempiam primum $mn+1$, tum nulli numeri pro x et y assignari poterunt, ut $ax^m - by^m$ per eundem numerum primum $mn+1$ divisionem admittat, nisi quidem uterque numerus x et y sit ejusdem multiplum, statuuntur autem x et y primi inter se.

283. Sic cum $2^2 - 1$ tantum per 3 sit divisibile, fueritque $2m+1$ numerus primus, tum nisi sit $m=1$, nullus numerus in hac forma contentus $2x^m - y^m$ per illum numerum primum $2m+1$ dividi poterit:

ita posito	nullus numerus	divisibilis erit per
$m=2$	$2x^2 - y^2$	5
$m=3$	$2x^3 - y^3$	7
$m=5$	$2x^5 - y^5$	11
$m=6$	$2x^6 - y^6$	13
	etc.	

Caput X.

De residuis ex divisione quadratorum per numeros primos ortis.

284. Quod residuum relinquitur, si quadratum a^2 per numerum quemvis d dividatur, idem quoque relinquitur, si haec infinita quadrata $(nd \pm a)^2$ per eundem numerum d dividantur.

285. Quare si residua examinare velimus, quae divisione numerorum quadratorum per datum numerum d relinquuntur, sufficiet quadrata considerasse, quorum radices sint ipso hoc divisore d minores, ideoque haec

$$1,\ 4,\ 9,\ 16 \ldots\ldots (d-4)^2,\ (d-3)^2,\ (d-2)^2,\ (d-1)^2,$$

quorum numerus est $d-1$.

286. At quadrata extrema 1 et $(d-1)^2$, et quaevis bina, ab extremis aeque remota, paria dant residua; unde si $d-1$ sit numerus par, plura residua diversa resultare nequeunt, quam $\frac{1}{2}(d-1)$, et si $d-1$ est numerus impar, ob unum in medio positum, quam $\frac{1}{2}d$.

287. Sit jam d numerus primus, et quia binarii judicium in promtu est, ponatur $d=2p+1$, cum nunc omnia residua ex his quadratis resultent $1,\ 4,\ 9, \ldots (p-2)^2,\ (p-1)^2,\ p^2$, eorum numerus major esse nequit quam p, unde manifestum est non omnes numeros ipso $d=2p+1$ minores, quorum multitudo est $2p$, inter residua occurrere, sed ad minimum eorum semissem excludi.

288. Primum autem dico, omnia residua ex his quadratis $1,\ 4,\ 9 \ldots p^2$ oriunda inter se esse inaequalia; si enim duo quadrata ipso p^2 non majora, puta m^2 et n^2, idem darent residuum, eorum differentia $m^2 - n^2$, ideoque vel $m-n$, vel $m+n$ per divisorem primum $d=2p+1$ esset divisibilis, quod, cum, ob $m < \frac{1}{2}d$ et $n < \frac{1}{2}d$, sit $m+n$ minus quam d, fieri nequit.

289. Cum igitur omnia residua, ex divisione quadratorum 1, 4, 9...p^2 per numerum primum $d = 2p + 1$ orta, sint inaequalia, ea ita repraesentemus:

radices	1	2	3	4	5	6......p
quadrata	1	4	9	16	25	36......p^2
residua	1	α	β	γ	δ	ε......π

et multitudo horum residuorum erit $= p$.

290. Cum jam multitudo omnium numerorum ipso divisore $2p + 1$ minorum, qui simul ad eum sunt primi, sit $= 2p$, patet horum numerorum semissem ex ordine residuorum excludi, quos ideo *non-residua* appellemus. Erit ergo multitudo non-residuorum pariter $= p$, quae litteris germanicis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. indicemus.

291. Si ergo pro quovis divisore primo $2p + 1$ haec non-residua invenerimus, affirmare poterimus, nullum dari numerum quadratum xx, ita ut $xx - \mathfrak{A}$ esset per $2p + 1$ divisibile, denotante $\mathfrak{A}$ non-residuum quodcunque. Ac tales formulae $xx - \mathfrak{A}$ per $2p + 1$ individuae tot semper exhiberi possunt, quot p continet unitates.

292. Pro quovis ergo divisore primo $2p+1$ numeri ipso minores distinguuntur in duas classes, quarum altera residua, altera vero non-residua complectitur, et utraque totidem continet numeros, ita ut quasi cuivis residuo suum respondeat non-residuum. Indolem ergo harum duarum classium accuratius scrutari conveniet.

293. Si in ordine residuorum occurrant duo numeri m et n, in eodem quoque occurret eorum productum mn, seu residuum ei aequivalens. Oriatur enim residuum m ex quadrato a^2 et n ex b^2, atque ex producto a^2b^2, quod pariter est quadratum, orietur residuum mn.

294. Si ergo inter residua sit numerus quicunque m, ibidem quoque reperientur omnes ejus potestates m^2, m^3, m^4, etc., vel residua iis aequivalentia. Tum vero si praeterea adsit numerus n, in eodem residuorum ordine quoque aderunt numeri mn, m^2n, mn^2 et in genere $m^\mu n^\nu$.

295. Ordo ergo residuorum 1, α, β, γ....π, pro quovis divisore primo $2p + 1$, hanc insignem habet proprietatem, ut in eodem quoque producta ex binis pluribusve terminis quibuscunque occurrant, siquidem secundum indolem residuorum ad minimos valores revocentur.

296. Hoc eo magis est notatu dignum, quod ordo residuorum determinato terminorum numero constat, quorum scilicet numerus tantum sit $= p$, exclusis totidem numeris non-residuis. Hoc tamen non obstante, quomodocunque residua per multiplicationem inter se combinentur, tamen perpetuo numeri in eodem ordine jam contenti occurrunt.

297. Sit m numerus quicunque in ordine residuorum occurrens, divisore primo existente $2p + 1$, ac supra vidimus, si termini progressionis geometricae 1, m, m^2, m^3, m^4, etc. per $2p + 1$ dividantur, inter residua quoque omnia producta ex binis contineri; sicque in residuis harum potestatum nulli occurrent numeri, qui non simul in residuis quadratorum reperiantur.

298. Cum igitur multitudo residuorum, ex potestatibus oriundorum, superare nequeat multitudinem ex quadratis ortorum, quae est $= p$, manifestum est vel potestatem m^p, vel adhuc inferiorem residuum

praebere $=1$. Quod quidem jam ostendimus, nam si m ex quadrato aa oriatur, erit $m = aa - k(2p+1)$; et $m^p - 1$ manifesto per numerum primum $2p+1$ est divisibile.

299. Sed ad residua quadratorum revertentes notemus, si ibi occurrant numeri m et mn, tum etiam necessario ibidem numerum n reperiri debere. Si enim residuum m oriatur ex quadrato aa, et mn ex quadrato bb, ex naa quoque residuum mn nascetur, unde $bb - naa$ per $2p+1$ erit divisibile, existentibus a et b ad $2p+1$ primis.

300. At si $bb - naa$ divisibile est per $2p+1$, etiam $(b + k(2p+1))^2 - naa$ erit divisibile. Semper autem k ita assumere licet, ut fiat $b + k(2p+1) = ac$, seu ut $k(2p+1)$ per a divisum relinquat b. Dabitur ergo numerus c, ut sit $aacc - naa$, hoc est $cc - n$ per $2p+1$ divisibile, quare quadratum cc dabit residuum n.

301. Si in ordine residuorum sit numerus α, non-residuorum vero numerus $\mathfrak{A}$, productum $\alpha\mathfrak{A}$ in ordine non-residuorum certe reperietur. Si enim in ordine residuorum esset, ibidem quoque foret $\mathfrak{A}$, contra hypothesin.

302. Si in ordine residuorum occurrat productum mn, ejusque alter factor m in ordine non-residuorum, alter quoque n certo in eodem ordine non-residuorum reperietur; si enim hic n esset in residuis, eodem quoque m pertineret.

303. Si duo non-residua $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ in se ducantur, productum incidet in ordinem residuorum. Nam cum in ordine residuorum omnia quadrata occurrant, primo evidens est omnia quadrata $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$, etc. ibi esse; quod vero etiam producta binorum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ibidem reperiantur, ulteriori indiget probatione jam instituenda.

304. Cognitis residuis $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc., quorum numerus est $= p$, divisore primo existente $2p+1$, non-residua quidem eo ipso dantur, cum sint reliqui numeri minores quam $2p+1$, quorum numerus itidem est $= p$. At dato uno non-residuo $\mathfrak{A}$, reliqua omnia ex ipsis residuis ita determinantur, ut sint $\mathfrak{A}, \alpha\mathfrak{A}, \beta\mathfrak{A}, \gamma\mathfrak{A}$, etc., reductione scilicet ad minimos terminos facta. Sunt enim hi numeri inaequales inter se, et eorum multitudo $= p$.

305. Duo igitur quaecunque non-residua $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ spectari possunt tanquam hujusmodi producta $\delta\mathfrak{A}$ et $\varepsilon\mathfrak{A}$, existentibus δ et ε residuis, $\mathfrak{A}$ vero non-residuo; unde productum duorum quorumvis non-residuorum erit $\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \delta\varepsilon\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, ubi $\delta\varepsilon$ utpote productum duorum residuorum in ordine residuorum reperitur.

306. Tum vero in ordine residuorum occurrit etiam $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, quia in eo omnia plane quadrata, seu residua aequivalentia reperiuntur. Quare cum tam $\delta\varepsilon$ quam $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ sit residuum, eorum productum quoque $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ residuum sit necesse est, sicque productum duorum quorumvis non-residuorum certe in ordine residuorum continetur.

307. Combinatio ergo duorum numerorum pro indole residuorum et non-residuorum ita se habet:

1. Productum ex duobus residuis est residuum.
2. Productum ex residuo et non-residuo est non-residuum.
3. Productum ex duobus non-residuis est residuum.

308. Non mediocriter haec illustrabuntur, si residua et non-residua ex divisione quadratorum per numeros primos contemplemur:

divisor	3	5	7	11
residua	1	1, 4	1, 4, 2	1, 4, 9, 5, 3
non-residua	2	2, 3	3, 5, 6	2, 6, 7, 8, 10

divisor	13	17
residua	1, 4, 9, 3, 12, 10	1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13
non-residua	2, 5, 6, 7, 8, 11	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

divisor	19	23
residua	1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5	1, 4, 9, 16, 2, 13, 3, 18, 11, 8, 6
non-residua	2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18	5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22

divisor	29
residua	1, 4, 9, 16, 25, 7, 20, 6, 23, 13, 5, 28, 24, 22
non-residua	2, 3, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 26, 27(*).

309. *Complementum* residui vocemus numerum, qui cum residuo faciat divisorem; ita si divisore existente $=d$, sit quodpiam residuum $=r$, ejus complementum erit $d-r$.

310. Si cujuspiam residui complementum occurrat in ordine residuorum, etiam omnium residuorum complementa ibidem occurrent. Nam si in ordine residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrat $d-\alpha$, divisore existente d, hoc residuum $d-\alpha$ etiam per $-\alpha=-1.\alpha$ repraesentari potest, quare cum tam α quam productum $-1.\alpha$ sit residuum, etiam -1 erit residuum, ideoque etiam $-\beta, -\gamma, -\delta$, etc. quibus aequivalent complementa reliquorum residuorum.

311. In serie ergo residuorum vel nullius, vel omnium complementa occurrent. Ex superioribus exemplis patet, si divisor sit vel 3, vel 7, vel 11, vel 19, vel 23, nullius residui complementum in residuis reperiri, sed ea esse non-residua. Sin autem divisor sit 5, vel 13, vel 17, vel 29, in ordine residuorum quoque singulorum complementa inveniri.

312. Si divisor sit $2p+1$ primus, atque in residuis quoque singulorum complementa occurrant, quoniam bina ita inter se cohaerent, ut alterum alterius sit complementum, neque idem sui ipsius complementum esse potest, ob $2p+1$ semissem non admittentem, numerus residuorum necessario erit par.

313. Cum igitur numerus residuorum sit $=p$, nisi p sit numerus par, fieri nequit, ut residuorum complementa sint etiam residua. Quare si p sit numerus impar, certum est nullius residui complementum in ordine residuorum contineri, ideoque omnium residuorum complementa ordinem non-residuorum constituent.

314. Sit igitur p numerus impar $=2q-1$, ut divisor primus sit $4q-1$, atque omnium residuorum complementa erunt non-residua. Ita si quodpiam residuum sit α, ejus complementum

(*) *Script. ad marg.* Divisor: 59. Residua: 1, −2, 3, 4, 5, −6, 7, −8, 9, −10, −11, 12, −13, −14, 15, 16, 17, −18, 19, 20, 21, 22, −23, −24, 25, 26, 27, 28, 29. Ergo si $4n-1$ est primus, vel $xx+myy$, vel talis forma $xx-myy$ per eum est divisibilis.

$4q-1-\alpha$ erit non-residuum, seu nullum datur quadratum, quod per $4q-1$ divisum, relinquat $4q-1-\alpha$.

315. Cum igitur α quodcunque quadratum denotare possit, puta nn, nullum datur quadratum, quod numero $4q-1-nn$ minutum, per $4q-1$ dividi queat. Hinc $mm-(4q-1-nn)$, seu $mm+nn$ nunquam per numerum primum formae $4q-1$ divisibile existet, nisi forte uterque numerus m et n seorsim per eum sit divisibilis.

316. Demonstratum ergo est summam duorum quadratorum inter se primorum dividi non posse per ullum numerum primum hujus formae $4q-1$. Quodsi ergo talis binorum quadratorum summa habeat divisores primos, ii certo erunt hujus formae $4q+1$, remoto scilicet binario, qui etiam quandoque divisor esse potest, ambobus quadratis sumtis imparibus.

317. Quando residuorum complementa inter residua deprehenduntur, complementa non-residuorum etiam erunt non-residua; ac si unius residui complementum fuerit non-residuum, omnium residuorum complementa erunt non-residua, atque complementa omnium non-residuorum vicissim erunt residua.

318. Si divisore existente $2p+1$, sit p numerus par, his solis casibus evenire potest, ut residuorum complementa quoque sint residua; quod autem semper sint residua, hinc nondum est evictum. Ad hoc autem comparari debent haec residua cum residuis ex serie potestatum ortis, ab eodem divisore $2p+1$, si series potestatum ita fuerit comparata, ut multitudo residuorum aequalis sit multitudini non-residuorum.

319. Sit $1, a, a^2, a^3$, etc. hujusmodi series potestatum, quae p residua diversa praebeat, divisore existente primo $=2p+1$, ita ut omnia residua futura sint $1, a, a^2, a^3, \ldots a^{p-1}$, ipsas scilicet potestates tanquam residuis aequivalentes adhibendo. Non-residua autem sint totidem numero, ita expressa: $A, Aa, Aa^2, Aa^3, \ldots\ldots Aa^{p-1}$.

320. Hic jam residua, pariter ac residua quadratorum, ita sunt comparata, ut 1) ab unitate incipiant, 2) producta binorum residuorum quoque sint residua, 3) producta ex residuo et non-residuo inter non-residua occurrant, unde concludere licet producta ex binis non-residuis iterum in ordinem residuorum transire.

321. Si a^p-1 divisibile sit per $2p+1$, tum a certe est residuum quadratorum. Si enim esset non-residuum, omnia reliqua residua, quae sunt $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, etc. eandem haberent proprietatem, ideoque omnes numeri x ita essent comparati, ut x^p-1 per $2p+1$ dividi posset, quod est absurdum (*).

322. Cum enim in residuis quadratorum res ita se habeat, ubi numerus non-residuorum aequalis est numero residuorum, si in residuis potestatum secus eveniret, et producta ex binis non-residuis iterum darent non-residuum, multitudo non-residuorum superaret multitudinem residuorum, contra hypothesin.

323. Hoc autem firmius ita ostendi potest: Cum A quodvis non-residuum denotare possit, ac tum aliud quodvis non-residuum ita repraesentari possit, ut sit Aa^n, productum binorum non-

(*) Hic paragraphus in autographo margini adscriptus est.

residuorum erit AAa^n, quod si esset non-residuum, aequivaleret tali formae Aa^m, vel tali $Aa^{m+\nu p}$, ita ut m majus sit quam n, ideoque differentia $Aa^m - AAa^n$ foret per $2p+1$ divisibilis.

324. Cum autem neque A neque a^n per $2p+1$ dividi queat, foret $a^{m-n} - A$ per $2p+1$ divisibile, seu potestas a^{m-n} per $2p+1$ divisa relinqueret residuum A. Cum autem A non sit residuum, sequitur hanc hypothesin esse absurdam, ideoque productum duorum non-residuorum non in forma Aa^m, quae omnia non-residua complectitur, contineri, ideoque necessario inter residua occurrere debere.

325. Quare si a sit ejusmodi numerus, ut a^p sit minima potestas, quae per numerum primum $2p+1$ divisa, unitatem relinquat, ideoque ex divisione terminorum progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots a^{p-1}$ tot residua diversa oriantur, quot p continet unitates, totidemque dentur non-residua, certum est omnia producta binorum non-residuorum in ordine residuorum contineri.

326. Cum autem omnes numeri divisore $2p+1$ minores vel in residuis, vel in non-residuis contineantur, singulorum quadrata in ordine residuorum certo occurrent, quod cum etiam eveniat in residuis ex quadratis ortis, sequitur ambos ordines residuorum, tam ex quadratis quam ex superiori progressione geometrica ortos, plane inter se congruere.

327. Quodsi ergo pro divisore primo $2p+1$ sint residua ex quadratis orta $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., tum vero $\mathfrak{A}$ fuerit quodvis non-residuum, hic numerus $\mathfrak{A}$ etiam inter non-residua reperietur, quae progressioni geometricae $1, a, a^2, a^3, \ldots a^{p-1}$ respondent, si quidem a^p fuerit minima potestas unitatem pro residuo praebens.

328. Jam supra vidimus, si a fuerit residuum ex quadratis ortum, fore $a^p - 1$ certo per $2p+1$ divisibile; nunc autem patet, si a fuerit non-residuum respectu quadratorum, tum a^p non esse minimam potestatem ipsius a, quae per $2p+1$ divisa, unitatem relinquat. Ergo vel unitatem non relinquet, vel dabitur adhuc minor $a^{\frac{p}{\nu}}$, quae unitatem relinquet.

329. Si sit a ejusmodi numerus, ut potestas ejus a^p, per numerum primum $2p+1$ divisa, relinquat unitatem, tum a certe inter residua quadratorum continetur. Hoc evidens est, si a^p sit minima potestas istius indolis. Sin autem non sit minima, id eo magis verum esse videtur. Nam si detur minor, ex residuis illis, numero p, quaedam transeunt in ordinem non-residuorum. Si enim $a^{\frac{1}{2}p}$ sit minima, tum a adeo inter residua biquadratorum, sin $a^{\frac{1}{3}p}$, inter residua potestatum sextarum etc., ergo semper inter residua quadratorum continebitur.

330. Si ergo a fuerit non-residuum ratione quadratorum, tum $a^p - 1$ certe non est divisibile per $2p+1$, unde si a sit complementum cujuspiam residui, puta $a = d - \alpha$, ponendo $d = 2p+1$, tum $(d-\alpha)^p - 1$ non est divisibile per $2p+1$, at $\alpha^p - 1$ certe est divisibile, ob α residuum, unde differentia $(d-\alpha)^p - \alpha^p$ etiam non erit divisibilis.

331. At haec differentia esset divisibilis, si p esset numerus par, quare nisi p sit numerus impar, illa conditio, qua $(d-\alpha)^p - 1$ indivisibile per $2p+1$ assumsimus, hoc est qua $d-\alpha$ est non-residuum, subsistere nequit.

332. At si p sit numerus par, complementum cujuspiam residui α, puta $d-\alpha$, certe est residuum, propterea quod $(d-\alpha)^p - 1$ per $2p+1$ est divisibile; si enim esset non-residuum, haec divisibilitas locum habere non posset.

333. Si ergo sit $p = 2q$, numerusque primus divisor propositus $= 4q + 1$, tum inter residua quadratorum, etiam singulorum complementa deprehendentur, hoc est, si residua fuerint $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. etiam residua erunt $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma$, etc.

334. Pro quovis ergo quadratorum, ex hac progressione $1, 4, 9, 16 \ldots 4qq$ assumto, dabitur aliud, quod ad illud additum producit summam per $4q + 1$ divisibilem, seu cum multitudo horum quadratorum sit $= 2q$, et quodlibet habet quasi suum conjugatum, dabuntur q paria duorum quadratorum diversa, quorum summa sit per $4q + 1$ divisibilis. (*)

335. Et quia singula quadrata non superant $4qq$, binorum summa certe minor est quam $8qq$, unde si talis summa per $4q + 1$ dividatur, quotus certe erit minor quam $2q$. Hic autem quotus nisi sit $= 2$, etiam erit vel numerus primus formae $4n + 1$, vel talium aliquod productum (316).

336. Quoties ergo divisor primus est formae $4q + 1$, toties inter residua quadratorum occurrit $4q$, ideoque etiam q, tanquam complementum unitatis, cui aequivalet -1: parique modo ibidem etiam occurrunt omnia reliqua quadrata negativa $-4, -9, -16$, etc., ita ut residua constituantur complexa, tam quadratorum ipsorum, quam eorundem negative sumtorum, una cum productis ex binis quibusque, quorum tamen omnium numerorum, si per divisorem $4q + 1$ ad minimam formam perducantur, multitudo erit $= 2q$, ita ut totidem excludantur.

337. Contra autem, si divisor primus sit formae $4q - 1$, tum -1 et omnia quadrata negativa inter non residua referuntur (**). Si enim -1 esset residuum, foret $(-1)^{2q-1} - 1$ divisibile per $4q - 1$, quod autem fieri nequit. Praecedente autem casu, si -1 esset non-residuum, divisore existente $4q + 1$, tum $(-1)^{2q} - 1$ non esset divisibile per $4q + 1$, quod perinde est falsum.

338. Sola autem quadrata semper in ordine residuorum reperiuntur, reliqui vero numeri, pro ratione divisoris, mox inter residua, mox inter non-residua cadunt, quemadmodum modo vidimus -1 esse residuum, si divisor sit $4q + 1$; at -1 esse non-residuum, si divisor sit $4q - 1$.

339. Pro ceteris numeris non-quadratis simile discrimen observatur: Scilicet numerus $+2$ inter residua reperitur, quoties divisor primus est vel hujus $8q + 1$, vel hujus formae $8q - 1$, seu $8q + 7$. Reliquis casibus, quibus divisor est vel $8q + 3$, vel $8q + 5$, numerus $+2$ inter non-residua locum occupat. (***)

340. At numerus -2 inter residua occurrit casibus, quibus divisor primus est vel $8q + 1$, vel $8q + 3$; idem vero numerus -2 inter non-residua cadit casibus, quibus divisor primus est vel $8q + 5$, vel $8q + 7$.

341. Numerus porro $+3$ est residuum, si divisor primus sit vel $12q + 1$, vel $12q + 11$; at idem erit non-residuum, si divisor sit vel $12q + 5$, vel $12q + 7$. Verum numerus -3 est residuum, si divisor primus sit vel $12q + 1$, vel $12q + 7$: at -3 erit non-residuum, si divisor sit $12q + 5$, vel $12q + 11$.

Scripturae ad marginem:

(*) Semper duo exhiberi possunt quadrata, quorum summa divisibilis sit per numerum primum $4q + 1$, et quidem alterum quadratum ad lubitum assumi potest.

(**) Non ergo datur summa duorum quadratorum per talem numerum primum $4q - 1$ divisibilis.

(***) Hoc autem non, ut praecedens, demonstratione muniri potest.

342. Numerus $+4$ semper ad residua refertur, et de -4 idem est judicium ac de -1. Numerus autem 5 reperitur inter residua, si divisor sit vel $20q+1$, vel $20q+9$, vel $20q+11$, vel $20q+19$; at -5 inter residua deprehenditur, si divisor sit vel $20q+1$, vel $20q+3$, vel $20q+7$, vel $20q+9$.

343. Colligamus haec, ut uni conspectui exponantur:

Inter residua erit numerus	si divisor primus fuerit
$+1$	$4q+(1, 3)$
-1	$4q+1$
$+2$	$8q+(1, 7)$ (*)
-2	$8q+(1, 3)$
$+3$	$12q+(1, 11)$
-3	$12q+(1, 7)$
$+5$	$20q+(1, 9, 11, 19)$
-5	$20q+(1, 3, 7, 9)$
$+6$	$24q+(1, 5, 19, 23)$
-6	$24q+(1, 5, 7, 11)$
$+7$	$28q+(1, 3, 9, 19, 25, 27)$
-7	$28q+(1, 9, 11, 15, 23, 25)$
$+10$	$40q+(1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39)$
-10	$40q+(1, 7, 9, 11, 13, 19, 23, 37)$
$+11$	$44q+(1, 9, 25, 5, 7, 37, 39, 19, 35, 43)$
-11	$44q+(1, 9, 25, 5, 37, 3, 15, 23, 27, 31)$
$+12$	$48q+(1, 11, 13, 23, 25, 35, 37, 47)$
-12	$48q+(1, 13, 25, 37, 7, 19, 31, 43)$
$+14$	$56q+(1, 5, 9, 13, 25, 45, 11, 31, 43, 47, 51, 55)$
-14	$56q+(1, 5, 9, 13, 25, 45, 3, 15, 19, 23, 27, 39)$
$+15$	$60q+(1, 7, 11, 17, 43, 49, 53, 59)$
-15	$60q+(1, 17, 49, 53, 19, 23, 31, 47)$ (**)
	etc.

344. Haec autem hactenus tantum inductione nituntur, atque ad demonstrationem investigandam juvabit sequentia observasse. Primo, numerus quicunque $\pm n$ inter residua reperietur, si divisor primus fuerit formae $4nq+1$, vel adeo $4nq+ii$, denotante i numerum imparem quemcunque.

Scripturae ad marginem;

(*) $xx-2yy$ alios divisores primos non admittit, nisi formae $8q+(1,7)$.

(**) 1) Si $xx=mn+r$, tum quadratum xx tam per m quam n divisum, idem relinquet residuum r. Ergo si residuum r convenit divisori m, conveniet etiam divisori n.

2) Si

divisor	inter non-resid.	residuum
$4n-1$	-1	
$8n-1$	-2	$+2$
$8n-3$	± 2	
$12n-1$	-3	$+3$
$12n-7$	± 3	
$8n\pm 3$	$+2$	

Hoc demonstrari potest; at si divisor $8n+1$, inter residua est $+2$, quod autem hinc non demonstratur.

Deinde etiam numerus positivus $+n$ erit residuum, si divisor primus fuerit formae $4nq-1$, vel generalius $4nq-ii$; pro his autem divisoribus numerus negativus $-n$ inter non-residua reperietur.

345. Si numerus positivus n sit residuum pro divisore d, erit etiam residuum pro divisore primo quocunque formae $4nq \pm d$, vel adeo $4nq \pm dii$; at si numerus negativus $-n$ sit residuum pro divisore d, erit is quidem residuum pro divisore $4nq+d$, at non-residuum pro divisore $4nq-d$.

346. Si numerus positivus n fuerit residuum pro divisore d, deinde etiam pro divisore e, erit etiam residuum pro divisore primo quocunque formae $4nq \pm de$. At si numerus negativus $-n$ fuerit residuum pro divisoribus d et e, erit quoque residuum pro divisore quocunque primo formae $4nq+de$; pro divisoribus autem $4nq-de$ inter non-residua referetur.

347. Si numerus positivus n fuerit non-residuum pro divisoribus d et e, certe erit residuum pro divisoribus primis omnibus formae $4nq \pm de$; at si numerus negativus $-n$ sit non-residuum pro divisoribus d et e, is erit residuum pro omnibus divisoribus primis formae $4nq+de$; pro divisoribus autem formae $4nq-de$ erit non-residuum.

348. Quicunque numerus $\pm n$ proponatur, erit is semper residuum, si divisor primus fuerit in aliqua talium formarum $4nq+A$, $4nq+B$, $4nq+C$, etc. contentus, quarum numerus aequatur semissi multitudinis numerorum ad $4n$ primorum eoque minorum. Sin autem divisor in reliquis formis contineatur, erit is non-residuum.

349. Hic autem excipi debent casus, quibus numerus n est quadratus, quippe qui semper inter residua occurrit, quicunque divisores accipiantur. Ac si n sit quadratum negativum, eadem ratio valet ac pro -1.

350. Primum igitur demonstrari debet, si divisor primus sit $4nq+ii$, existente i numero impari, inter residua quadratorum semper occurrere tam numeros n et q, quam eorum negativa $-n$ et $-q$. Sit $i=2m+1$, et quia divisor $4nq+4mm+4m+1$ est formae $4p+1$, inter residua continetur quadratum negativum $-4mm-4m-1$, ideoque numerus $4nq$, et ob 4 residuum, etiam numerus nq, itemque $-nq$, quare vel ambo numeri n et q simul inter residua, vel ambo simul inter non-residua occurrere deberent, unde dum alteruter fuerit inter residua, et alter ibidem reperiatur necesse est.

351. Si n non esset residuum, nullum daretur quadratum xx, ut $xx-n$ divisibile esset per $4nq+4mm+4m+1$. Si ergo demonstrari posset dari hujusmodi quadratum, evicta esset veritas propositionis. Vel si n esset non-residuum, haec expressio $n^{2nq+2mm+2m}-1$ non esset divisibilis per numerum primum, quare si contrarium demonstrari posset, haberemus quod intendimus. (*)

352. Deinde si divisor primus sit $4nq-4mm-4m-1$, inter residua quadratorum occurrere numerum n, inter non-residua vero numerum $-n$, demonstrari oportet. Pari autem jure inter

(*) *Script. ad marg.* Si n esset non-residuum, foret quoque non-residuum nzz, ideoque etiam

$$\pm nzz \mp y(4nq+4mm+4m+1),$$

quae expressio, si uno saltem casu esset quadratum, propositum constaret. Quod ob signa ambigua semper uno saltem casu evenire debere videtur; idque eo magis, cum etiam n et q sint permutabiles, quin etiam verum est, etsi divisor non sit primus. Dubium, si $n=3$, $q=5$, $2m+1=5$, $\pm 3zz \pm 85y$, vel $\pm 5zz \pm 85y$ quadratum effici nequit. Ergo demonstratio ita est adornanda, ut divisor statuatur primus.

residua erit numerus q, et inter non-residua $-q$. Cum autem inter residua certo sit $(2m+1)^2$, ibidem erit $4nq$, ideoque etiam nq.

353. Concessis ergo his propositionibus, etsi demonstratio nondum patet, posito i numero impari et $4nq\pm ii$ primo, pro divisore primo $4nq+ii$, cum residua sint n et $-n$, item naa et $-naa$, semper ejusmodi quadratum xx dabitur, ut sit $xx-naa$ divisibile per $4nq+ii$, deinde etiam ejusmodi quadratum yy, ut sit $yy+naa$ divisibile per $4nq+ii$

354. At divisore primo existente $4nq-ii$, ob residuum naa, semper datur quadratum xx, ut sit $xx-naa$ divisibile per $4nq-ii$; nullum autem existit quadratum yy, ut $yy+naa$ fiat per $4nq-ii$ divisibile, quia hoc casu $-naa$ est non-residuum.

355. Cum $4nq+ii$ sit numerus formae $4p+1$, semper dabitur summa duorum quadratorum $ff+gg$ per eum divisibilis, quorum alterum ff pro lubitu assumi potest. Quare si $xx-naa$ divisibile sit per $4nq+ii$, inveniri potest quadratum yy, ut fiat $xx+yy$ per $4nq+ii$ divisibile, ac tum erit etiam $yy+naa$ per eundem divisibile.

356. Cum $4nq-ii$ sit formae $4p-1$, nulla datur summa quadratorum per $4nq-ii$ divisibilis; quare si $xx-naa$ fuerit per $4nq-ii$ divisibile, fieri nequit ut $yy+naa$ per eundem divisibile existat; foret enim quoque summa $xx+yy$ divisibilis, quod est absurdum.

357. Sumto divisore primo $d=4nq+ii$, quia datur forma $xx+naa$ per eum divisibilis, dabitur etiam forma $yy+qaa$ per eum divisibilis, unde etiam $qxx-nyy$. Dabitur vero etiam forma $yy-qaa$ divisibilis, ac propterea quoque talis forma $qxx+nyy$.

358. Si divisor primus sit $d=4nq-ii$, quia dantur tales formulae $xx-naa$, item $yy-qaa$, per eum divisibiles, etiam haec forma $qxx-nyy$ per d erit divisibilis. Cum autem talis forma $yy+qaa$ non per d sit divisibilis, nulla quoque hujusmodi forma $qxx+nyy$ per d erit divisibilis.

359. Verum etiamsi haec propositiones demonstrari possent, reliquae, quas supra observavimus, nondum essent evictae. Ex 345 si detur quadratum, per d divisum reliquens residuum positivum n, dabitur quoque reliquens naa; tum autem existente $4nq\pm d$ numero primo, dabitur quoque quadratum xx, quod per $4nq\pm d$ divisum relinquat idem residuum, seu $xx-naa$ divisibile erit per $4nq+d$.

360. Scilicet si fuerit $bb-naa$ per d divisibile, semper talis numerus $xx-naa$ dabitur divisibilis per numerum primum $4nq\pm d$. Quin etiam denotante i numerum imparem, ejusmodi forma $xx-naa$ exhiberi potest, quae sit divisibilis per numerum primum $4nq\pm dii$.

361. Si detur quadratum bb, quod per d divisum relinquat residuum negativum $-n$, vel $-naa$, dabitur etiam quadratum xx, quod per numerum primum $4nq+dii$ divisum relinquet $-n$, vel $-naa$. Scilicet si d sit divisor formae $bb+ncc$, dabitur x, ut sit $xx+naa$ divisibile per numerum primum $4nq+dii$.

362. Verum si d divisor formae hujusmodi $bb+ncc$, nulla dabitur hujusmodi forma $xx+naa$, quae sit divisibilis per talem numerum primum $4nq-dii$. Veluti si sit $n=3$, sumatur $d=7$, quia $2^2+3.1=7$, atque certum est hujus formae $xx+3aa$ numeros nullos admittere divisores talis formae $12q-7ii$, cujusmodi sunt: 5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89, 101, 9, 21, 33, 45.

363. Ex § 346 sequitur, si d et e fuerint divisores cujuspiam numeri hujus formae $aa - nbb$, tum semper dari quadratum xx, ut $xx - ncc$ sit divisibile per numerum primum $4nq \pm deii$, quod quidem ex praecedente deduci posset, demonstrando si $aa - nbb$ habeat divisorem d, aliaque similis forma $ff - ngg$ divisorem e, dari etiam $hh - nkk$ divisibilem per productum de. Hoc patebit, si residua quadratorum, per numeros compositos divisorum, perpendemus.

364. Denique notatu dignum est, quod numerus n, ac propterea etiam naa inter residua quadratorum occurrere nequeat, nisi divisor primus sit hujus formae $4nq + \alpha$, ubi α non omnes numeros ad $4n$ primos eoque minores significat, sed eorum tantum semissem, altera semisse penitus exclusa. Sicque omnes divisores primi formae $xx - naa$ talem habent formam $4nq + \alpha$, denotante α aliquot numeros, totidemque exclusis.

365. Similis est ratio numerorum formae $xx + naa$, cujus divisores primi adstringuntur ita ad formam $4nq + \alpha$, ut totidem numeri excludantur ab α, quot admittuntur. Utroque autem casu omnia quadrata imparia ii pro α valent, et si α valeat, etiam αii valebit.

366. Ut demonstrationes has desideratas tentemus, consideremus divisorem primum $4p + 1$, et cum duorum quadratorum summa $aa + bb$ exhiberi queat per eum divisibilis, ita ut alterum pro lubitu assumi possit, auferatur $(4p + 1)bb$, eritque $aa - 4pbb$ per $4p + 1$ divisibile, seu dabitur quadratum aa, quod per $4p + 1$ divisum relinquit $4pbb$, dabitur ergo quoque relinquens p, seu dabitur forma $aa - pbb$ per $4p + 1$ divisibilis.

367. Cum etiam detur forma $aa - bb$ per $4p + 1$ divisibilis, addendo $(4p + 1)bb$, dabitur etiam talis forma $aa + pbb$ per $4p + 1$ divisibilis, quae quidem jam inde patent, quod si quadrata per numerum primum $4p + 1$ dividantur, in residuis tam $+p$ quam $-p$ reperiantur.

368. Sit autem divisor primus $4ffp + ii$, denotante i numerum imparem, et quia tam forma $aa + bb$ quam $aa - bb$ per eum divisibilis exhiberi potest, hincque $iiaa + iibb$ et $iiaa - iibb$; inde auferendo, hinc vero addendo $(4ffp + ii)bb$, habebuntur formulae $iiaa - 4ffpbb$ et $iiaa + 4ffpbb$ per $4ffp + ii$ divisibiles, seu inter residua quadratorum erunt $\pm 4ffpbb$, ideoque etiam $\pm p$. Dabuntur ergo numeri tam hujus $xx + pyy$, quam hujus $xx - pyy$ formae per $4ffp + ii$ divisibiles. (*)

369. Si ergo concessis superioribus observationibus, divisor primus in quapiam harum formularum contineatur: $4rq + 1$, $4rq + \alpha$, $4rq + \beta$, $4rq + \gamma$, $4rq + \delta$, etc., ubi numeri $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. sunt primi ad $4r$ eoque minores, quorum tamen tantum semissis hic occurrit, tum inter residua quadratorum certe occurrit numerus r; similique modo pro residuo $-r$ tales formulae divisorum habentur, quae cum illis conveniunt, si divisor sit formae $4p + 1$, ab iis autem discrepant, si divisoris forma fuerit $4p - 1$.

(*) *Script. ad marg.* Prius manifestum; nam $\frac{xx + pyy}{4ffp + ii} = \text{int.}$ si $x = i$, $y = 2f$;

ut $xx - 2yy$ divis. sit per 41, $x = 7, 10, 13, 14, 17$

$y = 2, 3, 8, 4, 1$

ut $xx - 2yy$ divis. sit per 17,

$$x = \underbrace{12, 5}_{2} \quad \underbrace{11, 6}_{1} \quad \underbrace{10, 7}_{4} \quad \underbrace{16, 1}_{3} \quad \underbrace{17, 4}_{5.}$$
$y =$

370. Observari etiam meretur, ex formis $4rq+4m+1$ semissem excludi tam pro residuo $+r$, quam $-r$, quorum divisores pro hac forma sunt communes. At ex forma $4rq+4m-1$ semissis valet pro residuo $+r$, alter pro residuo $-r$, et qui divisores pro altero residuo valent, pro altero excluduntur.

Caput XI.

De residuis, ex divisione cuborum per numeros primos natis.

371. Divisore primo existente $d=2p+1$, quod residuum relinquit cubus a^3, idem relinquent etiam hi cubi $(a+d)^3$, $(a+2d)^3$, etc. et generaliter $(a+nd)^3$, ex quo sufficiet eos tantum cubos considerasse, quorum radices sunt ipso d minores, qui sunt:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ldots(d-4)^3,\quad (d-3)^3,\quad (d-2)^3,\quad (d-1)^3.$$

372. Sit r residuum, quod horum cuborum quicunque, a^3, relinquit, et manifestum est cubum $(d-a)^3$ relicturum residuum $-r$, seu $d-r$. Quare si inter residua cuborum occurrat numerus quicunque r, ibidem quoque occurret ejus negativum $-r$, seu $d-r$, quod illius complementum vocatur.

373. Sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. residua ex divisione cuborum per numerum primum $d=2p+1$ orta, quorum si omnia a se invicem fuerint diversa, numerus erit $=d-1$; ideoque omnes numeri ipso d minores ibi occurrent. Sin autem qui numeri bis vel pluries occurrant, inde quidem numeri excludentur inter non-residua referendi. (*)

374. Investigaturi, an fieri possit, ut idem numerus r inter residua bis occurrat? ponamus ex cubis a^3 et b^3, quorum radices a et b sint ipso divisore d minores et inaequales, idem residuum r resultare, atque eorum differentia $b^3-a^3=(b-a)(aa+ab+bb)$ per d erit divisibilis. Cum autem, ob d primum, ad eum factor $b-a$ sit primus, necesse est alterum factorem $aa+ab+bb$ esse divisibilem per d.

375. At si cubus b^3 idem praebeat residuum ac cubus a^3, cuivis alii cubo c^3 respondebit cubus e^3, idem quoque atque ille residuum relinquens. Si enim cubi a^3 et b^3 idem residuum praebeant, etiam hi a^3x^3 et b^3x^3 ad minimos valores reducendo, seu $(ax-md)^3$ et $(bx-nd)^3$ idem producent residuum. Quia vero a et d sunt numeri inter se primi, semper x et m ita accipere licet, ut $ax-md$ dato numero c aequetur, hincque erit $e=bx-nd$, diversus ab c et ipso d minor; si enim esset $e=c$, foret $ax-md=bx-nd$, hincque $(a-b)x$ divisibile per d, at nec $a-b$ nec x est divisibile.

376. Statim ergo atque unum residuum bis occurrit, omnia bis occurrent; ideoque multitudo diversorum residuorum ad semissem deprimitur. Hoc autem evenire nequit, nisi divisor d sit divisor talis formae $aa+ab+bb$, existentibus a et b ipso d minoribus. Sin autem non fuerit divisor talis formae, omnia residua erunt diversa eorumque multitudo $=d-1=2p$.

377. Praebeant cubi a^3 et b^3 idem residuum r, ita ut a^2+ab+b^2 sit divisibile per d, eritque etiam $3a^3+3a^2b+3ab^2$ per d divisibile, auferatur a^3-b^3, ut habeatur

(*) In his residuis occurrunt omnes cubi ipso d^3 minores, ad minimos valores reducti, tum etiam producta ex binis, ternis, etc.

$$2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + (a+b)^3$$

per d divisibile. Quia ergo a^3 relinquit r, relinquet cubus $(a+b)^3$ residuum $-r$, hincque cubus hic $(d-a-b)^3$, vel $(2d-a-b)^3$ dabit residuum $+r$.

387. Statim ergo ac duo habentur cubi a^3 et b^3, idem residuum r relinquentes, dabitur quoque tertius $(d-a-b)^3$, vel $(2d-a-b)^3$ idem residuum relinquens, cujus radix minor quam d ab utraque praecedentium a et b erit diversa. Neque enim esse potest $d-a-b=a$, neque $2d-a-b=a$; foret enim $b=d-2a$, vel $b=2d-2a$, ideoque b^3 relinqueret residuum $-8a^3$, vel $-8r$. Quia vero per hypothesin relinquit r, haecque duo residua r et $-8r$ aequivalentia esse nequeunt, ob differentiam $=9r$ non divisibilem per d, praeter casum $d=3$, qui per se est perspicuus, sequitur duo residua aequalia semper tertium assumere.

379. Si ergo duo cubi a^3 et b^3 idem praebeant residuum r, dabitur eo ipso tertius c^3 idem residuum exhibens, cujus radix ita est comparata, ut summa omnium $a+b+c$ sit vel $=d$, vel $=2d$, ob $c=d-a-b$, vel $c=2d-a-b$, quia singulae sunt minores quam d. Sicque ex duobus semper facile reperitur tertius.

380. Hinc autem colligere licet, infra cubum d^3 plures tribus cubis a^3, b^3, c^3 nunquam dari, qui idem residuum relinquant; si enim daretur quartus ab iis diversus e^3, etiam hi:

$$(\lambda d-a-e)^3,\quad (\lambda d-b-e)^3,\quad (\lambda d-c-e)^3,$$

idem praeberent residuum, forentque a praecedentibus diversi. Nam si esset $\lambda d-a-e=b$, foret $a+b+e$ divisibile per d, ideoque $e=c$, contra hypothesin; non solum ergo quatuor, sed adeo septem haberemus cubos idem residuum dantes.

381. Hinc autem, binis combinandis, denuo plures elici possent cubi ipso d^3 minores, idem residuum relinquentes, ita ut tandem omnes cubi essent prodituri. Cum autem concesso uno residuo r, aliud detur diversum $-r$, manifestum est non plures tribus dari cubos ipso d^3 minores, qui idem residuum exhibeant.

382. In serie ergo residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc., quorum multitudo est $=d-1=2p$, vel omnia sunt inaequalia, vel terna inter se aequalia; quod posterius fieri nequit, nisi $2p$ sit numerus per 3 divisibilis. Quare si p non divisibile sit per 3, certum est omnia residua inter se fore inaequalia, ideoque omnes numeros ipso d minores in residuis occurrere.

383. Cum omnes numeri primi, exceptis 2 et 3, in alterutra harum formularum $6q+1$ et $6q-1$ contineantur, si divisor primus sit $6q-1$, in residuis omnes numeri ipso minores occurrunt, neque ulla dantur non-residua. Sin autem divisor sit $6q+1$, fieri potest, ut multitudo residuorum diversorum sit tantum $2q$, sicque $4q$ dentur non-residua.

384. Vidimus autem praeterea hunc ultimum casum locum habere, si divisor sit talis formae $aa+ab+bb$, unde patet, ut supra jam animadvertimus, talem formam alios divisores primos non admittere, nisi formae $6q+1$. At quadruplum illius $4aa+4ab+4bb=(2a+b)^2+3b^2$ redit ad hanc formam $aa+3bb$, cujus divisores primi illa insigni proprietate gaudent.

385. Quaerendi ergo ii sunt divisores quadratorum, qui pro residuo relinquunt -3, vel $-3bb$, qui supra observati sunt (341) in his duabus formulis $12q+1$ et $12q+7$, ad hanc unam $6q+1$

redeuntibus, contineri, unde vicissim concludere licet omnes numeros primos hujus formae $6q+1$ illa proprietate praeditos esse; verum plena hujus rei demonstratio adhuc desideratur.

386. Hoc autem concesso, consequimur hanc propositionem: Quoties divisor primus fuerit formae $6q+1$, toties residua cuborum ab 1 ad $216q^3$ non omnia inter se sunt inaequalia, sed ob terna aequalia, multitudo residuorum inaequalium tantum est $2q$, eruntque reliqui numeri divisore minores, quorum multitudo est $4q$, non-residua. Quoties vero divisor primus non est formae $6q+1$, toties omnia residua inter se sunt inaequalia, neque ulla dantur non-residua.

387. Tantum ergo divisores primos formae $6q+1$ perpendi opus est, pro quibus multitudo non-residuorum duplo major est quam multitudo residuorum. Casus autem simpliciores evolvamus:

pro divisore:	7		13				19					
residua:	1,	6	1,	8,	5,	12	1,	8,	7,	11,	12,	18
non-residua:	2,	3	2,	4,	3,	6	2,	3,	4,	5,	6,	9
	5,	4	11,	9,	10,	7	17,	16,	15,	14,	13,	10

pro divisore:					31					
residua:	1,	8,	27,	2,	16,	15,	29,	4,	23,	30
non-residua:	3,	5,	6,	7,	9,	10,	11,	12,	13,	14
	28,	26,	25,	24,	22,	21,	20,	19,	18,	17

pro divisore:						37						
residua:	1,	8,	27,	14,	31,	10,	6,	23,	29,	11,	26,	36
non-residua:	2,	3,	4,	5,	7,	9,	12,	13,	15,	16,	17,	18
	35,	34,	33,	32,	30,	28,	25,	24,	22,	21,	20,	19

pro divisore:							43							
residua:	1,	8,	27,	21,	39,	11,	4,	32,	22,	16,	35,	2,	41,	42
non-residua	3,	5,	6,	7,	9,	10,	12,	13,	14,	15,	17,	18,	19,	20
	40,	38,	37,	36,	34,	33,	31,	30,	29,	28,	26,	25,	24,	23.

388. Pro quovis ergo divisore primo formae $6q+1$ in residuis occurrunt omnes cubi eo minores, deinde eorum complementa $6q$, $6q-7$, $6q-26$, $6q-63$, etc. Porro etiam producta ex binis. Tum vero etiam, si ibi sit quodpiam productum mn cum altero factore m, ibidem quoque alter factor n reperietur.

389. Si enim a^3 relinquat mn, et b^3 relinquat m, posito divisore $6q+1=d$, fieri potest $a=fb-gd$, ideoque f^3b^3 relinquet mn, at nb^3 etiam relinquit mn, sicque $f^3b^3-nb^3$, ac propterea quoque f^3-n divisibile erit per d, seu f^3 relinquet n.

390. Si divisore primo existente $d=6q+1$, inter residua cuborum occurrat numerus α, tum $\alpha^{2q}-1$ erit per d divisibile. Unde residua, quae ex divisione progressionis geometricae 1, α, α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots . \alpha^{2q}$ per eundem divisorem oriuntur, convenient cum residuis cuborum.

391. Vicissim autem ostendi debet si $a^{2q}-1$ divisibile sit per divisorem primum $6q+1$, numerum a certo inter residua cuborum occurrere, quod quidem si $2q$ non sit divisibile per 3, facile

patet. Si enim sit $2q = 3k \pm 1$, cum $a^{2q} = a^{3k \pm 1}$ inter residua cuborum occurrat, utpote unitati aequivalens, ibidem vero sit a^{3k}, ibidem reperiatur a necesse est.

392. Superest ergo, ut ostendatur, si sit $2q = 3k$ et $a^{3k} - 1$ dividi queat per $6q + 1 = 9k + 1$, tum a fore inter residua cuborum (*); a^{3k} ibi quidem certe reperitur utpote cubus, sed inde demonstratio peti debet, quod residuum a^{3k} unitati aequivaleat.

393. Verum cum residua potestatum $1, a, a^2, a^3$, etc. diversa, sint numero $2q$, pariter atque in residuis cuborum, et ambo ordines incipiant ab unitate et communes habeant terminos a^3, a^6, a^9, etc., tum vero reliquae proprietates ipsis sint communes, ordo potestatum nullos terminos ab altero diversos continere potest.

394. Si autem ad non-residua cuborum, per numerum primum $6q + 1$ divisorum, attendamus, id quidem certum est, si mn sit residuum, at m non-residuum, fore quoque n non-residuum. Non vero vicissim omnia producta ex binis non-residuis praebent residuum: at omnia producta ex residuo quocunque in non-residuum sunt non-residua.

395. Primo enim quadrata singulorum non-residuorum quoque inter non-residua continentur; scilicet si A sit non-residuum, quoque A^2 erit non-residuum, hoc vero non-residuum A^2 per non-residuum A multiplicatum certo dat residuum, quia est cubus.

396. Si enim A^2 esset residuum, foret $A^{4q} - 1$ divisibile per $6q + 1$; at cum $A^{6q} - 1$ certe sit divisibile, foret etiam $A^{6q} - A^{4q}$, hoc est $A^{2q} - 1$ divisibile, ideoque A esset residuum cuborum, contra hypothesin. Quare si AA sit residuum, etiam A erit residuum, et contra si A sit non-residuum, erit quoque AA non-residuum.

397. Si ergo divisore primo existente $= 6q + 1$, residua cuborum sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. atque unicum habeatur non-residuum A, primo omnes hi numeri $A, A\alpha, A\beta, A\gamma$, etc. deinde etiam isti $A^2, A^2\alpha, A^2\beta, A^2\gamma$, etc. erunt non-residua, qui numeri cum omnes a se invicem sint diversi, manifestum est, quod jam demonstravimus, multitudinem non-residuorum duplo esse majorem quam residuorum

398. Hinc etiam patet, si divisor primus sit $6q + 1$, tantum $2q$ residua diversa locum habere posse; si enim omnes numeri inter residua occurrent, in genere $a^{2q} - 1$ esset per $6q + 1$ divisibile, quicquid esset $a < 6q + 1$, quod cum sit absurdum, ideoque unum saltem datur non-residuum, eo ipso $4q$ non-residua sequuntur.

399. Cum igitur ex unico non-residuo A obtineantur duo ordines non-residuorum, prior $A, A\alpha, A\beta, A\gamma$, etc. et posterior $A^2, A^2\alpha, A^2\beta, A^2\gamma$, etc. uterque tot continens terminos, quot ordo residuorum, producta ex binis ordinis alterutrius in altero ordine reperiuntur, et producta ex binis utriusque ordinis fiunt residua.

400. Si adhuc dubitemus, an hoc modo omnia non-residua ex uno obtineantur? sit B non-residuum in neutro ordine contentum, et non-residua erunt tam $B, B\alpha, B\beta, B\gamma$, etc. quam

(*) *Script. ad marg.* Si enim a esset non-residuum, reliqua non-residua omnia, quae sunt $a, a\alpha, a\beta, a\gamma, a\delta$. et $a^2, a^2\alpha, a^2\beta, a^2\gamma$, etc. eadem proprietate gauderent, ut eorum potestates exponentis $2q$, unitate minutae, essent divisibiles per $6q + 1$; ergo omnes numeri hanc haberent proprietatem, quod esset absurdum.

B^2, $B^2\alpha$, $B^2\beta$, $B^2\gamma$, etc. utrobique totidem numero, quot dantur residua, et omnes hi numeri a praecedentibus erunt diversi. Praeterea vero vel AB, vel AB^2 non erit residuum; altero certe existente residuo, altero non-residuo. (*)

401. Si AB non est residuum, binos ordines non-residuorum ita repraesentare poterimus:

Ordo prior: A, $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, etc. B, $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, etc.

Ordo posterior: A^2, $A^2\alpha$, $A^2\beta$, $A^2\gamma$, etc. B^2, $B^2\alpha$, $B^2\beta$, $B^2\gamma$, etc.

et quivis numerus ordinis prioris A, per quemlibet posterioris multiplicatus, praebet residuum, et quidem per quemlibet diversum; unde plura residua prodirent, quam revera sunt, quod esset absurdum.

402. Cum ergo ex divisore primo $6q+1$ tantum $2q$ residua existant, dato quovis cubo a^3, dabitur alius b^3, minor quam $(6q+1)^3$, quorum differentia per $6q+1$ erit divisibilis, ideoque $aa+ab+bb$ per eum quoque erit divisibilis. Omnis ergo numerus primus $6q+1$ est divisor talis numeri $aa+3bb$, vel talis $aa+3$, vel $3aa+1$.

403. Speciminis loco sit divisor 373, et tam residua cuborum, quam non-residua utriusque ordinis ita se habebunt:

Residua	Non-residua	
$\pm$	Ordinis I. $\pm$	Ordinis II. $\pm$
1, 7, 8, 12, 13, 17	2, 3, 5, 14, 16, 21	4, 6, 9, 10, 11, 15
18, 19, 20, 22, 23	24, 26, 34, 35, 36	25, 28, 29, 32, 37
27, 30, 31, 33, 41	38, 39, 40, 44, 46	42, 43, 48, 52, 63
45, 49, 50, 55, 56	47, 51, 53, 54, 57	68, 70, 71, 72, 73
58, 64, 67, 74, 75	59, 60, 61, 62, 65	76, 77, 78, 79, 80
84, 86, 87, 91, 96	66, 69, 81, 82, 83	88, 92, 94, 102, 103
97, 104, 109, 111, 113	85, 89, 90, 93, 95	105, 106, 108, 114, 117
119, 125, 126, 129, 133	98, 99, 100, 101, 107	118, 120, 122, 124, 127
136, 137, 139, 140, 142	110, 112, 115, 116, 121	130, 131, 132, 138, 141
144, 145, 146, 152, 154	123, 128, 134, 135, 147	143, 149, 153, 159, 162
156, 157, 158, 160, 161	148, 150, 151, 155, 165	164, 166, 170, 171, 173
163, 167, 169, 176, 184	168, 172, 174, 179, 181	175, 177, 178, 180, 183
185.	182.	186.
numero $2.62 = 124$.	numero $= 124$.	numero $= 124$.

404. Cum igitur divisore primo existente $6q+1$, multitudo non-residuorum duplo major sit quam multitudo residuorum, etiam pauciores erunt divisores, pro quibus datus numerus inter residua contineatur. Ita datus numerus a erit residuum, si divisor fuerit factor talis formae $x^3 \pm ay^3$, vel etiam talis $x^3 \pm aay^3$; si enim sit $x^3 \pm ay^3 = dn$, cubus x^3 per d divisus residuum dat ay^3, sicque etiam a erit in residuis.

(*) *Script. ad marg.* Demonstrari debet, ambo simul non esse posse non-residua. Si AB est non-residuum, vel in ordine A, vel B, vel A^2, vel B^2 continetur. At singula sunt absurda, ergo esset AB residuum.

405. Quaeri ergo debent numerorum $x^3 \pm ay^3$ divisores primi, et pro nostro quidem instituto ii tantum, qui simul sunt formae $6q+1$. Hoc modo posito $a = 2$, binarius inter residua reperietur, quoties divisor formae $6q+1$ fuerit numerus hujus seriei:

31, 43, 109, 127, 157, 223, 229, 277, 283, 307, 397, 433, 439, 457, 499, 601, 643, 691, 727, 733, 739, 811, 919, 997, 1021, 1051, 1069, 1093, etc.

406. Si ergo sit $6n+1$ talis numerus, tam 2 quam 2^2 erit residuum; tum $2^{2n}-1$ per eum erit divisibilis, ideoque vel 2^n-1, vel 2^n+1. At si $6n+1$ fuerit vel formae $8m+1$, vel $8m+7$, hoc est vel $n = 4m$, vel $n = 4m+1$, tum etiam $2^{3n}-1$ per $6n+1$ est divisibile; unde patet his casibus, quibus n vel $4m$, vel $4m+1$, fore 2^n-1 per $6n+1$ divisibile; casibus autem, quibus n est vel $4m+2$, vel $4m+3$, non 2^n-1, sed 2^n+1 per $6n+1$ divisibile erit.

407. Ita superiores numeros huc transferendo

per	divisibile est	per	divisibile est
31	$2^{10}-1$ et 2^5-1	499	$2^{166}-1$ et $3^{83}+1$
43	$2^{14}-1$ « 2^7+1	601	$2^{200}-1$ « $2^{100}-1$
109	$2^{36}-1$ « $2^{18}+1$	643	$2^{214}-1$ « $2^{107}+1$
127	$2^{42}-1$ « $2^{21}-1$	691	$2^{230}-1$ « $2^{115}+1$
157	$2^{52}-1$ « $2^{26}+1$	727	$2^{242}-1$ « $2^{121}-1$
223	$2^{74}-1$ « $2^{37}-1$	733	$2^{244}-1$ « $2^{122}-1$
229	$2^{76}-1$ « $2^{38}+1$	739	$2^{246}-1$ « $2^{123}+1$
277	$2^{92}-1$ « $2^{46}+1$	811	$2^{270}-1$ « $2^{135}+1$
283	$2^{94}-1$ « $2^{47}+1$	919	$2^{306}-1$ « $2^{153}-1$
307	$2^{102}-1$ « $2^{51}+1$	997	$2^{332}-1$ « $2^{166}+1$
397	$2^{132}-1$ « $2^{66}+1$	1021	$2^{340}-1$ « $2^{170}+1$
433	$2^{144}-1$ « $2^{72}-1$	1051	$2^{350}-1$ « $2^{175}+1$
439	$2^{146}-1$ « $2^{73}-1$	1069	$2^{356}-1$ « $2^{178}+1$
457	$2^{152}-1$ « $2^{76}-1$	1093	$2^{364}-1$ « $2^{182}+1$

408. Si hos divisores, quibus binarius pro residuo convenit, attentius perpendamus, observabimus eos omnes resultare ex hac forma $27pp+qq$, quoties ea fuerit numerus primus; verum hanc observationem demonstratione confirmare nondum licet.

409. Si eos divisores primos formae $6q+1$ quaeramus, quibus inter residua 3 conveniat, eos reperiemus:

61, 67, 73, 103, 193, 307, 367, 439, 577, 1021, etc.

qui, si conjecturae locum relinquamus, in forma $3pp+qq$ continentur, si fuerit vel $p = 9n$, vel $p \pm q = 9n$.

410. Ii autem divisores primi formae $6q+1$, qui in residuis cuborum habent 5, reperiuntur ex forma $x^3 \pm 5y^3$, cujus divisores esse debent 13, 67, 127, 181, 199, 241, 487, 739, etc., quos in forma $3pp+qq$ sub his conditionibus contineri observamus: 1) si $p = 15n$, 2) si $p = 3m$ et $q = 5n$, 3) si $p \pm q = 15n$ et 4) si $p \pm 2q = 15n$.

411. Si inter residua occurrere debeat 6, divisores reperiuntur

7, 37, 139, 163, 181, 241, 307, 337, 349, 379, 631, 727, 751, 997, etc.

qui in forma $3pp+qq$ contineri deprehenduntur, si fuerit vel $p=9n$, vel $2p\pm q=9n$. Harum autem observationum veritas tantum conjecturae innititur, neque inductione ulterius commode progredi licet. (*)

Caput XIII.

De residuis, ex divisione biquadratorum per numeros primos ortis.

412. Si divisor primus sit d, quod residuum a biquadrato a^4 relinquitur, idem non solum a biquadratis $(d+a)^4$, $(2d+a)^4$, etc., sed etiam a $(d-a)^4$ relinquitur, unde si $d=2p+1$, plura quam p residua diversa resultare nequeunt.

413. Si residua sint 1, α, β, γ, δ, etc., quorum multitudo major esse nequit quam p, in iis occurrent omnia biquadrata, ad minimam scilicet formam reducta, quae insuper hac gaudebunt proprietate, ut producta ex binis in iisdem reperiantur.

414. Haec ergo residua nascuntur ex biquadratis 1, 16, 81, 256, ... p^4, quae utrum pro dato divisore primo $2p+1$ omnia inter se futura sint diversa, nec ne? diligentius inquiri convenit.

415. Ac primo quidem patet, si unum bis occurrat, scilicet ex biquadratis a^4 et b^4, tum ob b^4-a^4 per $d=2p+1$ divisibile, fieri poterit $b=md\pm na$, unde et $n^4a^4-a^4$ erit divisibile, sicque etiam n^4-1. Tum ergo quoque c^4 et n^4c^4 paria producent residua, singulaque residua bis occurrent.

416. Si ergo d sit divisor formulae b^4-a^4, sumtis a et b minoribus quam $\frac{1}{2}d$, ideoque formulae b^2+a^2, quia neque $b-a$, neque $b+a$ per eum divisibile esse potest, tum singula residua bis occurrent. Contra vero, si non sit factor talis formae b^2+a^2, omnia residua erunt diversa.

417. At per § 279 omnes divisores primi formae $bb+aa$ in forma $4q+1$ continentur, quare si divisor propositus fuerit formae $4q-1$, ex divisione biquadratorum certe $2q-1$ diversa residua emergunt, totidemque habebuntur non-residua, neque plura. Quos casus primum evolvamus.

418. Sit ergo divisor primus $4q-1$, et residua diversa ex biquadratis oriunda 1, α, β, γ, δ, etc., quorum numerus erit $2q-1$, non-residua autem sint A, B, C, D, etc. totidem numero. Ac primo patet, si A fuerit non-residuum, etiam $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ fore non-residua. Si enim Aa^4 esset residuum, ex biquadrato b^4 ortum, foret b^4-Aa^4 per d divisibile. At est $b=ma\pm nd$, unde et $m^4a^4-Aa^4$, ideoque m^4-A esset divisibile per d, et m^4 relinqueret A, contra hypothesin.

419. Haec proprietas adeo ad omnes divisores extenditur, ita ut semper productum ex residuo in non-residuum sit non-residuum. At productum ex duobus non-residuis, AB, si quidem divisor primus sit $4q-1$, certe est residuum; si enim esset non-residuum, conveniret cum termino Aa^4, ita ut Aa^4-AB, ac propterea a^4-B per d esset divisibile, contra hypothesin.

(*) *Script. ad marg.* Ut 7 sit residuum divisorque $3pp+qq$, debet esse vel $p=3m$ et $q=7n$, vel $p\pm q=21n$, vel $4p\pm q=7n$, vel $p=21m$, vel $p\pm 2q=7n$. — Ut 10 sit residuum, pro divisore $3pp+qq$ debet esse vel $p=5n$, vel $q=5n$.

420. Hoc ergo casu, quo divisor est $= 4q - 1$, residua biquadratorum eadem praedita sunt proprietate, atque residua quadratorum, quin etiam cum iis plane convenirent pro eodem divisore. Omnia enim residua biquadratorum in residuis quadratorum continentur, et cum multitudine sint paria, prorsus eadem sint necesse est, unde hic de residuis et non residuis eadem valent, quae supra exposuimus.

421. Sit jam divisor primus $4q + 1$, et residua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. omnia hanc habent proprietatem, ut $\alpha^q - 1$ divisibile sit per $4q + 1$. Haec quidem residua etiam continebuntur in residuis quadratorum pro eodem divisore $4q + 1$; at vicissim, non omnia residua quadratorum simul sunt residua biquadratorum, quod ita ostenditur.

422. Quodvis residuum quadratorum per x^2 potest repraesentari, quod si esset residuum biquadratorum, foret $x^{2q} - 1$ divisibile per $4q + 1$, denotante x numerum quemcunque minorem divisore; nempe $1^{2q} - 1$, $2^{2q} - 1$, $3^{2q} - 1$, $4^{2q} - 1, \ldots (2q)^{2q} - 1$ dividi possent per $4q + 1$, quod cum fieri nequeat, non omnia quadrata in residuis biquadratorum occurrunt.

423. Si x^2 in residuis biquadratorum non occurrat, ibidem non occurrent quoque αx^2, βx^2, γx^2, δx^2, etc., quae cum sint residua quadratorum, patet in residuis quadratorum, quorum multitudo est $2q$, tot ad minimum esse non-residua biquadratorum, quot fuerint residua biquadratorum; unde patet multitudinem residuorum biquadratorum vel esse $= q$, vel adhuc minorem, quod posterius autem fieri nequit.

424. Quo haec facilius evolvere liceat, divisores simpliciores formae $4q + 1$ examinemus, et tam residua quam non-residua biquadratorum consideremus:

pro divisore	5	13	17	29
residua	1	1, 3, 9	1, 4, 13, 16	1, 16, 23, 24, 20, 7, 25
non-residua	2	2, 6, 5	3, 12, 5, 14	2, 3, 17, 19, 11, 14, 21
	4	4, 12, 10	9, 2, 15, 8	4, 6, 5, 9, 22, 28, 13
	3	8, 11, 7	10, 6, 11, 7	8, 12, 10, 18, 15, 27, 26

pro divisore	37								
residua	1,	16,	9,	12,	33,	10,	26,	34,	7
non-residua	2,	32,	14,	31,	29,	15,	24,	20,	18
	4,	27,	28,	25,	21,	30,	11,	3,	36
	8,	17,	19,	13,	5,	23,	22,	6,	35.

425. Ex his exemplis videmus numerum residuorum esse $= q$, quem jam demonstravimus majorem esse non posse. Non-residuorum numerus triplo est major, quae in ternas classes distinximus, cum cujusvis classis numeri peculiaribus proprietatibus gaudeant.

426. Has tres classes commodissime ita constituere licet: cum dentur quadrata in residuis non occurrentia, sit xx tale quadratum; et certum est neque x, neque x^3 in residuis reperire posse. Si ergo residua sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. ternae non-residuorum classes erunt:

I. x, αx, βx, γx, δx, etc.

II. x^2, αx^2, βx^2, γx^2, δx^2, etc.

III. x^3, αx^3, βx^3, γx^3, δx^3, etc.

427. Quaevis classis tot continet terminos quot sunt residua, et omnes termini harum classium sunt a se invicem diversi. Ejusdem quidem classis termini manifesto sunt diversi; diversitas autem terminorum in diversis classibus ita ostendetur.

428. Si αx aequivaleret ipsi βx^2, foret $\beta x^2 - \alpha x$, ideoque $\beta x - \alpha$ per $4q+1$ divisibile, unde cum α sit residuum, βx quoque esset residuum ipsi aequivalens, quod esset absurdum. Simili modo si αx, vel αx^2 conveniret cum βx^3, foret vel $\alpha - \beta x^2$, vel $\alpha - \beta x$ divisibile per $4q+1$, ideoque βx^2, vel βx in residua transiret, contra hypothesin.

429. Hinc si numerus residuorum sit $= n$, numerus non-residuorum erit $3n$, vel saltem non erit minor quam $3n$. Ac si in tribus memoratis classibus omnia non-residua contineantur, necesse est sit multitudo tam residuorum quam non-residuorum junctim sumta $= 4q$, ideoque $n = q$.

430. His classibus ita ut fecimus dispositis, manifestum est producta ex binis non-residuis tam primae quam tertiae classis in classe secunda contineri; deinde vero producta vel ex binis terminis secundae classis, vel ex termino primae in terminum tertiae in ordinem residuorum transgredi. Productum autem ex termino primae in terminum secundae classis reperitur in tertia classi, at productum ex secunda classe in tertiam reperitur in prima.

431. Hinc intelligitur neque in prima, neque in tertia classe numerum quadratum locum habere posse, quoniam is in se ipsum ductus foret residuum. Sola ergo secunda classis continet quadrata, et quoniam residua etiam ut quadrata spectari possunt, multitudo omnium quadratorum est $= 2n$.

432. Si secunda classis cum residuis omnia quadrata complectatur, quae ut residua diversa respectu divisoris $4q+1$ spectari possunt, quorumque numerus est $= 2q$, ut in residuis quadratorum vidimus, ob $2n = 2q$, ideoque $4n = 4q$, omnes numeri ipso divisore minores habentur, neque ulla dabuntur non-residua in nostris tribus classibus non contenta, eritque $n = q$.

433. Si ergo quis dubitet, an in nostris tribus non-residuorum classibus omnes occurrant numeri, qui non sint residua, hoc dubium tolletur, si ostendamus nullum dari quadratum non-residuum, quod non in secunda classe contineatur. Si enim yy esset tale quadratum, inde statim tres novae classes non-residuorum emergerent, foretque jam numerus non-residuorum $= 6n$, ac si nunc non-residua essent completa, foret $7n = 4q$.

434. Verum quod tale quadratum yy, tres novas classes non-residuorum post se trahens, non detur, ita ostenditur: Sint tres classes ex tali quadrato oriundae et prioribus adjiciendae

IV. $y, \alpha y, \beta y, \gamma y,$ etc. V. $y^2, \alpha y^2, \beta y^2, \gamma y^2,$ etc. VI. $y^3, \alpha y^3, \beta y^3, \gamma y^3,$ etc.,

quarum singulae n terminos continebunt, ac duos casus examinari oportet, alterum quo xy esset residuum, alterum quo esset non-residuum.

435. Sit xy residuum, atque omnes termini classis quartae per x multiplicati, scilicet xy, αxy, βxy, γxy, etc. numero n, erunt residua. Verum etiam omnes termini classis tertiae per x multiplicati, scilicet x^4, αx^4, βx^4, γx^4, etc. sunt residua totidem numero, atque ab illis diversa; nam si αxy et βx^4 convenirent, foret $\alpha y - \beta x^3$ divisibile per divisorem, et αy caderet in classem tertiam, contra hypothesin. Prodirent ergo $2n$ residua diversa; quod cum sit absurdum, fieri nequit ut xy sit residuum.

436. Remoto ergo casu, quo xy est residuum, ponamus xy esse non-residuum, et cum in sex classibus omnia non-residua comprehendantur, in una earum xy occurrere deberet; sive autem ponamus xy ipsi αx, sive αx^2, sive αx^3, sive αy, sive αy^2, sive αy^3 aequivalere, sequeretur absurdum, dum y vel esset residuum, vel in classem I, vel II non-residuorum caderet, vel etiam x esset residuum, vel in classem IV, vel V caderet.

437. Cum igitur sex classes non-residuorum admitti nequeant, vel tantum tres sunt constituendae, quod volumus, vel plures quam sex. Quod posterius eveniret, si nondum omnia quadrata non-residua in classe II et V occurrerent. Sit ergo zz non-residuum in neutra harum classium contentum, et ex eo resultabunt tres novae classes, singulae n terminis constantes:

VII. z, αz, βz, etc. VIII. z^2, αz^2, βz^2, etc. IX. z^3, αz^3, βz^3, etc.

438. Nunc vero, ut § 435 ostendetur, neque xy, neque xz, neque yz esse posse residuum, quia inde plura residua, quam revera sunt, sequerentur. Deinde si xy in quapiam sex primorum classium contineretur, eadem incommoda orirentur, quae ante; ex quo xy in quapiam trium postremarum classium esse deberet. Videamus ergo, num xy ipsi αz aequivalere posset.

439. At si xy ipsi αz aequivaleret, xz, quia certe est non-residuum, vel ipsi βy, vel βy^2, vel βy^3 aequivaleret; quare cum $xy - \alpha z$ et $xz - \beta y^\nu$, denotante ν vel 1, vel 2, vel 3, essent divisibilia per $4q+1$, foret $z(xy-\alpha z) - y(xz - \beta y^\nu)$, hoc est $\beta y^{\nu+1} - \alpha z^2$ quoque divisibile, sicque αz^2 aequivaleret ipsi $\beta y^{\nu+1}$, ideoque in alia classe contineretur, quod aeque esset absurdum.

440. Sic igitur demonstratum est, si divisor primus fuerit $4q+1$, residua diversa biquadratorum fore numero $= q$, neque plura, neque pauciora, non-residua autem tribus classibus comprehendi, quarum quaelibet constet q terminis.

441. Quare cum residua diversa ex biquadratis $1, 2^4, 3^4, 4^4, \ldots 16q^4$, quorum multitudo est $= 2q$, oriantur, bina debent esse aequalia. Hinc si a sit numerus quicunque minor quam $2q$, dabitur semper alius b, et quidem unicus pariter non major quam $2q$, ut b^4 et a^4 aequalia relinquant residua, seu ut $b^4 - a^4$ per $4q+1$ sit divisibile.

442. Cum autem tam $b-a$ quam $b+a$ minus sit quam $4q+1$, erit $bb+aa$ per $4q+1$ divisibile. Hinc proposito numero primo $4q+1$, semper summa duorum quadratorum $aa+bb$ per eum divisibilis exhiberi potest, ita ut neutra radix superet $2q$, et quidem alterum quadratum pro lubitu assumi potest.

443. Supra autem jam ostendimus summam duorum quadratorum $aa+bb$ inter se primorum, praeter binarium alios divisores primos non admittere, nisi formae $4n+1$. Unde concludi posse videtur, omnes numeros primos formae $4q+1$ ipsos esse summas duorum quadratorum, certe autem vel $2(4q+1)$, vel $5(4q+1)$, vel $13(4q+1)$ etc. erit summa duorum quadratorum.

444. Etsi jam evictum est, plura duobus biquadratis, quorum radices $2q$ non excedant, non dari, idem residuum relinquentes, tamen hoc etiam seorsim demonstrari potest. Sint enim tres numeri a, b, c, non excedentes $2q$, ut tam $aa+bb$, quam $aa+cc$ et $bb+cc$ per $4q+1$ essent divisibilia, atque etiam differentiae $aa-cc$, $aa-bb$, $bb-cc$ forent divisibiles. At cum neque $a-c$, neque $a+c$ per $4q+1$ dividi possit, productum quoque $aa-cc$ dividi non poterit.

445. Nova ergo ratione demonstravimus, si divisor primus sit $4q+1$, multitudinem residuorum diversorum ex biquadratis oriundorum esse $=q$, neque minorem esse posse; unde non-residuorum multitudo erit $3q$, in ternas classes supra memoratas distinguenda.

446. Residua ergo biquadratorum, quae sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ex divisore primo $4q+1$ oriunda, hanc habent proprietatem, ut α^q-1, β^q-1, γ^q-1, etc. per eum numerum primum $4q+1$ divisionem admittant. Utrum autem omnia residua huic proprietati refragentur, nec ne? videndum est.

447. Sit xx non-residuum, et x atque x^3 pariter erunt non-residua. Jam si $(xx)^q-1$, seu $x^{2q}-1$ esset divisibile per $4q+1$, omnes termini αx^2, βx^2, γx^2, etc. eadem proprietate gauderent, qua cum per se gaudeant ipsa residua, omnia quadrata ab 1 usque ad $4qq$ eadem proprietate essent praedita.

448. Omnibus ergo numeris ab 1 usque ad $2q$ ista conveniret proprietas, ut eorum potestates exponentis $2q$, per $4q+1$ divisae, unitatem relinquerent; sicque omnes differentiae inter binos terminos hujus seriei $1, 2^{2q}, 3^{2q}, 4^{2q} \ldots (2q)^{2q}$ per $4q+1$ essent divisibiles, quod autem absurdum esse jam supra ostensum est.

449. Hisce conficitur id, quod erat propositum, scilicet si quadratum xx fuerit non-residuum, tum $x^{2q}-1$ certe non esse divisibile per $4q+1$. Multo minus autem, cum x et x^3 etiam sint non-residua, hae formulae x^q-1, vel $x^{3q}-1$ divisibiles erunt per $4q+1$, unde patet si a^q-1 divisionem admittat per $4q+1$, tum numerum a necessario inter biquadratorum residua reperiri.

450. Quando ergo potestas a^q, per numerum primum $4q+1$ divisa, unitatem relinquit, tum omnia residua, ex serie potestatum $1, a, a^2, a^3, a^4$, etc. orta, in nostris residuis biquadratorum continebuntur. Et vicissim, si a non sit residuum biquadratorum, formula a^q-1 certe non erit divisibilis per $4q+1$.

451. Si q sit numerus impar, inter residua non occurret numerus -1, vel $4q$, quia $(-1)^q-1$ certe per $4q+1$ dividi nequit. Hoc ergo casu, si residua sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., eorum negativa $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma$, etc., seu $4q$, $4q+1-\alpha$, $4q+1-\beta$, $4q+1-\gamma$, etc. certe inter non-residua reperientur.

452. Hinc sequitur, si q sit numerus impar, non dari duo biquadrata a^4 et b^4, quorum summa a^4+b^4 esset per numerum $4q+1$ divisibilis. Si enim residuum ipsi a^4 conveniens esset α, alterius b^4 esset $-\alpha$, quod autem fieri non posse modo ostendimus.

453. Contra autem, si q sit numerus par, inter residua biquadratorum certe occurrit -1, si enim esset non-residuum, non esset $(-1)^q-1$ per $4q+1$ divisibile. Cum igitur sit divisibile, patet propositum, scilicet inter residua biquadratorum simul singulorum negativa, seu complementa contineri.

454. Si ergo q sit numerus par et $4q+1$ numerus primus, seu si $8q+1$ sit numerus primus, proposito quocunque biquadrato a^4, aliud dabitur b^4, ita ut eorum summa a^4+b^4 sit per $8q+1$ divisibilis. Ita dato numero a, semper inveniri potest numerus x, ut biquadratorum summa a^4+x^4 divisibilis sit per 17, vel 41, vel 73, vel 89, vel 97, etc.

455. Contra autem, nulla dabitur duorum biquadratorum summa, quae esset divisibilis per ullum numerum primum hujus seriei 5, 13, 29, 37, 53, 61, 101, etc.; multo vero minus per ullum numerum primum formae $4q-1$, quia ne summa duorum quidem quadratorum per talem numerum est divisibilis.

456. Summa ergo duorum biquadratorum inter se primorum, praeter binarium, alios divisores habere nequit, nisi qui contineantur in forma $8q+1$, ita est:

$1+2^4=17$	$2^4+3^4=97$	$4^4+5^4=881$	$7^4+8^4=73.89$
$1+3^4=2.41$	$2^4+5^4=641$	$4^4+7^4=2657$	$7^4+9^4=2.4481$
$1+4^4=257$	$2^4+7^4=2417$	$4^4+9^4=17.401$	$7^4+10^4=12401$
$1+5^4=2.313$	$2^4+9^4=6577$	$5^4+6^4=17.113$	$8^4+9^4=10657$
$1+6^4=1297$	$3^4+4^4=337$	$5^4+7^4=2.17.89$	$9^4+10^4=16511.$
$1+7^4=2.1201$	$3^4+5^4=2.353$	$5^4+8^4=4721$	
$1+8^4=17.241$	$3^4+7^4=2.17.73$	$5^4+9^4=2.3593$	
$1+9^4=2.17.193$	$3^4+8^4=4177$	$6^4+7^4=3697$	
$1+10^4=73.137$	$3^4+10^4=2.17.593$		

457. Si jam quaeratur, quibus divisoribus binarius in residuis reperiatur, id quidem in casibus evolutis § 424 nusquam evenit. At ubi 2 occurrit, ibi etiam $2a$ occurrit; ideoque divisor $4q+1$ factor esse debet talis numeri a^4-2b^4, seu $2b^4-a^4$; unde concluduntur hi divisores:

73, 89, 113, 233, 281, 353, 593, 617, 937, 1249, 1889, 2273, 2393, 4177,
4721, 4801, 6529, etc.,

qui numeri in forma $64pp+qq$ contenti videntur. (*)

458. Numeri autem in formula $64pp+qq$ contenti sunt:

73, 89, 113, 233, 257, 281, 337, 353, 577, 593, 601, 617, 881, 937, 1033, 1049,
1097, 1153, 1193, 1201, 1249, etc.,

ubi cum omnes praecedentes occurrant, et reliqui quaesito satisfaciant, nihil est, quod de veritate conjecturae dubitemus, et cum omnes hi numeri sint formae $8n+1$, in residuis tam -2 quam $+2$ reperietur.

459. Omnes divisores primos formae $4q+1$ usque ad 101 examinando, inter residua semper occurrit numerus q, ita ut esset q^q-1 divisibile per $4q+1$, quod si generatim esset verum, simul inter residua forent numeri q, q^2, q^3, $16q$, $81q$, $256q$, $16qq$, $81qq$, hincque -4, $q-20$, -64, $-4q$.

460. Haec observatio per supra § 389 allatam confirmatur, ubi animadvertimus numerum 2 inter residua quadratorum esse, si divisor primus sit formae $8p+1$, esse autem non-residuum,

(*) *Script. ad marg.* Ut 3 sit residuum, divisor esse debet $pp+qq$, ut sit vel $p=12m$, vel $p=3(2m+1)$ et $q=4n+2$. Ut 5 sit residuum, divisor fit $=100pp+qq$.

si divisor sit formae $8p+5$, quare $2^{4p}-1$ est divisibile per $8p+1$, at $2^{4p+2}-1$ non est divisibile per $8p+5$, quare cum $2^{8p+4}-1$ sit divisibile, necesse est sit $2^{4p+2}+1$ per $8p+5$ divisibile.

461. Hinc cum forma $4q+1$ ad $8p+1$ redeat, si q sit numerus par, hoc casu $2^{2q}-1$, seu 4^q-1 per $4q+1$ est divisibile, ideoque numerus 4, ejusque etiam negativum -4 inter residua biquadratorum reperiri debet. At si q sit numerus impar, quo casu $4q+1$ ad $8p+5$ redit, erit $2^{2q}+1$, seu 4^q+1, vel quod eodem redit $(-4)^q-1$ per $4q+1$ divisibile; ita ut etiam hoc casu -4 inter residua biquadratorum occurrere debeat.

462. Pro divisore ergo primo $4q+1$, sive q sit numerus par, sive impar, in residuis biquadratorum semper reperitur -4, unde cum ob 1 etiam $-4q$ adsit, quoque q adesse debet, sicque altera observatio per alteram confirmatur.

Caput XIIII.

De residuis, ex divisione surdesolidorum per numeros primos ortis.

463. Si divisor sit d, et a^5 relinquat α, tum $(d-a)^5$ relinquet $-\alpha$, sicque omnia residua nascentur ex his potestatibus $1, 2^5, 3^5, 4^5 \ldots (d-1)^5$, quae si omnia fuerint diversa, eorum numerus est $=d-1$.

464. Sint $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. omnia residua diversa, et in iis occurrent producta ex binis; quin etiam si quod productum mn ibi adsit cum altero factore m, etiam alter n aderit. Nam si mn nascatur ex a^5, et m ex b^5, ex nb^5 nascetur etiam mn, eritque a^5-nb^5 divisibile per d. At fieri potest $a=fb\pm gd$, ideoquo a^5 idem relinquit residuum, quod f^5b^5, sic cum $f^5b^5-nb^5$, ac propterea f^5-n divisibile sit per d, in residuis erit n.

465. Si in residuis est a, ibi erunt quoque a^2, a^3, a^4, sed a^5 quidem semper inest. Hinc vicissim, si in residuis sit a^2, ibidem quoque erit $a^3=a^5:a^2$; et ob a^4 quoque residuum, erit etiam a residuum. Ergo quaecunque potestas a^n (dum n non fuerit multiplum quinarii) fuerit residuum, ejus omnes potestates a, a^2, a^3, etc. erunt simul residua.

466. Sit m multitudo residuorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. pro divisore primo $2q+1$, et si omnes numeri divisore minores in residuis occurrant, erit $m=2q$, ac tales quidem casus dari mox patebit.

467. Si fuerit $m<2q$, dabitur numerus non-residuum, cujusmodi sit A, hincque primo non-residua erunt $A, A\alpha, A\beta$, etc. numero m; tum vero quia A^2, A^3, A^4 sunt non-residua, ex quoque m nova obtinentur, ita ut unum non-residuum A involvat quatuor classes non-residuorum

I. $A, A\alpha, A\beta, A\gamma$, etc. III. $A^3, A^3\alpha, A^3\beta, A^3\gamma$, etc.

II. $A^2, A^2\alpha, A^2\beta, A^2\gamma$, etc. IV. $A^4, A^4\alpha, A^4\beta, A^4\gamma$, etc.

468. Statim ergo atque unum non-residuum habetur, simul oriuntur $4m$ non-residua, quae si fuerint omnia, necesse est ut sit $m+4m=2q$, ideoque $5m=2q$ et $m=\frac{2q}{5}$, nisi ergo q multiplum quinarii, non-residua adesse nequeunt.

469. At si praeter quatuor classes novum daretur non-residuum B, ex eo denuo quatuor classes orirentur:

V.	B,	$B\alpha$,	$B\beta$,	$B\gamma$, etc.	VII.	B^3,	$B^3\alpha$,	$B^3\beta$,	$B^3\gamma$, etc.
VI.	B^2,	$B^2\alpha$,	$B^2\beta$,	$B^2\gamma$, etc.	VIII.	B^4,	$B^4\alpha$,	$B^4\beta$,	$B^4\gamma$, etc.

Jam sive AB dicatur esse residuum, sive non-residuum, absurdum sequitur; unde omnia non-residua, si quidem dantur, a quatuor prioribus classibus exhauriri necesse est.

470. Certum ergo est, quoties in divisore primo $2q+1$ numerus q non fuerit multiplum quinarii, toties omnes numeros in residuis occurrere, eorumque multitudinem esse $=2q$. Neque ergo dantur duo numeri a et b, minores quam $2q+1$, ut a^5-b^5 esset per $2q+1$ divisibile; hincque etiam $a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4$ per nullum numerum primum $2q+1$ dividi potest, in quo q non sit multiplum quinarii.

471. Omnes ergo divisores primi numerorum hujus formae $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$, seu hujus a^5-b^5, excluso divisore $a-b$, in hac formula $10p+1$ continentur, iique numeri nullo modo dividi poterunt per ullum numerum in aliqua harum formularum $10p+3$, $10p+7$ et $10p+9$ contentum.

472. At si divisor primus sit $10p+1$, non omnes numeri in ordine residuorum occurrent, si enim omnes occurrerent, foret $x^{2p}-1$ semper divisibile per $10p+1$, quicquid fuerit x, seu differentiae omnium harum potestatum 1, 2^{2p}, 3^{2p}, $4^{2p}\ldots(2p+1)^{2p}$ per $10p+1$ essent divisibiles, cujus absurditas jam supra est ostensa.

473. Quare si divisor primus sit $10p+1$, numerus residuorum diversorum tantum est $=2p$, et $8p$ habebuntur non-residua, unde semper quini dabuntur numeri ipso $10p+1$ minores, a, b, c, d, e, quorum potestates quintae paria producunt residua.

474. Scilicet proposito numero quocunque a, quatuor semper assignari possunt alii b, c, d, e, singuli divisore $10p+1$ minores, ut per eum divisibiles sint

hi numeri	ac propterea isti quoque
b^5-a^5	$b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4$
c^5-a^5	$c^4+ac^3+a^2c^2+a^3c+a^4$
d^5-a^5	$d^4+ad^3+a^2d^2+a^3d+a^4$
e^5-a^5	$e^4+ae^3+a^2e^2+a^3e+a^4$.

Haec eadem demonstratio ad praecedentes potestates accommodari potest.

475. Differentiae ergo etiam harum primae, a tribus sequentibus, per eumdem divisorem dividi poterunt; hae autem differentiae, cum sint divisibiles per $b-c$, $b-d$, $b-e$, abeunt in has

$$b^3+b^2c+bc^2+c^3+ab^2+abc+ac^2+a^2b+a^2c+a^3,$$

$$b^3+b^2d+bd^2+d^3+ab^2+abd+ad^2+a^2b+a^2d+a^3,$$

$$b^3+b^2e+be^2+e^3+ab^2+abe+ae^2+a^2b+a^2e+a^3,$$

476. Porro vero harum differentias, sigillatim per $c-d$ et $c-e$ divisas, etiam per $10p+1$ divisibiles esse oportet, quae sunt:

$$c^2+cd+d^2+bc+bd+b^2+ac+ad+ab+a^2,$$

$$e^2+ce+e^2+bc+be+b^2+ac+ae+ab+a^2,$$

harumque denuo differentia, quae per $d-e$ divisa est,

$$e+d+c+b+a.$$

477. Hinc apparet quinos numeros a, b, c, d, e, quorum potestates quintae, per numerum primum $10p+1$ divisae, paria relinquunt residua, ita esse comparatos, ut eorum summa

$$a+b+c+d+e$$

etiam per eundem sit divisibilis. Cum autem singuli minores sint quam $10p+1$, eorum summa est vel $10p+1$, vel $2(10p+1)$, vel $3(10p+1)$, vel $4(10p+1)$.

478. Cum numeros negativos etiam ut residua spectare liceat, haec summa $a+b+c+d+e$ ut nihilo aequalis considerari potest, unde datis quatuor a, b, c, d, quintus sponte datur, scilicet $e=-a-b-c-d$, qui cum sit unicus, patet plures quam quinque non dari.

479. En ergo novam demonstrationem, quod numerus residuorum diversorum pro quocunque divisore primo $2q+1$ sit vel $=2q$, vel $=\frac{2q}{5}$, et quod prius quidem semper eveniat, si q non sit multiplum quinarii, posterius semper, si fuerit $q=5p$. Priori casu omnes numeri divisore minores sunt residua, posteriori tantum quinta eorum pars.

480. Posito igitur divisore primo $10p+1$, multitudo residuorum diversorum est $=2p$, inter quae cujusvis residui negativum quoque occurrit, ex quo eorum multitudo est par. Tum vero idem residuum quinque potestatibus diversis, quarum radices sint divisore minores, convenit, quas notasse juvabit.

481. Tales divisores cum sint 11, 31, 41, 61, 71, 101, etc. consideremus primo divisorem $10p+1=11$, quo fit $p=1$:

Residua	ex potestatibus					Classes non-residuorum I.	II.	III.	IV.
1	1^5,	3^5,	4^5,	5^5,	9^5	2	4	8	5
10	2^5,	6^5,	7^5,	8^5,	10^5	9	7	3	6.

482. Sit divisor $10p+1=31$ et $p=3$, habebimus

Residua	ex potestatibus					Classes non-residuorum I.	II.	III.	IV.
1	1^5,	2^5,	4^5,	8^5,	16^5	2	4	8	16
5	7^5,	14^5,	19^5,	25^5,	28^5	10	20	9	18
26	3^5,	6^5,	12^5,	17^5,	24^5	21	11	22	13
6	11^5,	13^5,	21^5,	22^5,	26^5	12	24	17	3
25	5^5,	9^5,	10^5,	18^5,	20^5	19	7	14	28
30	15^5,	23^5,	27^5,	29^5,	30^5	29	27	23	15

483. Sit divisor primus $10p+1=41$, ideoque $p=4$, erunt

Residua	ex potestatibus					Classes non-residuorum			
						I.	II.	III.	IV.
1	1^5,	10^5,	16^5,	18^5,	37^5	2	4	8	16
40	4^5,	23^5,	25^5,	31^5,	40^5	39	37	33	25
3	11^5,	12^5,	28^5,	34^5,	38^5	6	12	24	7
38	3^5,	7^5,	13^5,	29^5,	30^5	35	29	17	34
9	5^5,	8^5,	9^5,	21^5,	39^5	18	36	31	21
32	2^5,	20^5,	32^5,	33^5,	36^5	23	5	10	20
14	15^5,	22^5,	24^5,	27^5,	35^5	28	15	30	19
27	6^5,	14^5,	17^5,	19^5,	26^5	13	26	11	22

484. Sit divisor primus $10p + 1 = 61$ et $p = 6$, erunt

Residua	ex potestatibus					Classes non-residuorum			
						I.	II.	III.	IV.
1	1^5,	9^5,	20^5,	34^5,	58^5	2	4	8	16
60	3^5,	27^5,	41^5,	52^5,	60^5	59	57	53	45
13	12^5,	25^5,	42^5,	47^5,	57^5	26	52	43	25
48	4^5,	14^5,	19^5,	36^5,	49^5	35	9	18	36
14	5^5,	39^5,	45^5,	46^5,	48^5	28	56	51	41
47	13^5,	15^5,	16^5,	22^5,	56^5	33	5	10	20
11	8^5,	11^5,	28^5,	37^5,	38^5	22	44	27	54
50	23^5,	24^5,	33^5,	50^5,	53^5	39	17	34	7
21	10^5,	17^5,	29^5,	31^5,	35^5	42	23	46	31
40	26^5,	30^5,	32^5,	44^5,	51^5	19	38	15	30
29	6^5,	21^5,	43^5,	54^5,	59^5	58	55	49	37
32	2^5,	7^5,	18^5,	40^5,	55^5	3	6	12	24

485. Proposito ergo quocunque divisore primo formae $10p + 1$, dabitur numerus a, ut $a^5 - 1$ per eum sit divisibilis, quam proprietatem quoque habebunt numeri a^2, a^3, a^4, quorum potestates quintae etiam unitatem relinquunt. Sequentes termini a^5, a^6, etc. ab his non sunt diversi, cum sit $a^5 = n(10p + 1) + 1$, sicque a^5 ipsi 1, a^6 ipsi a, a^7 ipsi a^2 etc. aequivaleat.

486. Cum quinque numeri, quorum potestates quintae per $10p + 1$ divisae unitatem relinquunt, ita repraesentari queant 1, a, a^2, a^3, a^4, si b^5 det residuum α, quinque habebuntur numeri b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, quorum potestates quintae, per $10p + 1$ divisae, idem relinquunt residuum α.

487. Quia idem ad altiores potestates extendi potest, proposito quocunque numero primo $mn + 1$, semper dabitur numerus a, ut $a^m - 1$ per eum sit divisibile; ejusque potestates omnes eadem praeditae erunt proprietate. Erit autem a minor quam divisor $mn + 1$, talesque numeri diversi tot, quot m continet unitates, exhiberi possunt.

488. Proposito porro divisore primo $mn + 1$, si per eum potestates 1^m, 2^m, 3^m, 4^m, etc. dividantur, usque ad $(mn)^m$, plura residua diversa non relinquentur, quam n, ideoque dabuntur $(m - 1)n$ numeri divisore minores, qui non sunt residua.

489. Si post unitatem a sit minimus numerus, cujus potestas a^m, per $mn+1$ divisa, unitatem relinquat, cujusmodi numerus semper datur et quidem unicus; tum si potestas b^m relinquat α, omnium horum numerorum b, ab, a^2b, $a^3b \ldots a^{m-1}b$, quorum multitudo est $=m$, potestates exponentis m idem residuum α relinquent.

490. Si $m=2$, minima potestas a^2, quae per numerum primum $2n+1$ divisa, relinquit unitatem, est ut sequitur

$2n+1$	n	a^2
3	1	2^2
5	2	4^2
7	3	6^2
11	5	10^2

et ita porro; hoc ergo casu semper est $a=2n$.

491. Si $m=3$, potestates a^3, quae per $3n+1$ divisae, unitatem relinquunt, sunt

$3n+1$	n	potestates	$3n+1$	n	potestates
7	2	$1^3,\ 2^3,\ 4^3$	61	20	$1^3,\ 13^3,\ 47^3$
13	4	$1^3,\ 3^3,\ 9^3$	67	22	$1^3,\ 29^3,\ 37^3$
19	6	$1^3,\ 7^3,\ 11^3$	73	24	$1^3,\ 8^3,\ 64^3$
31	10	$1^3,\ 5^3,\ 25^3$	79	26	$1^3,\ 23^3,\ 55^3$
37	12	$1^3,\ 10^3,\ 26^3$	97	32	$1^3,\ 35^3,\ 61^3$
43	14	$1^3,\ 6^3,\ 36^3$	103	34	$1^3,\ 46^3,\ 56^3$.

492. Sit $m=4$ et potestates a^4, quae per $4n+1$ divisae, relinquunt unitatem, sunt

$4n+1$	n	potestates	$4n+1$	n	potestates
5	1	$1^4,\ 2^4,\ 4^4,\ 3^4$	53	13	$1^4,\ 23^4,\ 52^4,\ 30^4$
13	3	$1^4,\ 5^4,\ 12^4,\ 8^4$	61	15	$1^4,\ 11^4,\ 60^4,\ 50^4$
17	4	$1^4,\ 4^4,\ 16^4,\ 13^4$	73	18	$1^4,\ 27^4,\ 72^4,\ 46^4$
29	7	$1^4,\ 12^4,\ 28^4,\ 17^4$	89	22	$1^4,\ 34^4,\ 88^4,\ 55^4$
37	9	$1^4,\ 6^4,\ 36^4,\ 31^4$	97	24	$1^4,\ 22^4,\ 96^4,\ 75^4$
41	10	$1^4,\ 9^4,\ 40^4,\ 32^4$	101	25	$1^4,\ 10^4,\ 100^4,\ 91^4$

493. Si $m=5$, potestates a^5, quae per $5n+1$ divisae, relinquunt 1, sunt, ut ante jam vidimus,

$5n+1$	n	potestates
11	2	$1^5,\ 3^5,\ 9^5,\ 5^5,\ 4^5$
31	6	$1^5,\ 2^5,\ 4^5,\ 8^5,\ 16^5$
41	8	$1^5,\ 10^5,\ 18^5,\ 16^5,\ 37^5$
61	12	$1^5,\ 9^5,\ 20^5,\ 58^5,\ 34^5$
71	14	$1^5,\ 5^5,\ 25^5,\ 54^5,\ 57^5$
101	20	$1^5,\ 36^5,\ 84^5,\ 95^5,\ 87^5$.

494. Sit $m = 6$, et senae potestates a^6, quae per $6n + 1$ divisae, unitatem relinquunt, sunt

$6n+1$	n	potestates					
7	1	1^6,	2^6,	4^6,	6^6,	5^6,	3^6
13	2	1^6,	3^6,	9^6,	12^6,	10^6,	4^6
19	3	1^6,	7^6,	11^6,	18^6,	12^6,	8^6

hic scilicet eaedem potestates, quae pro casu $m = 3$ prodeunt, quibus totidem, ex radicibus negativis ortae, sunt adjiciendae.

495. Sit $m = 7$, et potestates a^7, quae per $7n + 1$ divisae, unitatem relinquunt, sunt

$7n+1$	n	potestates						
29	4	1^7,	7^7,	20^7,	24^7,	23^7,	16^7,	25^7
43	6	1^7,	4^7,	16^7,	21^7,	41^7,	35^7,	11^7
71	10	1^7,	20^7,	45^7,	48^7,	37^7,	30^7,	32^7
113	16	1^7,	16^7,	30^7,	28^7,	109^7,	49^7,	106^7.

496. Jam observavimus, uno horum numerorum cognito, reliquos ex ejus potestatibus oriri. Verum methodus talem numerum investigandi haec promptissima videtur: Proposito divisore primo $mn + 1$, quaerantur duae potestates a^m et b^m idem residuum praebentes; tum quaeratur x, ut sit $x = \frac{b + p(mn+1)}{a}$, et x^m unitatem relinquet. Semper autem p ita capi potest, ut x fiat numerus integer.

497. Si divisore existente $mn + 1$, potestates exponentis m unitatem relinquentes sint

$$1^m, \alpha^m, \beta^m, \gamma^m, \delta^m, \text{ etc. numero } m,$$

tum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erunt residua ex progressione geometrica $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, etc. orta; erunt ergo etiam ex serie potestatum $1^n, 2^n, 3^n, 4^n, 5^n, 6^n$, etc. nata.

498. En ergo methodum facillimam unum saltem numerum α inveniendi, ut $\alpha^m - 1$ per $mn + 1$ fiat divisibile, scilicet pro α semper sumi potest 2^n, seu residuum ex hac potestate binarii ortum, quin etiam valores idonei ex 3^n, 5^n, etc. peti possunt; cognito autem uno, reliqui facile innotescunt.

499. Si divisore primo existente $mn + 1$, in residuis potestatum $1, 2^n, 3^n, 4^n$, etc. occurrat numerus N, ibi quoque occurret numerus Na^n; dabiturque numerus x, ut $x^n - Na^n$ per $mn + 1$ fiat divisibile, eritque etiam $N^m - 1$ per $mn + 1$ divisibile.

500. Vicissim autem, si $N^m - 1$ per $mn + 1$ est divisibile, erit N residuum potestatis cujusdam x^n; si enim esset non-residuum, omnia reliqua non-residua pari essent praedita proprietate, ideoque omnes numeri; forentque omnes hi numeri $1^m - 1$, $2^m - 1$, $3^m - 1$, etc. divisibiles per $mn + 1$, quod autem fieri nequit.

501. Posito divisore primo $mn + 1$, sint potestatum $1^m, 2^m, 3^m, 4^m$, etc. residua $1, A, B, C, D$, etc., potestatum vero $1^n, 2^n, 3^n, 4^n$, etc. residua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., ac potestates omnes

$$1^m, \alpha^m, \beta^m, \gamma^m, \delta^m, \text{ etc.}$$

residuum relinquent 1; hae vero potestates $1^n, A^n, B^n, C^n$, etc. residuum relinquent 1, ideoque hae formae $\alpha^m - A^n$ erunt divisibiles per $mn + 1$.

Pagina intercalata.

Tentamen demonstrationis, quod si divisor primus sit 8q+7, *in residuis reperiatur* 2. Ponamus esse in residuis 2, et cum ibidem sit $(2q+m)^2$, erit quoque $8qq+8mq+2mm$, hincque

$$8mq+2mm-7q \quad \text{et} \quad 2mm-7m-7q \quad \text{et} \quad 2mm-7m+q+7,$$

quod si nunquam fiat non-residuum, patebit propositum. At non-residua repraesentari possunt per quadrata negativa, quorum dupla etiam erunt residua per hypothesin; sit ergo

$$2mm-7m+q+7=-2aa+8bq+7b, \text{ fietque}$$

$$q=\frac{2aa+2mm-7m+7-7b}{8b-1} \quad \text{et} \quad 8q+7=\frac{(4a)^2+(4m-7)^2}{8b-1},$$

foretque $8q+7$ divisor ipsius $(4a)^2+(4m-7)^2$, quod cum fieri nequit, sequitur ex residuo 2 nullum deduci absurdum, cujusmodi necessario resultare deberet, si 2 non esset residuum. (*)

Theorema. Si divisor $12q+11$, erit 3 residuum.

Ponamus 3 esse residuum, ac si nullum absurdum inde sequatur, pro vero erit habendum. Erit ergo -3 non-residuum, et omnia non-residua $-3aa$. At residuum est $(2q+m)^2$ et $12qq+12mq+3mm$, hincque $3mm-11q-11m$, item $3mm+q-11m+11$, quod nunquam potest esse non-residuum $-3aa$: ponatur enim

$$3mm-11m+11+q=-3aa+12bq+11b, \text{ erit}$$

$$q=\frac{3aa+3mm-11m+11-11b}{12b-1}, \quad \text{unde fit} \quad 12q+11=\frac{(6a)^2+(6m-11)^2}{12b-1},$$

quod cum sit absurdum, $3mm-11m+11+q$ nunquam inter non-residua continebitur.

Vel ita pro divisore $8q+7$.

Si 2 esset non-residuum, in genere $2mm-7m-7q\pm\alpha(8q+7)$ esset non-residuum; in genere autem residuum est $(4q+n)^2=16qq+8nq+nn=8nq+nn-14q=nn-14q-7n=nn+2q-7n+14\pm\beta(8q+7)$, omnes ergo numeri continerentur in alterutra harum formularum:

$$2mm-7m-7q\pm\alpha(8q+7)$$
$$nn-7n-14q\pm\beta(8q+7).$$

Si unicus assignari posset numerus, hic non contentus, demonstratio esset perfecta; vel si idem numerus in utraque contineretur, quod fit si, posito $m=f+g$, $n=f+2g$, fuerit $ff-2gg+7g+7q$ divisibile per $8q+7$.

(*) *Script. ad marg.* Si $2mm-7m+q+7$ ponatur $=-aa$, fit

$$8q+7=\frac{2(2a)^2+(4m-7)^2}{8b-1},$$

nunc demonstrandum restat $2xx+yy$ nunquam divisibile esse per $8q+7$.

Nota altera, ut videtur, huc pertinens. $8xx-(2y+1)^2$ alios divisores primos non habet, nisi formae $8n-1$ et $8n+1$

$\frac{8xx-1}{7}$ int. si $x=7a\pm1$, $\frac{8xx-1}{23}$ int. si $x=23a\pm7$, $\frac{8xx-1}{31}$ int. si $x=31a\pm2$

$\frac{8xx-1}{47}$ . . $x=47a\pm10$, $\frac{8xx-1}{17}$ . . $x=17a\pm7$, $\frac{8xx-1}{41}$ . . $x=41a\pm6$.

Caput XIV.

De residuis, ex divisione quadratorum per numeros compositos ortis.

502. Sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. residua, quae ex divisione quadratorum per numerum primum $2p+1$ oriuntur, quorum numerus est $=p$; ac videamus primo, quaenam residua oriantur, si divisio fiat per duplum $2(2p+1)$, atque hic quidem excludamus quadrata paria; tantum enim ea quadrata, quae ad divisorem sunt prima, consideremus.

503. Multitudo autem quadratorum, quorum radices sunt divisore minores, est $=2p$, et quoniam quadrata aa et $(4p+2-a)^2$ idem relinquunt residuum, multitudo residuorum diversorum major esse nequit quam p; erit ergo vel $=p$, vel minor quam p.

504. Minor scilicet esset, si darentur duo quadrata aa et bb, ut non esset $b=4p+2-a$, quae idem relinquerent residuum. Foret autem tum $bb-aa=(b-a)(b+a)$ divisibile per $2(2p+1)$, et alter factor per 2, alter per $2p+1$ divisibilis esse deberet. At uno existente pari, alter quoque erit par, ideoque per totum divisorem divisibilis, unde foret $b=2(2p+1)-a$.

505. Multitudo ergo residuorum diversorum, quae quidem ex quadratis ad divisorem primis oriuntur, erit $=p$, totidem numero, quot ex divisore primo $2p+1$ nascuntur. Ac si residua, ex divisore $2(2p+1)$ orta, sint $1, A, B, C, D$, etc., eorum numerus est $=p$, et ibidem occurrent producta ex binis.

506. Dantur autem $2p$ numeri ad hunc divisorem primi eoque minores, unde cum eorum tantum semissis residua constituat, alter semissis dabit ordinem non-residuorum, quae si sint $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc., eorum numerus erit $=p$, et producta ex horum binis iterum fient residua.

507. Contemplemur quaedam exempla, in iisque tam residua, quae ex divisore primo $2p+1$, quam ex ejus duplo $2(2p+1)$ nascuntur, simulque apponamus non-residua ad divisorem prima:

divisor	3	6	5	10	7	14
residua	1	1	1, 4,	1, 9	1, 2, 4	1, 9, 11
non-residua	2	5	2, 3,	3, 7	3, 5, 6	3, 5, 13

divisor	11	22
residua	1, 3, 9, 5, 4	1, 9, 3, 5, 15
non-residua	2, 6, 7, 8, 10	7, 13, 17, 19, 21

divisor	13	26
residua	1, 3, 4, 9, 10, 12	1, 3, 9, 17, 23, 25
non-residua	2, 5, 6, 7, 8, 11	5, 7, 11, 15, 19, 21

divisor	17	34
residua	1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16	1, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 33
non-residua	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14	3, 5, 7, 11, 23, 27, 29, 31

508. Repraesentemus rem in genere:

divisor	$2p+1$	$2(2p+1)$
residua	$1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.	$1, A, B, C, D$, etc.
non-residua	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$, etc.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, etc.

et primo observamus omnia residua divisoris $2(2p+1)$, vel ipsa, vel numero $2p+1$ minuta constituere residua divisoris $2p+1$.

509. Scilicet vel A, vel $A-(2p+1)$ in residuis $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. occurrit. Cum enim detur quadratum impar aa, ut sit $aa-A$ per $2(2p+1)$ divisibile, erit quoque per $2p+1$ divisibile, unde A etiam inter residua divisoris $2p+1$ reperiatur necesse est, vel $A-(2p+1)$, si fuerit $A>2p+1$.

510. Numeri porro impares seriei $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. in serie $1, A, B, C, D$, etc. occurrunt, pares autem ibi non reperiuntur, at vero iidem aucti numero $2p+1$. Sit enim α numerus impar, et cum $aa-\alpha$ sit divisibile per $2p+1$, erit $aa-\alpha=n(2p+1)$. Jam a vel est par, vel impar. Si impar, erit $aa-\alpha$ par, ac propterea etiam n par, sicque $aa-\alpha$ divisibile erit per $2(2p+1)$.

511. At si a sit par, erit $2p+1-a$ impar, atque etiam $(2p+1-a)^2-\alpha=n(2p+1)$, ubi n fiet par, ita ut haec formula quoque per $2(2p+1)$ sit divisibilis; unde si α sit numerus impar, certe inter residua $1, A, B, C$, etc. continebitur.

512. At si α sit numerus par, ejus loco inter residua divisoris $2p+1$ considerari potest $\alpha+2p+1$, qui cum sit impar, ob rationes allatas etiam inter residua divisoris $2(2p+1)$ reperiri debet.

513. Datis ergo residuis $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc., ex divisore primo $2p+1$ ortis, ex iis statim concinnari potest series residuorum $1, A, B, C$, etc. ex duplo divisore ortorum $2(2p+1)$, illorum scilicet, quae sunt imparia, ipsa ponendo, paria autem numero $2p+1$ augendo.

514. Simili modo ex serie non-residuorum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. divisori $2p+1$ respondentium formabitur series non-residuorum divisori $2(2p+1)$ respondentium, dum imparia ipsa sumuntur, paria vero numero $2p+1$ augentur.

De divisore $4(2p+1)=d$.

515. Multitudo numerorum hoc divisore minorum ad eumque primorum est $2.1.2p=4p$, et non solum quadrata aa et $(d-a)^2$ idem relinquunt residuum, sed dantur praeterea duo alia bb et $(d-b)^2$. Fieri enim potest $bb-aa=(b-a)(b+a)=4n(2p+1)$, sumendo $b-a=2n$ et $b+a=2(2p+1)$, unde fit $b=2(2p+1)-a$, sicque quaternorum quadratorum, idem residuum relinquentium, radices sunt: $a,\ 2(2p+1)-a,\ 2(2p+1)+a,\ 4(2p+1)-a$.

516. Plura autem quam quatuor dari non possunt, unde hoc casu numerus residuorum tantum est p, uti pro divisore primo $2p+1$; at numerus non-residuorum est $3p$, ut ex subjunctis exemplis videre licet:

divisor	3	12	5	20	7	28
residua	1	1	1, 4	1, 9	1, 2, 4	1, 9, 25
non-residua	2	5 7 11	2, 3	3, 7 11, 19 13, 17	3, 5, 6	3, 27, 19 5, 17, 13 11, 15, 23

	11	44
divisor	11	44
residua	1, 3, 9, 5, 4	1, 9, 25, 5, 37
non-residua	2, 6, 7, 8, 10	3, 27, 31, 15, 23 7, 19, 43, 35, 39 13, 29, 17, 21, 41

divisor	13	52
residua	1, 3, 4, 9, 10, 12	1, 9, 25, 49, 29, 17
non-residua	2, 5, 6, 7, 8, 11	3, 27, 23, 43, 35, 51 5, 45, 21, 37, 41, 33 7, 11, 19, 31, 47, 15.

517. Sint pro divisore $2p+1$ residua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. et pro divisore $4(2p+1)$ residua $1, A, B, C, D$, etc. multitudine aequalia; ac primo patet ex his residuis illa reperiri, scilicet ex serie $1, A, B, C, D$, etc., quae sunt minora quam $2p+1$, ipsa in serie $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. continentur; quae vero sunt majora, minui debent numero $2p+1$, vel ejus duplo, vel ejus triplo.

518. Deinde observo inter residua $1, A, B, C, D$, etc. nullum numerum hujus formae $4q-1$ contineri. Cum enim quadratum aa, demto numero $4q-1$, nequeat esse divisibile per 4, fieri non potest, ut sit $aa-(4q-1)$ multiplum ipsius $4(2p+1)$, unde numeri 3, 7, 11, 15, 19, 23 semper sunt inter non-residua.

519. Si in serie $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrat numerus impar formae $4q+1$, idem quoque in serie $1, A, B, C, D$, etc. occurret; nam si $aa-(4q+1)$ sit divisibile per $2p+1$, quoque divisibile erit $(2p+1\pm a)^2-(4q+1)$; et quia numerorum a et $2p+1\pm a$ alter certe est par, alter impar, sumatur a impar, et $aa-(4q+1)$ per 4 erit divisibile, unde etiam per $4(2p+1)$, ita ut pro hoc divisore $4q+1$ futurum sit residuum.

520. At si numerus impar $4q-1$ sit residuum divisoris $2p+1$, non erit residuum divisoris $4(2p+1)$, uti jam vidimus; tum vero $2(2p+1)+4q-1$, quia redit ad formam $4r+1$, certe inter residua divisoris $4(2p+1)$ continebitur.

521. Si numerus par $2q$ sit residuum divisoris $2p+1$, tum vel

$$2q+2p+1, \quad \text{vel} \quad 2q+3(2p+1)$$

erit residuum divisoris $4(2p+1)$, prout vel hic, vel ille numerus fuerit formae $4r+1$, alter enim formae $4r-1$ semper excluditur.

522. Scilicet si sit $p=2m$, et $4m+1$ numerus primus, si $4q$ sit residuum divisoris $4m+1$, tum $4q+4m+1$ erit residuum divisoris $4(4m+1)$; at si $4q+2$ residuum divisoris $4m+1$, tum $4q+2+3(4m+1)$ erit residuum divisoris $4(4m+1)$.

523. Sit $p=2m-1$ et $4m-1$ numerus primus: Si $4q$ sit residuum divisoris $4m-1$, tum $4q+3(4m-1)$ erit residuum divisoris $4(4m-1)$. At si $4q+2$ sit residuum divisoris $4m-1$, tum $4q+2+4m-1=4q+4m+1$ erit residuum divisoris $4(4m-1)$.

524. Ope harum regularum ex singulis residuis divisoris primi $2p+1$ totidem residua divisoris $4(2p+1)$ reperiuntur; unumquodque enim vel ipsum, vel auctum numero $2p+1$, vel $2(2p+1)$, vel $3(2p+1)$, ut prodeat numerus formae $4q+1$, erit residuum divisoris $4(2p+1)$.

525. Ex quovis autem residuo divisoris $2p+1$ unum quoque non-residuum pro divisore $4(2p+1)$ elicitur, formae $4q-1$; tum vero ex quovis non-residuo divisoris $2p+1$ bina non-residua pro divisore $4(2p+1)$ prodeunt; si enim illud sit par, addendo $2p+1$ et $2(2p+1)$, sin sit impar, addendo 0 et $2(2p+1)$ duo non-residua obtinentur.

De divisore $8(2p+1)=d$.

526. Hic semper octo dantur numeri minores quam d, quorum quadrata per d divisa relinquunt idem residuum, scilicet uno numero existente a, reliqui septem sunt

$$2(2p+1)\pm a,\quad 4(2p+1)\pm a,\quad 6(2p+1)\pm a,\quad 8(2p+1)-a$$

neque plures exhiberi possunt.

527. Quare cum multitudo numerorum, ipso d minorum ad eumque primorum sit $=4.1.2p=8p$, horumque octoni idem praebeant residuum, manifestum est numerum residuorum diversorum fore $=p$, non-residuorum vero $=7p$.

528. Deinde patet inter residua occurrere non posse ullum numerum formae $4q-1$, vel alterutrius hujus $8q-1$, $8q-5$; neque vero etiam inter residua esse potest numerus formae $8q+5$, propterea quod forma $xx-(8q+5)$ nunquam per 8 neque ergo per $8(2p+1)$ dividi potest, quia est $xx=8n+1$ ob x imparem.

529. Alia igitur residua non locum habent, nisi quae sint formae $8n+1$, et quia divisor est $16p+8$, pro n sumi possunt omnes numeri ab 0 usque ad $2p$. At ex forma $8n+1$ excluditur vel $2p+1$, vel $3(2p+1)$, vel $5(2p+1)$, vel $7(2p+1)$, quae scilicet est formae $8n+1$, ita ut tantum $2p$ hujusmodi numeri relinquantur, quorum autem semissis solum residua constituit.

530. Ex his autem numeris formae $8n+1$, quorum multitudo est $2p$, si unicus constet, qui sit non-residuum, eo per singula residua multiplicando obtinentur reliqua non-residua numero p, praeterea vero reliqui numeri impares sive formae $8n+3$, sive $8n+5$, sive $8n+7$ suppeditant adhuc $6p$ residua.

531. Divisor ergo $8(2p+1)$ totidem praebet residua, quot divisor $2p+1$, quae si sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ex singulis residua divisoris $8(2p+1)$ elicientur, addendo ejusmodi multiplum ipsius $2p+1$, ut aggregatum fiat formae $8n+1$, veluti ex hoc exemplo videre licet:

Pro divisore 13, residua	1,	3,	4,	9,	10,	12
adde	0,	6.13,	13,	0,	3.13,	13
pro divisore 104, residua	1,	81,	17,	9,	49,	25.

532. Si pro divisore $8(2p+1)$ fuerit residuum A, erit A^p-1 divisibile per $8(2p+1)$; ac si hoc evenerit, erit A vicissim residuum quadratorum. Scilicet si A^p-1 sit divisibile per $8(2p+1)$, semper assignari potest quadratum xx, ut sit $xx-A$ divisibile per $8(2p+1)$.

De divisore $3(2p+1)=d$.

533. Multitudo numerorum hoc divisore minorum et ad eum primorum est $=2.2p=4p$, inter quos duo ad minimum sunt, quorum quadrata idem residuum relinquunt, scilicet a^2 et $(d-a)^2$, unde numerus diversorum residuorum major quam $2p$ esse nequit.

534. Praeterea vero cum a per 3 non sit divisibile, vel $2p+1-2a$, vel $2(2p+1)-2a$ per 3 erit divisibile, sit quotus $=m$, et quadratum numeri $3m+a$ idem relinquet residuum, ergo vel $2p+1-a$, vel $2(2p+1)-a$, indeque praeterea vel $2(2p+1)+a$, vel $2p+1+a$ idem quoque residuum relinquet.

535. Hoc modo cum semper quaterna quadrata idem dent residuum, numerus residuorum diversorum erit tantum $=p$, ideoque idem ac pro divisore $2p+1$. In residuis autem nequit esse ullus numerus formae $3n-1$, cum nullum quadratum, tali numero minutum, per 3, neque ergo per $3(2p+1)$ dividi queat.

536. Omnia ergo residua divisoris $3(2p+1)$ erunt numeri formae $3n+1$, et si residua divisoris $2p+1$ sint $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. quodlibet vel ipsum, vel numero $2p+1$, vel $2(2p+1)$ auctum, quo prodeat numerus formae $3n+1$, erit residuum divisoris $3(2p+1)$.

Pro divisore $(2p+1)(2q+1)=d$.

537. Sint pro divisore $2p+1$ residua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. numero $=p$, et pro divisore $2q+1$ residua $1, \pi, \varrho, \sigma, \tau$, etc. numero $=q$, ac numeri utrique ordini communes erunt residua divisoris $d=(2p+1)(2q+1)$.

538. At ad priorem ordinem pertinere censendus est numerus $m(2p+1)+\alpha$, ubi m ita potest definiri, ut fiat aequalis vel $n(2q+1)+1$, vel $n(2q+1)+\pi$, etc., sicque ex quovis residuo divisoris $2p+1$ producuntur q residua divisoris $2q+1$, sicque omnino pq residua diversa pro divisore $(2p+1)(2q+1)$ obtinentur.

539. Sit hujusmodi divisor compositus $5.7=35$, et cum sint residua pro divisore 5 haec duo $1, 4$, et pro 7 haec tria $1, 2, 4$; ergo pro divisore 35 residua erunt $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, quae scilicet vel in forma $5m+1$, vel $5m+4$ continentur. Erunt ergo haec residua numero sex: 1, 29; 9, 16; 4, 11.

540. Cum pro divisore $(2p+1)(2q+1)$ tantum dentur pq residua diversa, quaterna quadrata idem praebebunt residuum, quorum unum si sit $=aa$, reliquorum trium radices erunt:

$$(2p+1)(2q+1)-a, \quad m(2p+1)-a, \quad n(2p+1)+a,$$

sumendis numeris m et n ita, ut $m(2p+1)-2a$ et $n(2p+1)+2a$ dividi queant per $2q+1$, quod ob $2p+1$ et $2q+1$ primos inter se, semper fieri potest, ut m et n sint minores quam $2q+1$.

Caput XV.

De divisoribus numerorum formae $xx+yy$.

541. Hinc primo excludo casus, quibus numeri x et y habent communem divisorem; si enim maximus communis divisor esset $=\varphi$ et $x=p\varphi$ et $y=q\varphi$, ut p et q forent primi inter se, haberetur $xx+yy=(pp+qq)\varphi\varphi$, et inventio divisorum reduceretur ad formam $pp+qq$.

542. Sint ergo x et y primi inter se, atque evenire potest, ut $xx+yy$ fiat numerus primus, cui probando vel unicus casus sufficeret, quorum simplicissimus est 2. Ut autem $xx+yy$ fiat numerus primus, statim excluduntur casus, quibus ambo numeri x et y sunt impares.

543. Ponatur ergo alter par, alter impar, et evidens est omnes numeros primos $xx+yy$ in hac forma $4n+1$ contineri debere, sicque nullus numerus formae $4n-1$ duorum quadratorum summa esse potest.

544. Sin autem x et y sint numeri impares, seu $x=2p+1$ et $y=2q+1$, fieri poterit ut semissis $\frac{xx+yy}{2}=2pp+2p+2qq+2q+1$ fiat numerus primus. At est

$$2pp+2p+2qq+2q+1=(p+q+1)^2+(p-q)^2,$$

iterum summa duorum quadratorum, quorum alterum par, alterum impar, ob summam radicum $2p+1$ imparem.

545. Si summa duorum quadratorum $aa+bb$ per aliam summam duorum quadratorum $cc+dd$ multiplicetur, productum $(aa+bb)(cc+dd)$ iterum erit summa duorum quadratorum, cum sit $=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$, quod ob ambiguitatem signi duplici modo evenire potest.

546. Hic inversa propositio se offert: si summa duorum quadratorum $pp+qq$ divisionem admittat per summam duorum quadratorum $aa+bb$, fore etiam quotum duorum quadratorum summam, cujus veritas autem inde non sequitur, sed peculiarem demonstrationem requirit.

547. Ad hoc demonstrandum primum animadverto formam $pp+qq$ per $aa+bb$ esse divisibilem; quanticunque sint numeri p et q, semper eos reduci posse ad numeros minores quam $aa+bb$, atque adeo quam $\frac{1}{2}(aa+bb)$, cum si $pp+qq$ sit divisibile per $aa+bb$, etiam

$$(\pm\alpha(aa+bb)\pm p)^2+(\pm\beta(aa+bb)\pm q)^2$$

divisibile evadat.

548. At si $\frac{pp+qq}{aa+bb}$ sit summa duorum quadratorum $cc+dd$, seu $p=ac+bd$ et $q=ad-bc$, sumendo $p=ac+bd+\alpha(aa+bb)$ et $q=ad-bc+\beta(aa+bb)$, tum $pp+qq$ utique per $aa+bb$ divisionem admittet, eritque quotus

$$=cc+dd+2\alpha(ac+bd)+2\beta(ad-bc)+(\alpha\alpha+\beta\beta)(aa+bb),$$

qui etiam est summa duorum quadratorum $(c+\alpha a-\beta b)^2+(d+\alpha b+\beta a)^2$.

549. Verum haec altius sunt petenda; dico ergo primo, si divisor $aa+bb$ sit numerus primus, per quem forma $pp+qq$ sit divisibilis, quotum esse summam duorum quadratorum; quod etsi in genere verum est, existente $aa+bb$ etiam numero composito, tamen demonstratio ab hoc casu derivanda videtur.

550. Cum a et b sint numeri primi inter se, ad eos p ita referri potest, ut sit $p=ma-nb$, idque infinitis modis, jam si esset $q=na+mb$, foret utique $\frac{pp+qq}{aa+bb}=mm+nn$; at si non sit $q=na+mb$, ponatur $q=na+mb+s$, eritque

$$pp+qq=(aa+bb)(mm+nn)+2s(na+mb)+ss.$$

551. Cum ergo $2s(na+mb)+ss$ sit divisibile per $aa+bb$, vel s, vel $s+2(na+mb)$ divisibile sit necesse est. Priori casu ponatur $s=t(aa+bb)$, erit

$$\frac{pp+qq}{aa+bb} = mm + nn + t\,(t\,(aa+bb) + 2\,(na+mb))$$
$$= mm + 2mbt + ttbb + nn + 2nat + aatt = (m+bt)^2 + (n+at)^2,$$
ideoque summa duorum quadratorum.

552. Altero casu ponatur $s + 2\,(na+mb) = t\,(aa+bb)$, erit $s = t\,(aa+bb) - 2\,(na+mb)$, ideoque $\frac{pp+qq}{aa+bb} = mm + nn + tt\,(aa+bb) - 2t\,(na+mb) = (m-bt)^2 + (n-at)^2$, ita ut utroque casu quotus sit summa duorum quadratorum.

553. Si ergo $pp+qq$ sit divisibile per numerum primum $aa+bb$, demonstratum est quotum esse quoque summam duorum quadratorum. Hinc si quotus non esset summa duorum quadratorum, divisor non foret numerus primus formae $aa+bb$, hoc est, vel si esset primus, non esset formae $aa+bb$, vel si esset formae $aa+bb$, non esset primus; vocabula autem quoti et divisoris inter se permutare licet.

554. Denotent, brevitatis gratia, litterae A, B, C, D, etc. numeros primos formae $aa+bb$, et si summa duorum quadratorum $pp+qq$ divisibilis sit per talium numerorum productum ABC, quotus quoque erit summa duorum quadratorum. Est enim $\frac{pp+qq}{A} = rr+ss$, tum vero

$$\frac{rr+ss}{B} = tt+uu, \quad \text{atque} \quad \frac{tt+uu}{C} = xx+yy, \quad \text{unde fit} \quad \frac{pp+qq}{ABC} = xx+yy.$$

555. Si ergo summa duorum quadratorum $pp+qq$ divisibilis esset per numerum non-summam duorum quadratorum, quotus, si esset primus, non foret summa duorum quadratorum, et si esset compositus, non foret productum ex talibus numeris primis, qui singuli essent summae duorum quadratorum.

556. Quare si summa duorum quadratorum $pp+qq$ unum habeat factorem, qui non sit summa duorum quadratorum, inter reliquos factores primos ad minimum unus, qui etiam non sit summa duorum quadratorum, reperiatur necesse est.

557. Nunc igitur investigemus, an summa duorum quadratorum $pp+qq$ inter se primorum per ullum numerum $\mathfrak{A}$, qui non sit summa duorum quadratorum, divisibilis esse queat. Ad hoc sumamus $pp+qq$ divisibile esse per talem numerum $\mathfrak{A}$, atque etiam $(p-m\mathfrak{A})^2+(q-n\mathfrak{A})^2$ divisibile erit per $\mathfrak{A}$ (*).

558. Poterit ergo talis summa duorum quadratorum $pp+qq$ exhiberi, quorum radices p et q minores sint quam $\mathfrak{A}$, quin etiam minores quam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$; cum etiam $(\mathfrak{A}-p)^2+(\mathfrak{A}-q)^2$ divisionem admittere debeat, quorum quadratorum radices minores erunt quam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$, si p et q eo essent majores.

559. Dabitur ergo summa duorum quadratorum $pp+qq$ minor quam $\frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ (cum sit $p<\frac{1}{2}\mathfrak{A}$ et $q<\frac{1}{2}\mathfrak{A}$) per numerum $\mathfrak{A}$ divisibilis; ponatur quotus $=\mathfrak{B}$, qui etiam vel ipse non erit summa duorum quadratorum, vel factorem talem habebit, eritque $\mathfrak{B}<\frac{1}{2}\mathfrak{A}$.

560. Cum jam $pp+qq$ divisibile sit per $\mathfrak{B}$, exhiberi poterit summa duorum quadratorum $rr+ss$ minor quam $\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$, divisibilis per $\mathfrak{B}$, et quotus $\mathfrak{C}$, qui erit minor quam $\frac{1}{2}\mathfrak{B}$, pariter non erit summa duorum quadratorum, per quem cum divisibilis sit $rr+ss$, dabitur $tt+uu<\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ divisibilis per $\mathfrak{C}$, et quotus $\mathfrak{D}<\frac{1}{2}\mathfrak{C}$ itidem non erit summa duorum quadratorum.

(*) *Script. ad marg.* Quorum radices, si p et q sint primi inter se, etiam erunt primae inter se.

561. Hoc modo tandem pervenietur ad summam duorum quadratorum quantumvis parvam, quae foret divisibilis per numerum non-summam duorum quadratorum, quod cum sit absurdum, necessario sequitur, summam duorum quadratorum inter se primorum non esse divisibilem per ullum numerum, qui ipse non sit summa duorum quadratorum.

562. Proposito autem numero primo quocunque formae $4n+1$, quia inter residua quadratorum est -1, vel $4n$, semper summa duorum quadratorum per eum divisibilis exhiberi potest, unde sequitur omnes numeros primos formae $4n+1$ esse summas duorum quadratorum.

563. Deinde cum numeri formae $4n-1$ nunquam esse possint summae duorum quadratorum, nulla summa duorum quadratorum inter se primorum per ullum talem numerum $4n-1$ divisibilis esse potest.

564. Desideratur autem demonstratio succinctior, qua probetur, si summa duorum quadratorum $pp+qq$ divisibilis fuerit per summam duorum quadratorum $aa+bb$, quotum necessario quoque esse summam duorum quadratorum, quod sequenti ratiocinio perficere tentemus.

565. In divisore $aa+bb$ numeros a et b inter se primos assumere licet; si enim non essent primi inter se, sublatione communis factoris tales redderentur; erit ergo $aa+bb$ tam ad a quam ad b primus. Unde quicunque numeri fuerint p et q, ii ita repraesentari poterunt

$$p=m(aa+bb)\pm fa \quad \text{et} \quad q=n(aa+bb)\pm gb,$$

id quod infinitis modis fieri potest.

566. Cum igitur $pp+qq$ sit divisibile per $aa+bb$, etiam $ffaa+ggbb$ per $aa+bb$ erit divisibile, atque ob illas infinitas resolutiones, omnes casus, quibus $ffaa+ggbb$ per $aa+bb$ divisibile evadit, prodire debent, ergo etiam casus $g=f$ prodeat necesse est, quoniam hoc divisio succedit. (*)

567. Hoc concesso habebimus $p=m(aa+bb)\pm fa$ et $q=n(aa+bb)\pm fb$; unde fit

$$\frac{pp+qq}{aa+bb}=\left\{\begin{matrix} mm(aa+bb)\pm 2fma \\ nn(aa+bb)\pm 2fnb \end{matrix}\right. + ff,$$

quae expressio est $=(f\pm ma\pm nb)^2+(\pm na\mp mb)^2$, ideoque summa duorum quadratorum.

568. Hinc ergo statim sequitur, si quotus non sit summa duorum quadratorum, neque divisorem talem esse posse, neque ergo productum ex duobus numeris, quorum alter est summa duorum quadratorum, alter secus, summa duorum quadratorum esse potest.

569. Conjunctis cum hisce, quae ante § 558 et seqq. sunt proposita, evincitur summam duorum quadratorum inter se primorum nullos habere divisores, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum, tum vero omnes numeros primos formae $4n+1$ esse summas duorum quadratorum.

(*) *Script. ad marg.* Hic dubium esse potest, an casus $g=f$ necessario ex divisibilitate formulae $pp+qq$ sequatur. Hoc dubium est fundatum, nam sit

$$a=7,\ b=4,\ p=17,\ q=6, \quad \text{erit} \quad aa+bb=65,\ pp+qq=325;$$

fieri autem nequit $17=65m\pm 7f$ simul $6=65n\pm 4f$, unde haec posterior demonstratio rejicienda. $\frac{17^2+6^2}{7^2+4^2}=1^2+2^2$, etsi nullo modo sit $17=1.7\pm 2\,4$, vel $17=2.7\pm 1.4$.

570. Si numerus quispiam N duplici modo est summa duorum quadratorum, scilicet

$$N = aa + bb = cc + dd,$$

tum non est primus. Cum enim sit $aa - cc = dd - bb$, erit $d + b = \frac{m(a+c)}{n}$ et $d - b = \frac{n(a-c)}{m}$, unde $b = \frac{m(a+c)}{2n} - \frac{n(a-c)}{2m}$, hinc

$$N = aa + bb = \frac{(mm+nn)}{4mmnn}(nn(a-c)^2 + mm(a+c)^2) = \frac{(mm+nn)}{4mm}((a-c)^2 + (b+d)^2),$$

ubi denominatoris factorem tollere nequit. (*)

Caput XVI.

De divisoribus numerorum formae $xx+2yy$.

571. Sumtis x et y inter se primis, vel ambo sunt impares, vel alteruter tantum par, ergo vel x, vel y erit par; ex quo tres resultant casus considerandi, qui cujusmodi numeros ratione paritatis et imparitatis praebeant, investigasse juvabit.

572. Si ambo numeri x et y sint impares, eorum quadrata sunt numeri formae $8n+1$, fietque $xx+2yy$ numerus formae $8n+3$; sin autem x impar et y par, ob

$$xx = 8m+1 \quad \text{et} \quad 2yy = 2.4n,$$

fiet $xx+2yy$ numerus formae $8n+1$.

573. Si x sit par et y impar, ponatur $x = 2z$, et fiet $xx+2yy = 2(2zz+yy)$; jam cum y sit impar, prout z fuerit vel par, vel impar, erit vel

$$xx+2yy = 2(8n+1), \quad \text{vel} \quad xx+2yy = 2(8n+3).$$

574. Omnes ergo numeri in forma $xx+2yy$ contenti, dum x et y sunt primi inter se, vel saltem non ambo pares, si fuerint impares, pertinebunt vel ad formam $8n+1$, vel ad $8n+3$; sin autem illi numeri sint pares, vel ad formam $2(8n+1)$, vel ad $2(8n+3)$ erunt referendi, et casu hoc posteriori eorum semisses, scilicet $2zz+yy$ sunt etiam numeri formae $xx+2yy$.

575. Numeri ergo impares, qui sunt vel formae $8n+5$, vel formae $8n+7$, certe non sunt numeri formae $xx+2yy$, neque etiam dupla earum formarum in hac continentur, unde infiniti dantur numeri in forma $xx+2yy$ non contenti.

576. Productum autem duorum numerorum hujus formae in eadem forma continentur; est enim $(aa+2bb)(cc+2dd) = (ac \pm 2bd)^2 + 2(ad \mp bc)^2$, unde simul patet talia producta duplici modo in ista forma contineri.

577. Jam demonstrandum est, si numerus $pp+2qq$ dividi queat per $aa+2bb$, fore quotum

(*) *Script. ad marg.* $(a+c)(a-c) = (b+d)(d-b) = pqrs$, $a+c = pq$, $a-c = rs$, $b+d = pr$, $d-b = qs$; $a = \frac{pq+rs}{2}$, $b = \frac{pr-qs}{2}$, $aa+bb = \frac{1}{4}(pp+ss)(qq+rr)$.

etiam istius formae. Notetur hic ob a et b primos ad $aa + 2bb$, infinitis modis fieri posse

$$p = m(aa + 2bb) \pm fa \quad \text{et} \quad q = n(aa + 2bb) \pm gb,$$

hincque fore $ffaa + 2ggbb$ per $aa + 2bb$ divisibile.

578. Si concedatur hoc modo omnes formulas $ffaa + 2ggbb$ per $aa + 2bb$ divisibiles obtineri, ibi etiam continebitur casus $gg = ff$, seu $g = \pm f$, unde prodit

$$\frac{pp+2qq}{aa+2bb} = \begin{cases} mm\,(aa + 2bb) \pm 2mfa \\ 2nn\,(aa + 2bb) \pm 4ngb \end{cases} + ff = (f \pm ma \pm 2nb)^2 + 2\,(mb \mp na)^2.$$

579. Hoc autem, quod concedendum postulavi, ita confirmari potest. Sint 1, α, β, γ, δ, etc. residua, quae ex divisione quadratorum per numerum $aa + 2bb$ oriuntur, atque in istis residuis continebuntur tam omnia quadrata, quam $-2bb$, et -2, seu omnia quadrata negativa duplicata, hoc est -2, -2α, -2β, -2γ, etc.

580. Jam quodcunque residuum quadratum qq per $aa + 2bb$ divisum relinquat, cum poni possit $q = n(aa + 2bb) \pm gb$, id per $ggbb$ exhiberi potest, et residuum, ex divisione ipsius $2qq$ ortum, per $2ggbb$; quadratum ergo pp per $aa + 2bb$ divisum relinquere debet $-2ggbb$; cujus loco poni potest $aagg$, sicque quadrata pp et $aagg$ paria relinquent residua, sicque fieri potest

$$p = m(aa + 2bb) \pm ag.$$

581. At haec demonstratio est rejicienda, nisi sit $aa + 2bb$ numerus primus, nam si sit primus, ob $ffaa + 2ggbb$ et $ggaa + 2ggbb$ divisibile per $aa + 2bb$, necesse est sit $ff - gg$, ideoque vel $f - g$, vel $f + g$ divisibile; utrovis autem casu, ob $aa + 2bb$ jam in altera parte contentum, prodit vel $g = + f$, vel $g = - f$; quae conclusio locum non habet, si $aa + 2bb$ sit numerus compositus, cum tunc $f - g$ per alterum ejus factorem, et $f + g$ per alterum divisibile esse posset.

582. Si numerus $pp + 2qq$ per numerum $\mathfrak{A}$, qui non sit formae $xx + 2yy$, dividi queat, quotus non erit numerus primus formae $xx + 2yy$, quare si quotus sit primus, non erit formae $xx + 2yy$; at si sit compositus, certe non omnes factores primi erunt hujus formae.

583. Denotent enim A, B, C, D, etc. numeros primos formae $xx + 2yy$, ac si $pp + 2qq$ esset divisibile per $ABCD$ etc., quotus certe esset formae $xx + 2yy$; ergo si quotus, seu alter multiplicator non sit formae $xx + 2yy$, fieri nequit, ut alter factor sit productum talium numerorum primorum.

584. Quare si $pp + 2qq$ dividi queat per numerum $\mathfrak{A}$ ex forma $xx + 2yy$ exclusum, quotus, si sit primus, non erit hujus formae, vel si sit compositus, factorem certe habebit non hujus formae. (*)

585. Denotent $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. numeros primos ex forma $xx + 2yy$ exclusos, et vidimus $pp + 2qq$ non esse posse $A\mathfrak{A}$, neque $AB\mathfrak{A}$, neque $ABC\mathfrak{A}$, quare certum est, inter factores primos numerorum $pp + 2qq$ vel nullum, vel duos ad minimum numeros $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ contineri.

(*) *Script. ad marg.* Ergo $pp + 2qq$ per nullos numeros primos formae $8n + 5$ et $8n + 7$ dividi potest; unde si quadrata per tales numeros primos dividantur, inter non-residua erit -2.

$$\text{Si } \frac{xx + nyy}{aa + nbb} = \text{integro, erit } \frac{bbxx - aayy}{aa + nbb} = \text{int. et } \frac{aaxx - nnbbyy}{aa + nbb} = \text{int.}$$

586. Hinc autem nondum concludi potest, si unus factor, etiamsi sit compositus, ipsius $pp + 2qq$ fuerit formae $xx + 2yy$, etiam alterum fore hujus formae. Demonstrandum restat numerum $pp + 2qq$ non esse posse formae vel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, vel $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, vel $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, quod si esset, foret utique $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ numerus hujus formae.

587. Visuri autem an $pp + 2qq$ per numerum $\mathfrak{A}$ non formae $xx + 2yy$ dividi queat, quod si fieri posset, foret $p < \frac{1}{2}\mathfrak{A}$ et $q < \frac{1}{2}\mathfrak{A}$, unde $pp + 2qq < \frac{3}{4}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, quotusque $< \frac{3}{4}\mathfrak{A}$, qui esset vel ipse numerus non $xx + 2yy$, vel factorem talem haberet $\mathfrak{B}$, qui cum etiam factor esset ipsius $pp + 2qq$, minimus talis numerus $\mathfrak{B}$ assignari posset, divisor formae cujuspiam $xx + 2yy$, quod cum fieri nequeat, numeri $pp + 2qq$ nullos habent divisores primos, qui non ipsi sint formae $xx + 2yy$.

II.

Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs.

(Exhib. Berol. 1747 Junii 22. Conf. *Comment. arithm.* Prooem. pag. XVIII. N. 57 et Suppl. Prooem. N. 1.)

§ 1. Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain à découvrir un ordre quelconque dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire, que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques personnes se sont donné la peine de continuer au-delà de cent-mille: et on s'apercevra d'abord qu'il n'y règne aucun ordre ni règle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'arithmétique nous fournit des règles sûres, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin que l'on souhaite, sans pourtant nous y laisser apercevoir la moindre marque d'un ordre quelconque. Je me vois aussi bien éloigné de ce but, mais je viens de découvrir une loi fort bizarre parmi les sommes des diviseurs des nombres naturels, sommes qui, au premier coup d'oeil, paraissent aussi irrégulières que la progression des nombres premiers, et qui semblent même envelopper celle-ci. Cette règle, que je vais expliquer, est à mon avis d'autant plus importante qu'elle appartient à ce genre de vérités dont nous pouvons nous persuader, sans en donner une démonstration parfaite. Néanmoins, j'en allèguerai des preuves telles, qu'on pourra presque les envisager comme équivalentes à une démonstration rigoureuse.

§ 2. Les nombres premiers se distinguent des autres nombres, en ce qu'ils n'admettent d'autres diviseurs que l'unité et eux-mêmes. Ainsi 7 est un nombre premier, parce qu'il n'est divisible que par l'unité et soi-même. Les autres nombres qui ont, outre l'unité et eux-mêmes, encore d'autres diviseurs, sont nommés composés: comme par exemple le nombre 15, qui, outre l'unité et soi-même, est divisible per 3 et par 5. Donc en général, si le nombre p est premier, il ne sera divisible que par 1 et par p: mais si p est un nombre composé, il aura, outre 1 et p, encore d'autres diviseurs; et partant, dans le premier cas, la somme des diviseurs sera $= 1 + p$; dans l'autre cas, elle sera plus grande que $1 + p$. Comme les réflexions suivantes rouleront sur la somme des diviseurs de chaque nombre, je me servirai d'un certain caractère pour la marquer. La lettre $\int$ qu'on emploie dans l'analyse des infinis pour indiquer les intégrales, étant mise devant un nombre, signifiera la somme de tous ses diviseurs: ainsi $\int 12$ signifie la somme de tous les diviseurs du nombre 12 qui sont $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, de sorte que $\int 12 = 28$. Cela posé, on verra que

$$\int 60 = 168 \quad \text{et} \quad \int 100 = 217.$$

L'unité n'ayant d'autre diviseur que soi-même, on aura $\int 1 = 1$. Le chifre 0, au contraire, étant divisible par tout nombre, la valeur de $\int 0$ sera infinie. Cependant, dans la suite, je lui assignerai, pour chaque cas proposé, une valeur déterminée, convenable à mon dessein.

§ 3. Ayant donc établi ce signe $\int$ pour marquer la somme des diviseurs du nombre devant lequel il est posé, il est clair que, si p marque un nombre premier, la valeur de $\int p$ sera $= 1 + p$: excepté le cas où $p = 1$, car alors nous avons $\int 1 = 1$, et non pas $\int 1 = 1 + 1$; d'où l'on voit qu'il faut exclure l'unité de la suite des nombres premiers; étant le commencement des nombres entiers, elle n'est ni premier ni composé. Or, si le nombre p n'est pas premier, la valeur de $\int p$ sera plus grande que $1 + p$. Dans ce cas, on trouvera aisément la valeur de $\int p$ par les facteurs du nombre p. Car soient a, b, c, d, etc. des nombres premiers différents entr'eux, on verra aisément que:

$$\int ab \;= 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) = \int a . \int b$$
$$\int abc \;= (1 + a)(1 + b)(1 + c) = \int a . \int b . \int c$$
$$\int abcd = (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) = \int a . \int b . \int c . \int d$$

etc.

Pour les puissances des nombres premiers, on a besoin de règles particulières, comme:

$$\int a^2 = 1 + a + a^2 = \frac{a^3 - 1}{a - 1},$$
$$\int a^3 = 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

et généralement $$\int a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Et par le moyen de celles-ci, on pourra assigner la somme des diviseurs de chaque nombre, tout composé qu'il puisse être; ce qui sera clair par les formules suivantes:

$$\int a^2 b \quad = \int a^2 . \int b,$$
$$\int a^3 b^2 \quad = \int a^3 . \int b^2,$$
$$\int a^3 b^4 c \quad = \int a^3 . \int b^4 . \int c$$

et généralement $$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon = \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta . \int e^\varepsilon.$$

Ainsi, pour trouver la valeur de $\int 360$, puisque 360 se résout dans ces facteurs $2^3 . 3^2 . 5$, j'aurai

$$\int 360 = \int 2^3 . 3^2 . 5 = \int 2^3 . \int 3^2 . \int 5 = 15 . 13 . 6 = 1170.$$

§ 4. Pour mettre devant les yeux la progression des sommes des diviseurs, j'ajouterai la table suivante, qui contient les sommes des diviseurs des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 100

$\int 1 = 1$	$\int 7 = 8$	$\int 13 = 14$	$\int 19 = 20$	$\int 25 = 31$	$\int 31 = 32$	$\int 37 = 38$
$\int 2 = 3$	$\int 8 = 15$	$\int 14 = 24$	$\int 20 = 42$	$\int 26 = 42$	$\int 32 = 63$	$\int 38 = 60$
$\int 3 = 4$	$\int 9 = 13$	$\int 15 = 24$	$\int 21 = 32$	$\int 27 = 40$	$\int 33 = 48$	$\int 39 = 56$
$\int 4 = 7$	$\int 10 = 18$	$\int 16 = 31$	$\int 22 = 36$	$\int 28 = 56$	$\int 34 = 54$	$\int 40 = 90$
$\int 5 = 6$	$\int 11 = 12$	$\int 17 = 18$	$\int 23 = 24$	$\int 29 = 30$	$\int 35 = 48$	$\int 41 = 42$
$\int 6 = 12$	$\int 12 = 28$	$\int 18 = 39$	$\int 24 = 60$	$\int 30 = 72$	$\int 36 = 91$	$\int 42 = 96$

$\int 43 = 44$	$\int 53 = 54$	$\int 63 = 104$	$\int 73 = 74$	$\int 83 = 84$	$\int 93 = 128$
$\int 44 = 84$	$\int 54 = 120$	$\int 64 = 127$	$\int 74 = 114$	$\int 84 = 224$	$\int 94 = 144$
$\int 45 = 78$	$\int 55 = 72$	$\int 65 = 84$	$\int 75 = 124$	$\int 85 = 108$	$\int 95 = 120$
$\int 46 = 72$	$\int 56 = 120$	$\int 66 = 144$	$\int 76 = 140$	$\int 86 = 132$	$\int 96 = 252$
$\int 47 = 48$	$\int 57 = 80$	$\int 67 = 68$	$\int 77 = 96$	$\int 87 = 120$	$\int 97 = 98$
$\int 48 = 124$	$\int 58 = 90$	$\int 68 = 126$	$\int 78 = 168$	$\int 88 = 180$	$\int 98 = 171$
$\int 49 = 57$	$\int 59 = 60$	$\int 69 = 96$	$\int 79 = 80$	$\int 89 = 90$	$\int 99 = 156$
$\int 50 = 93$	$\int 60 = 168$	$\int 70 = 144$	$\int 80 = 186$	$\int 90 = 234$	$\int 100 = 217$
$\int 51 = 72$	$\int 61 = 62$	$\int 71 = 72$	$\int 81 = 121$	$\int 91 = 112$	
$\int 52 = 98$	$\int 62 = 96$	$\int 72 = 195$	$\int 82 = 126$	$\int 92 = 168$	

Je ne doute pas que, pour peu qu'on regarde la progression de ces nombres, on ne désespère presque d'y découvrir le moindre ordre, vu que l'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée tellement, qu'il semblera d'abord impossible d'indiquer une loi quelconque dans la progression de ces nombres, sans qu'on sache celle des nombres premiers; et il semble même qu'il y a ici beaucoup plus de bizarrerie encore que dans les nombres premiers.

§ 5. Néanmoins j'ai remarqué, que cette progression suit une loi bien régulière et qu'elle est même comprise dans l'ordre des progressions que les géomètres appellent *recurrentes*, de sorte qu'on peut toujours former chacun des termes par quelques-uns des précédents, suivant une règle constante. Car si $\int n$ marque un terme quelconque de cette progression irrégulière, et $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$, etc. les termes précédents, je dis que la valeur de $\int n$ est toujours composée de quelques-uns des termes précédents suivant cette formule:

$$\begin{aligned}\int n = {} & \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) \\ & - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) + \int(n-70) \\ & + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) \text{ etc.}\end{aligned}$$

Dans cette formule il y a à remarquer:

I. Que dans l'ordre alternant des signes + et —, chacun se répète deux fois de suite.

II. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. qu'il faut successivement retrancher du nombre proposé n, deviendra évidente, dès qu'on prend leurs différences:

N.	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,	51,	57,	70,	77,	92,	100, etc.
Diff.	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,	6,	13,	7,	15,	8........	

car alternativement on aura tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. et les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, etc. Par ce moyen on pourra continuer la suite de ces nombres aussi loin que l'on voudra.

III. Quoique cette suite aille à l'infini, on n'en doit prendre, dans chaque cas, que les termes depuis le commencement jusqu'au premier terme supérieur à n, et qui, par conséquent, donnerait, après le signe $\int$, un nombre négatif.

IV. S'il arrive que le terme $\int 0$ se rencontre dans cette formule, comme sa valeur est indéterminée en elle-même, il faut, dans chaque cas, au lieu de $\int 0$, mettre le nombre proposé même.

§ 6. Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre proposé et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra développer. Et comme je dois avertir, que je ne suis pas en état de donner une démonstration rigoureuse de cette loi, je ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples:

$$\begin{aligned}
\int 1 &= \int 0 = 1, \\
\int 2 &= \int 1 + \int 0 = 1 + 2 = 3, \\
\int 3 &= \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4, \\
\int 4 &= \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7, \\
\int 5 &= \int 4 + \int 3 - \int 0 = 7 + 4 - 5 = 6, \\
\int 6 &= \int 5 + \int 4 - \int 1 = 6 + 7 - 1 = 12, \\
\int 7 &= \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8, \\
\int 8 &= \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15, \\
\int 9 &= \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13, \\
\int 10 &= \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18, \\
\int 11 &= \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12, \\
\int 12 &= \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28, \\
\int 13 &= \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14, \\
\int 14 &= \int 13 + \int 12 - \int 9 - \int 7 + \int 2 = 14 + 28 - 13 - 8 + 3 = 24, \\
\int 15 &= \int 14 + \int 13 - \int 10 - \int 8 + \int 3 + \int 0 = 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24, \\
\int 16 &= \int 15 + \int 14 - \int 11 - \int 9 + \int 4 + \int 1 = 24 + 24 - 12 - 13 + 7 + 1 = 31, \\
\int 17 &= \int 16 + \int 15 - \int 12 - \int 10 + \int 5 + \int 2 = 31 + 24 - 28 - 18 + 6 + 3 = 18, \\
\int 18 &= \int 17 + \int 16 - \int 13 - \int 11 + \int 6 + \int 3 = 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 = 39, \\
\int 19 &= \int 18 + \int 17 - \int 14 - \int 12 + \int 7 + \int 4 = 39 + 18 - 24 - 28 + 8 + 7 = 20, \\
\int 20 &= \int 19 + \int 18 - \int 15 - \int 13 + \int 8 + \int 5 = 20 + 39 - 24 - 14 + 15 + 6 = 42.
\end{aligned}$$

Je crois ces exemples suffisants pour prouver que l'accord de ma règle avec la vérité ne peut nullement être attribué au hasard seul.

§ 7. Si néanmoins on objectait, que ces exemples ne prouvent que la justesse des six premiers termes de notre suite: 1, 2, 5, 7, 12, 15, et non celle de la loi de progression, telle que je l'ai indiquée, il suffira de choisir, pour vérifier cette loi, quelques exemples de plus grands nombres:

I. Soit proposé le nombre 101 dont on veuille chercher la somme des diviseurs, et on aura:

$$\int 101 = \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75$$
$$+ \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1 =$$
$$+ 217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124$$
$$+ 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1$$

où, additionnant ces nombres deux à deux

$$\int 101 = 373 - 396 + 222 - 204 + 206 - 177 + 92 - 14,$$

ce qui donne $\int 101 = 102$, d'où l'on conclurait que 101 est un nombre premier, si on ne le savait d'ailleurs.

II. Soit proposé le nombre 301 dont on veuille savoir la somme des diviseurs, et l'on aura:

$$\int 301 = \int 300 + \int 299 - \int 296 - \int 294 + \int 289 + \int 286 - \int 279 - \int 275 + \int 266 + \int 261$$
$$- \int 250 - \int 244 + \int 231 + \int 224 - \int 209 - \int 201 + \int 184 + \int 175 - \int 156$$
$$- \int 146 + \int 125 + \int 114 - \int 91 - \int 79 + \int 54 + \int 41 - \int 14 - \int 0$$

où il est clair, comment par le moyen des différences, on peut aisément former cette suite pour chaque cas proposé. Or, substituant les sommes des diviseurs, on trouvera:

$$\int 301 = + 868 - 570 + 307 - 416 + 480 - 468 + 384 - 240 + 360 - 392 + 156 - 112$$
$$+ 336 - 684 + 504 - 372 + 390 - 434 + 504 - 272 + 248 - 222 + 240 - 80$$
$$+ 120 - 24$$
$$+ 42 - 301$$

$$\text{ou } \int 301 = + 4939 - 4587 = 352:$$

d'où l'on reconnaît que 301 n'est pas premier. Or, puisque $301 = 7.43$, on aura

$$\int 301 = \int 7 . \int 43 = 8.44 = 352,$$

comme la règle vient de le montrer.

§ 8. Ces exemples que je viens de développer, ôteront sans doute tout scrupule qu'on aurait pu encore avoir sur la vérité de ma formule. Or, on sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, qu'on ne voit aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs, sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, etc. paraît non seulement n'avoir aucun rapport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompue et qu'ils sont mêlés de deux progressions régulières différentes, c'est-à-dire

de 1, 5, 12, 22, 35, 51, etc. et de 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc.,

il semble presque qu'une telle irrégularité ne saurait trouver lieu dans l'analyse. De plus, le défaut d'une démonstration n'en doit pas peu augmenter l'intérêt; vu qu'il serait presque moralement impossible de parvenir à la découverte d'une telle propriété, sans y avoir été conduit par une méthode certaine, qui pourrait tenir lieu d'une parfaite démonstration. J'avoue aussi que ce n'a pas été par un simple hasard, que je suis tombé sur cette découverte: mais une autre proposition d'une pareille nature qui doit être jugée vraie, quoique je n'en puisse donner aucune démonstration, m'a ouvert le chemin pour parvenir à cette belle propriété. Et bien que cette recherche ne roule que sur la nature des nombres à laquelle l'analyse des infinis ne paraît guère être aplicable, c'est pourtant par le moyen de différentiations et de plusieurs autres détours que j'ai été conduit à cette conclusion.

Je souhaiterais qu'on trouvât un chemin plus court et plus naturel pour y parvenir, et peut-être que la considération de la route que j'ai suivie y pourra conduire.

§ 9. Il y a long-temps que je considérai, à l'occasion du problème de la partition des nombres, cette expression:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots\ldots$$

la supposant continuée à l'infini. J'ai multiplié actuellement un grand nombre de ces facteurs ensemble, pour voir la forme de la série qui en résulte, et j'ai trouvé cette progression:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots.$$

où les exposants de x sont les mêmes nombres qui entrent dans la formule précédente; et aussi les signes $+$ et $-$ alternent deux à deux. On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette série. Aussi n'ai-je pour toute preuve qu'une longue induction, que j'ai du moins poussée aussi loin, que je ne puis en aucune manière douter de la loi d'après laquelle ces termes et leurs exposants sont formés. J'ai long-temps cherché en vain à démontrer d'une manière rigoureuse, que cette série doit être égale à l'expression proposée $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ et j'ai adressé la même demande à quelques-uns de mes amis dont je connais la force dans ces sortes de questions; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans en avoir pu déterrer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connue, mais pas encore démontrée, que si l'on pose:

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots.$$

la même quantité s pourra aussi être exprimée en sorte:

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}\ldots.$$

Car chacun est en état de se convaincre de cette vérité par la résolution actuelle à tel point qu'il souhaitera, et il paraît impossible que la loi qu'on a découverte dans 20 termes par exemple, ne soit pas également vraie pour tous les suivants.

§ 10. Ayant donc découvert que ces deux expressions infinies sont égales, quoique l'égalité ne puisse être démontrée, toutes les conclusions qu'on pourra déduire de cette égalité seront de même nature, c'est-à-dire vraies sans être démontrées. Ou, si l'une quelconque de ces conclusions pouvait être démontrée, on en pourrait réciproquement tirer une démonstration de l'égalité mentionnée; et c'est dans cette vue que j'ai manié de plusieurs manières ces deux expressions, par où j'ai été conduit entr'autres à la découverte que je viens d'expliquer, et dont la vérité doit être aussi certaine que celle de l'égalité de ces deux expressions. Voilà de quelle manière j'ai opéré. Ces deux expressions étant égales:

$$\text{I.}\quad s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots.$$

$$\text{II.}\quad s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots.$$

pour délivrer la première des facteurs, j'en prends les logarithmes, d'où je tire

$$ls=l(1-x)+l(1-x^2)+l(1-x^3)+l(1-x^4)+l(1-x^5)+\ldots.$$

Maintenant pour éliminer les logarithmes, j'en prends les différentielles, ce qui donnera cette équation:

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \ldots\,.$$

que je divise par $-dx$ et multiplie par x, pour avoir:

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \ldots\,.$$

La seconde valeur de la même quantité s donne par la différentiation:

$$ds = -dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \ldots,$$

de laquelle, en la multipliant par $-x$ et divisant par sdx, on tirera une autre valeur de $-\frac{xds}{sdx}$ qui sera

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots}.$$

§ 11. Soit la valeur de $-\frac{xds}{sdx} = t$, et nous aurons deux valeurs égales pour cette quantité t

$$\text{I.}\quad t = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{6x^6}{1-x^6}\ldots$$

$$\text{II.}\quad t = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots}.$$

Je résous chaque terme de la première expression en une progression géométrique par la division ordinaire, et j'obtiens:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
t = x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12}+\ldots \\
 & +2x^2 & & +2x^4 & & +2x^6 & & +2x^8 & & +2x^{10} & & +2x^{12}+\ldots \\
 & & +3x^3 & & & +3x^6 & & & +3x^9 & & & +3x^{12}+\ldots \\
 & & & +4x^4 & & & & +4x^8 & & & & +4x^{12}+\ldots \\
 & & & & +5x^5 & & & & & +5x^{10} & & +\ldots \\
 & & & & & +6x^6 & & & & & & +6x^{12}+\ldots \\
 & & & & & & +7x^7 & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^8 & & & & \\
 & & & & & & & & +9x^9 & & & \\
 & & & & & & & & & +10x^{10} & & \\
 & & & & & & & & & & +11x^{11} & \\
 & & & & & & & & & & & +12x^{12}+\ldots
\end{array}$$

où il est aisé de voir, que chaque puissance de x se rencontre autant de fois, que son exposant a de diviseurs, puisque chaque diviseur devient un coefficient de la même puissance de x. Ainsi, réunissant tous les termes homogènes dans une même somme, le coefficient de chaque puissance de x sera la somme de tous les diviseurs de son exposant. Et partant, exprimant ces sommes de diviseurs par la préposition du signe $\int$, ainsi que je l'ai fait ci-dessus, j'obtiendrai pour t la série qui suit:

$$t = \int 1\,.\,x + \int 2\,.\,x^2 + \int 3\,.\,x^3 + \int 4\,.\,x^4 + \int 5\,.\,x^5 + \int 6\,.\,x^6 + \int 7\,.\,x^7 + \ldots$$

dont la loi de progression est tout à fait manifeste; et, quoiqu'il semble que l'induction ait quelque part dans la détermination de ces coefficients, pour peu que l'on considère l'expression infinie précédente, on s'assurera aisément de la nécessité de cette loi de progression.

§ 12. Substituons cette valeur au lieu de t dans la seconde expression de cette même lettre t, qui, délivrée des fractions, se réduit à cette forme:

$$\left.\begin{array}{l} t(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots) \\ -x-2x^2+5x^5+7x^7-12x^{12}-15x^{15}+22x^{22}+26x^{26}+\ldots \end{array}\right\}=0,$$

Maintenant la valeur précédente étant mise dans cette équation, nous trouverons:

$$\begin{array}{rl} 0= & \int 1.x+\int 2.x^2+\int 3.x^3+\int 4.x^4+\int 5.x^5+\int 6.x^6+\int 7.x^7+\int 8.x^8+\int 9.x^9+\ldots \\ & -x-\int 1.x^2-\int 2.x^3-\int 3.x^4-\int 4.x^5-\int 5.x^6-\int 6.x^7-\int 7.x^8-\int 8.x^9-\ldots \\ & -2x^2-\int 1.x^3-\int 2.x^4-\int 3.x^5-\int 4.x^6-\int 5.x^7-\int 6.x^8-\int 7.x^9-\ldots \\ & +5x^5+\int 1.x^6+\int 2.x^7+\int 3.x^8+\int 4.x^9+\ldots \\ & +7x^7+\int 1.x^8+\int 2.x^9+\ldots \\ & \text{etc.} \end{array}$$

Ici il est aisé d'observer que les coefficients de chaque puissance de x sont les sommes des diviseurs d'abord de l'exposant de cette puissance même, et ensuite, des autres nombres plus petits qui résultent si l'on ôte successivement de l'exposant les nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. Ensuite, si l'exposant de la puissance de x est égal à un terme de cette série numérique, alors ce même terme accompagne encore les coefficients. En troisième lieu, l'ordre des signes n'a besoin d'aucun éclaircissement. Ainsi, on conclura en général que la puissance x^n aura ces coefficients:

$$\int n-\int(n-1)-\int(n-2)+\int(n-5)+\int(n-7)-\int(n-12)-\int(n-15)+\ldots$$

jusqu'à ce qu'on ne parvienne à des nombres négatifs. Mais si l'un quelconque de ces nombres devant lesquels se trouve le signe $\int$, devient $=0$, alors il faut mettre à sa place le nombre n même, de sorte que dans ce cas, il y a $\int 0=n$ et le signe de ce terme suit l'ordre général des autres.

§ 13. Ainsi donc, puisque l'expression infinie du § précédent doit être égale à zéro, quelque valeur que l'on donne à la quantité x, il faut de nécessité que les coefficients de chaque puissance à part, pris ensemble, soient égaux à zéro, et partant nous aurons les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & \int 1-1=0, \\ \text{II.} & \int 2-\int 1-2=0, \\ \text{III.} & \int 3-\int 2-\int 1=0, \\ \text{IV.} & \int 4-\int 3-\int 2=0, \\ \text{V.} & \int 5-\int 4-\int 3+5=0, \\ \text{VI.} & \int 6-\int 5-\int 4+\int 1=0, \\ \text{VII.} & \int 7-\int 6-\int 5+\int 2+7=0, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \int 1=1, \\ \int 2=\int 1+2, \\ \int 3=\int 2+\int 1, \\ \int 4=\int 3+\int 2, \\ \int 5=\int 4+\int 3-5, \\ \int 6=\int 5+\int 4-\int 1, \\ \int 7=\int 6+\int 5-\int 2-7, \end{array}\right.$$

etc. etc.

et généralement nous aurons:

$$0=\int n-\int(n-1)-\int(n-2)+\int(n-5)+\int(n-7)-\int(n-12)-\int(n-15)\ldots$$

et par conséquent

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \ldots.$$

qui est la même expression que j'ai donnée là-haut et qui exprime la loi, selon laquelle les sommes des diviseurs des nombres naturels procèdent. Outre la raison des signes et de la nature de la progression des nombres:

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, etc.

on voit aussi, par ce que je viens d'avancer, la raison pourquoi, dans les cas où se trouve le terme $\int 0$, il faut mettre à sa place le nombre n même, ce qui aurait pu paraître la chose la plus étrange dans mon expression. Ce raisonnement, quoiqu'il soit encore fort éloigné d'une démonstration parfaite, ne laissera pas pourtant de lever plusieurs doutes sur la forme bizarre de l'expression que je viens d'expliquer.

III.

De numeris amicabilibus.

(Conf. *Comm. arithm.* Prooem. pag. XVII. N. 56. nec non Suppl. Prooem. N. 1.)

§ 1. Inter omnia problemata, quae in mathesi tractari solent, nunc quidem a plerisque nulla magis sterilia atque ab omni usu abhorrentia existimantur, quam ea, quae in contemplatione naturae numerorum et divisorum investigatione versantur. In quo judicio hodierni mathematici a veteribus non mediocriter dissentiunt, qui hujusmodi speculationibus multo majus pretium constituere sunt soliti. Etsi enim Veteres non ignoraverunt ex indagatione naturae numerorum parum utilitatis ad eam matheseos partem, quae applicata vocari solet, et in investigatione rerum ad physicam potissimum pertinentium est posita: tamen nihilominus in scrutandis numerorum proprietatibus multum studii et laboris consumserunt. Praeterquam enim, quod ipsis investigatio veritatis per se laudabilis atque humana cognitione digna videretur, probe etiam senserunt his rebus ipsam artem inveniendi mirum in modum amplificari, mentisque facultates ad graviora negotia expedienda aptiores reddi. Neque etiam ipsos in hac opinione deceptos fuisse, summa incrementa, quibus analysis ab his temporibus est locupletata, manifesto testantur; maxime enim verisimile videtur hanc scientiam nunquam ad tantum perfectionis gradum perventuram fuisse, nisi Veteres tantum studium in hujusmodi quaestionibus evolvendis, quae hodie ob sterilitatem tantopere a plerisque contemnuntur, collocavissent. Hincque eo minus dubitare licet, quin his rebus ulterius excolendis etiam in posterum analysi insignia incrementa afferantur.

§ 2. Antiquissimis jam temporibus Euclides multas praeclaras numerorum proprietates collegit, veramque rationem numeros perfectos inveniendi tradidit, ut mirum sit, plures recentiores mathematicos in hoc genere tam misere esse hallucinatos. Ex Diophanti autem temporibus luculenter apparet, tam Graecos quam Arabes plurimum studii in numerorum doctrina excolenda posuisse: quod idem institutum post restauratum in Europa litterarum studium primi matheseos cultores summa industria sunt prosecuti; hocque ipso viam ad altiores investigationes praeparaverunt. Cartesius certe, cui praecipue partes promotae analyseos merito debentur, speculationes numericas minime est aspernatus, atque multo magis in hoc negotio elaboraverunt Fermatius et Freniclius, qui etiam acutissimum mathematicum Wallisium quasi invitum ad hoc studium excitaverunt, quemadmodum ex commercio epistolico, secundo ejus operum tomo inserto, abunde perspicere licet. Inter eos vero qui in Germania sese primo ad algebram applicuerunt, Michaël Stifel imprimis magnam laudem est adeptus, qui

temporibus Lutheri vixit. Hic, ut specimen singularis analyseos afferret, cui enodando communia algebrae praecepta non sufficerent, mentionem fecit problematis, quo duo numeri ita affecti quaeruntur, ut omnes partes aliquotae minoris numeri, simul sumtae, majorem numerum, ac vicissim omnes partes aliquotae majoris numeri, simul sumtae, minorem numerum producant; talesque numeros invenit 220 et 284. Cartesius etiam hoc problema dignum judicavit, in quo solvendo vires suas exploraret, aliosque insuper hujusmodi numeros elicuit, qui ista proprietate gauderent: atque regulam investigavit, cujus ope plures istiusmodi numeri reperiri possunt, quam Schotenius in Exercitionibus mathematicis exposuit. Neque vero haec regula est generalis, neque plures quam tres solutiones suppeditare valet.

§ 3. Pertinet igitur haec quaestio ad id genus, quod in contemplatione partium aliquotarum versatur; quae doctrina cum a natura quantitatum continuarum, ad quas analysis proprie est accommodata, plurimum abhorreat, prorsus singulari modo tractari debet, nisi tentando solutionem expedire velimus. Quanquam autem Schotenius ad hujusmodi problemata solvenda certam methodum sibi proposuisse videtur, dum usum calculi analytici introducere est conatus; tamen si ejus ratiocinium attentius inspiciamus, praecipua solutionis pars in mera tentatione consistit, atque omni fundamento destituitur. Temere enim pro hujusmodi numeris certas assumit formulas, in quibus numeros idoneos contineri suspicatur, cum tamen eodem jure quasvis alias assumere potuisset: atque in harum ipsarum formularum evolutione plurimum casui et fortunae tribuitur: unde Stifelium immerito reprehendit, quod putaverit, solutionem hujusmodi problematum in certa methodo comprehendi non posse. Quin potius igitur erit fatendum, eam analyseos partem, quae in scrutatione quantitatum discretarum versatur, maxime adhuc esse imperfectam, certaque principia, quibus ea superstruatur, etiam nunc desiderari. Atque ob hunc ipsum principiorum defectum ad hujusmodi problemata numerica resolvenda plurimum solertiae et perspicaciae requiritur: et plerumque singulari ratiocinii genere opus est, in quo maxima ingenii vis cernitur. Hancque ob causam, etiamsi ipsa horum problematum solutio in analysi parum utilitatis habere videatur, tamen methodus, qua tot tantaeque difficultates superantur, fines analyseos non mediocriter promovere est censenda. Quo plures enim diversae viae ad veritatem indagandam aperiuntur, eo majora incrementa ipsa ars inveniendi cepisse est existimanda.

§ 4. Quemadmodum in universa analysi usus idoneorum signorum plurimum valet, ita etiam in hoc genere, quod circa divisores et partes aliquotas numerorum instituitur, non parum utilitatis a commoda designandi ratione erit exspectandum. Numeros igitur, quos hic vel contemplamur, vel quaerimus, litteris alphabeti minusculis indicabo, litteris vero majusculis utar ad summas divisorum eorum numerorum, qui respondentibus minusculis exhibentur, repraesentandas. Ita si a denotet numerum quemcunque integrum et affirmativum, cujusmodi numeros in hoc negotio semper intelligere oportet, littera majuscula respondens A indicabit summam omnium divisorum numeri a. Simili modo litterae B, C, D, etc. expriment in posterum summas divisorum numerorum b, c, d, etc. scilicet si sit $a = 10$, erit $A = 18$, et si $b = 50$, erit $B = 93$. Cum igitur cujusque numeri partes aliquotae sint ejusdem divisores, ipso illo numero excepto, qui, etsi sui ipsius est divisor, tamen partibus aliquotis non annumeratur, summa partium aliquotarum numeri a erit $= A - a$, nisi sit $a = 1$.

Hoc enim casu, cum unitas cujusque numeri tam divisor quam pars aliquota censeri soleat, erit quoque $A = 1$ et partium aliquotarum summa $= 1$ putatur. Verum cum unitas in hujusmodi quaestionibus non inter numeros collocari soleat, haec exceptio nullam difficultatem afferet.

§ 5. Hoc igitur litterarum significatu praemisso, cum numerorum primorum nulla detur pars aliquota praeter unitatem, et quilibet numerus primus alios non habeat divisores praeter unitatem et se ipsum, si a fuerit numerus primus, erit $A = a + 1$. Atque si a fuerit quaepiam potestas numeri primi p, summa divisorum ejus A facile assignari poterit. Sit enim $a = p^2$, erit utique $A = 1 + p + p^2$; ac si $a = p^3$, erit $A = 1 + p + p^2 + p^3$. In genere autem, si denotante p numerum primum quemcunque fuerit $a = p^n$, erit $A = 1 + p + p^2 + \ldots\ldots + p^n$, qui divisores cum constituant progressionem geometricam, erit quoque: $A = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$. Unde si a fuerit potestas quaecunque numeri primi p, quicunque sit ejus exponens, erit semper $A = \frac{pa - 1}{p - 1}$. Si igitur sit a potestas binarii, erit $A = 2a - 1$; sin sit a potestas ternarii, erit $A = \frac{3a - 1}{2}$; sin potestas quinarii, erit $A = \frac{5a - 1}{4}$ et ita porro.

§ 6. Quodsi a fuerit productum ex duobus diversis numeris primis p et q, puta $a = pq$: erit summa divisorum $A = 1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$. Simili modo si plures habeantur numeri primi diversi p q, r, s, etc. fueritque $a = pqr$, erit $A = (1 + p)(1 + q)(1 + r)$, et posito $a = pqrs$, erit $A = (1 + p)(1 + q)(1 + r)(1 + s)$. Cum autem sit $p + 1 = P$, $q + 1 = Q$, $r + 1 = R$, etc., si fuerit $a = pq$, erit $A = PQ$, et si sit $a = pqr$, erit $A = PQR$, etc.; quae expressionum similitudo non solum locum habet, si p, q et r sint numeri primi diversi, sed etiam dummodo fuerint numeri primi inter se, ut praeter unitatem nullum alium divisorem habeant communem. Si enim sit P summa divisorum numeri p, et Q summa divisorum ipsius q, atque hae summae P et Q praeter unitatem nullum numerum communem contineant, tum productum $a = pq$ primo eosdem habebit divisores, quos factor p, quorum summa est $= P$; deinde divisores quoque habet numeri q, quorum summa est $= Q$; in quibus quoniam unitas bis occurrit, summa utrorumque divisorum erit $= P + Q - 1$. Tertio productum pq divisibile erit per singula producta ex binis divisoribus numerorum p et q, exclusa utrinque unitate; horum autem compositorum divisorum summa erit $= (P - 1)(Q - 1) = PQ - P - Q + 1$, quae cum summa simplicium $P + Q - 1$ facit PQ; ita ut posito $a = pq$, sit $A = PQ$.

§ 7. Cum igitur omnis numerus sit vel primus, vel productum ex aliquot primis, eorumve potestatibus, ex resolutione numerorum in factores facile eorundem summa divisorum cognoscitur. Positis enim p, q, r, etc. numeris primis, omnis numerus in hujusmodi forma continebitur: $a = p^m q^n r^k \ldots\ldots$ Cum igitur factoris p^m summa divisorum sit $= \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$, et factoris q^n sit $= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, ipsiusque r^k summa divisorum sit $= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$, ob istos factores p^m, q^n, r^k, inter se primos, erit numeri propositi $a = p^m q^n r^k \ldots$ summa divisorum

$$A = \frac{(p^{m+1} - 1)(q^{n+1} - 1)(r^{k+1} - 1)}{(p - 1)(q - 1)(r - 1)} \ldots$$

Hocque modo ut ipse numerus a per factores exprimitur, ita quoque summa ejus divisorum, per factores expressa, reperietur: quod in plerisque hujus generis quaestionibus resolvendis non parum

habet utilitatis. Quo igitur facilius summae divisorum quorumvis numerorum inveniri atque ipsi per factores exprimi queant, in tabula annexa non solum omnium numerorum primorum millenario minorum, sed etiam eorum potestatum, quarum quidem usus occurrit, quantumque calculi molestia id permisit, summae divisorum exhibentur in factores resolutae: ita ut ope hujus tabulae omnium numerorum compositorum, nisi fuerint nimis magni, divisorum summae facile excerpi queant. Ita si propositus sit numerus $a = 7560$: hic numerus primo per factores primos exprimatur hoc modo $a = 2^3.3^3.5.7$. Deinde horum factorum singulorum summae divisorum in tabula quaerantur, qui erunt: 3.5; $2^3.5$; 2.3 et 2^3: hisque invicem multiplicatis prodibit summa divisorum numeri propositi $a = 7560$, quaesita $A = 2^7.3^2.5^2 = 28800$. Ex quo exemplo usus istius tabulae in summis divisorum quorumvis numerorum inveniendis abunde perspicitur.

§ 8. Hinc inventio numerorum perfectorum nulla laborat difficultate: cum enim numerus perfectus vocetur, qui aequalis summae suarum partium aliquotarum, si numerus perfectus ponatur $= a$, oportebit esse $a = A - a$, ideoque $A = 2a$. Jam numerus perfectus a vel est par, vel impar; priori casu ergo factorem habebit 2, ejusque quampiam dignitatem. Sit igitur $a = 2^n b$, erit $A = (2^{n+1} - 1)B$, ideoque $(2^{n+1} - 1)B = 2^{n+1}b$, unde fit $\frac{B}{b} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$. Cum igitur fractio $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$ ad minores numeros reduci nequeat, necesse est ut sit vel $b = 2^{n+1} - 1$, vel $b = (2^{n+1} - 1)c$. Prius autem fieri nequit, nisi sit $2^{n+1} - 1$ numerus primus, quia summa divisorum esse debet $= 2^{n+1}$, ideoque summa partium aliquotarum $= 1$: quoties vero est $2^{n+1} - 1$ numerus primus, toties posito $b = 2^{n+1} - 1$, erit $B = 2^{n+1}$; hincque numerus perfectus erit $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$. Sin autem pro b sumeretur multiplum ipsius $2^{n+1} - 1$, puta $(2^{n+1} - 1)c$, ejus partes aliquotae forent $2^{n+1} - 1$ et c; unde omnium divisorum summa B certe non minor esset quam $2^{n+1} + c + b$; talis enim foret, si tam c quam $2^{n+1} - 1$ essent numeri primi. Fractio ergo $\frac{B}{b}$ non minor esset futura quam $\frac{2^{n+1} + c + b}{b}$, hoc est quam $\frac{2^{n+1}(1+c)}{(2^{n+1}-1)c}$, ob $b = (2^{n+1} - 1)c$. At fractio $\frac{2^{n+1}(1+c)}{(2^{n+1}-1)c}$ necessario major est quam $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$, unde pro numero b multiplum ipsius $2^{n+1} - 1$ accipi nequit. Quamobrem alii numeri perfecti pares reperiri non possunt, nisi qui contineantur in formula prius inventa $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$, existente $2^{n+1} - 1$ numero primo; haecque est ipsa regula ab Euclide praescripta. Utrum autem praeter hos dentur numeri perfecti impares nec ne, difficillima est quaestio: neque quisquam adhuc talem numerum invenit, neque nullum omnino dari demonstravit. Sin autem hujusmodi numeri perfecti darentur, ii necessario in hac formula: $(4m+1)^{4n+1}xx$ continerentur, ubi $4m+1$ denotat numerum primum et x numerum imparem.

§ 9. Longe difficilius autem reputatur problema de numeris amicabilibus inveniendis, in quo requiruntur bini numeri, quorum alter aequalis sit summae partium aliquotarum alterius. In hoc problemate solvendo etsi Schotenius summo studio est versatus, tamen plura quam tria hujusmodi numerorum paria non invenit, quae sunt:

220	et	284
17296	et	18416
9363584	et	9437056

atque methodus, qua est usus, ita est comparata, ut vix plures numeri satisfacientes ejus ope inveniri queant. Assumsit enim pro numeris amicabilibus has formulas generales $2^n x$ et $2^n yz$, in quibus numeros x, y et z ponit primos, sumtisque successive pro n numeris determinatis, tentando investigat casus, quibus numeri primi pro x, y, z substituti quaesito satisfaciant. Nemo autem putabit, omnes numeros amicabiles in his formulis contineri, quippe quod non solum a **Schötenio** non est demonstratum, sed etiam sequentes numeri amicabiles, quos equidem inveni, abunde declarant. Namque praeter tria illa paria modo mox explicando, sequentes adeptus sum numeros amicabiles:

$$4.5.131 \quad \text{et} \quad 4.17.43$$
$$4.5.251 \quad \text{et} \quad 4.13.107$$
$$16.17.5119 \quad \text{et} \quad 16.239.383$$
$$4.11.17.263 \quad \text{et} \quad 4.11.43.107$$
$$32.37.12671 \quad \text{et} \quad 32.227.2111$$
$$4.23.827 \quad \text{et} \quad 4.23.5.137$$

quin etiam numeri exhiberi possunt impares, quod quidem multo magis mirum videri queat, qui praescripta proprietate sint praediti, cujusmodi sunt:

$$3^2.7.13.5.17 \quad \text{et} \quad 3^2.7.13.107,$$
$$3^2.7^2.13.5.41 \quad \text{et} \quad 3^2.7^2.13.251,$$

ex quibus satis liquet numeros amicabiles multo esse copiosiores, quam numeros perfectos, qui in serie numerorum rarissime occurrunt.

§ 10. Hi autem numeri aliique satisfacientes non difficulter ope modi signandi ante expositi eliciuntur. Sint enim a et b bini numeri amicabiles quicunque, quoniam eorum summae divisorum sunt A et B, summaeque proinde partium aliquotarum $A-a$ et $B-b$; conditio horum numerorum praebet has aequationes: $A-a=b$ et $B-b=a$, unde fit $A=B=a+b$. Ambo ergo numeri amicabiles eandem habent divisorum summam, quae simul summae amborum numerorum est aequalis. Quo autem ad aequationes idoneas solutio perducatur, ponamus numeros amicabiles esse px et qy, existentibus x et y numeris primis, ita ut sit $a=px$ et $b=qy$, eritque

$$A=P(x+1) \quad \text{et} \quad B=Q(y+1): \quad \text{unde fit} \quad P(x+1)=Q(y+1)=px+qy.$$

Ponatur $P(x+1)=Q(y+1)=PQz$; erit $x+1=Qz$ et $y+1=Pz$, seu $x=Qz-1$ et $y=Pz-1$. Cum vero esse debeat $PQz=px+qy$, erit valoribus his pro x et y substitutis:

$$PQz=Qpz-p+Pqz-q, \quad \text{ideoque} \quad z=\frac{p+q}{Qp+Pq-PQ}.$$

Quare ut formulae assumtae px et qy praebeant numeros amicabiles, esse oportet:

$$x+1=\frac{Q(p+q)}{Qp+Pq-PQ} \quad \text{et} \quad y+1=\frac{P(p+q)}{Qp+Pq-PQ}.$$

Sit n maximus communis divisor numerorum px et qy, ponaturque $p=na$ et $q=nb$, ut sit $P=NA$ et $Q=NB$; et pro numeris amicabilibus has habebimus formulas

$$nax \quad \text{et} \quad nby,$$

in quibus x et y esse debent numeri primi, qui ex his aequationibus definientur:

$$x+1=\frac{nB(a+b)}{Bna+Anb-NAB},\quad y+1=\frac{nA(a+b)}{Bna+Anb-NAB},$$

Sumtis ergo pro a et b pro lubitu numeris determinatis erit:

$$x+1=\frac{(a+b)Bn}{(Ab+Ba)n-ABN}\quad \text{et}\quad y+1=\frac{(a+b)An}{(Ab+Ba)n-ABN},$$

ubi pro n ejusmodi sunt quaerendi numeri, ut x et y non solum fiant numeri integri, sed etiam primi.

§ 11. Cum autem hae formulae nimis sint generales, eas specialiores reddamus; ponamus ergo $a=1$, eritque $A=1$, et formulae numeros amicabiles exhibentes fient

$$nx \quad \text{et} \quad nby,$$

pro quibus x et y ex sequentibus aequationibus definiri debebunt

$$\frac{x+1}{B}=y+1=\frac{(1+b)n}{(B+b)n-BN}.$$

Sit praeterea b numerus primus, ut sit $B=b+1$; fie

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{(1+b)n}{(1+2b)n-(1+b)N}=\frac{(1+b)n}{(2n-N)b-(N-n)}.$$

Si jam insuper pro n potestas binarii accipiatur, ut sit $N=2n-1$, proveniet

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{(1+b)n}{b-(n-1)},$$

quae formulae eos praebebunt numeros amicabiles, qui per methodum Schotenii et Cartesii inveniuntur. Ponantur enim successive pro n potestates binarii, erit

$$\text{pro } n=2,\quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{2(1+b)}{b-1},$$

$$\text{pro } n=4,\quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{4(1+b)}{b-3},$$

$$\text{pro } n=8,\quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{8(1+b)}{b-7},$$

etc.

Possunt vero pro n commode accipi alii numeri, ex quibus differentia $2n-N$ apte exprimatur; sic si capiatur $n=92$, erit $N=168$, $2n=184$, et $N-n=76$, unde fit:

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{92(1+b)}{16b-76}=\frac{23(1+b)}{4b-19}.$$

Hic si ponatur $b=5$, erit:

$$\frac{x+1}{6}=y+1=\frac{6.23}{1}=138 \quad \text{et} \quad x+1=828,$$

opportune autem hinc fit $y=137$ et $x=827$, uterque numerus primus, ita ut numeri amicabiles sint

$$92.827 \quad \text{et} \quad 92.5.137.$$

Similique modo ex his formulis alios numeros satisfacientes elicere licet.

§ 12. Jam non sit amplius $a=1$, sed denotet tam a quam b numerum quemcunque primum; eritque $A=a+1$ et $B=b+1$; atque formulae nax et nby dabunt numeros amicabiles, si sequentes aequationes pro x et y praebeant numeros primos:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{(2ab+a+b)n-(ab+a+b+1)N},$$

seu
$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{(2n-N)ab-(N-n)(a+b)-N}.$$

Hic jam iterum, si pro n sumatur potestas binarii, ut sit $N=2n-1$, erit:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{ab-(n-1)(a+b)-2n+1},$$

quae fractio ante omnia ad numerum integrum est reducenda, idoneis ad hoc pro a et b numeris primis assumendis; sic posito $n=4$, erit:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{4(a+b)}{ab-3(a+b)-7}.$$

Ponatur $b=5$ et habebitur:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{4(a+5)}{2a-22} = \frac{2(a+5)}{a-11}.$$

Tententur jam successive varii valores pro a, uti ponatur $a=13$, erit:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{14} = 18, \quad \text{unde fit} \quad x=107 \quad \text{et} \quad y=251,$$

uterque primus; ita ut numeri amicabiles hinc prodeant $4.13.107$ et $4.5.251$. In iisdem formulis ponatur porro $a=17$, fietque

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{18} = \frac{2.22}{6} \quad \text{et} \quad x=43, \quad y=131,$$

iterum uterque primus, unde nascuntur numeri amicabiles $4.17.43$ et $4.5.131$. Possunt vero etiam pro n assumi, praeter potestates binarii, alii numeri convenientes, uti $n=44$, ut sit $N=84$; et $N:n=21:11$, unde fit:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{11(a+b)}{ab-10(a+b)-21},$$

ubi positis $b=17$ et $a=43$, pro x et y numeri primi resultant.

§ 13. Possunt etiam pro a et b producta ex duobus pluribusve numeris primis substitui. Sint enim p et q numeri primi, ac ponatur $a=cp$ et $b=dq$, ut numeri amicabiles sint $ncpx$ et $ndqy$;

ob $A=Cp+C$ et $B=Dq+D$, erit $Ab+Ba=(Cd+Dc)pq+Cdq+Dcp$ et

$$AB=CDpq+CDp+CDq+CD,$$

unde fiet:
$$\frac{x+1}{D(q+1)} = \frac{y+1}{C(p+1)} = \frac{n(cp+dq)}{(Cd+Dc)npq+Dcnp+Cdnq-CDNpq-CDNp-CDNq-CDN},$$

ubi pro c et d numeros quoscunque, sive primos, sive compositos substituere licet. Sit exempli gratia $c=5$ et $d=11$, erit $C=6$ et $D=12$, numerique amicabiles: $5npx$ et $11nqy$, fietque:

$$\frac{x+1}{12(q+1)} = \frac{y+1}{6(p+1)} = \frac{n(5p+11q)}{126npq+60np+66nq-72Npq-72Np-72Nq-72N},$$

seu
$$\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{n(5p+11q)}{(21n-12N)pq-(12N-10n)p-(12N-11n)q-12N},$$

quae expressio, ne fiat negativa ob $N>n$, necesse est ut sit $21n>12N$, seu $7n>4N$. Sit igitur primo $n=2$, erit $N=3$ atque

$$\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{p+1}=\frac{5p+11q}{3pq-8p-14q-18}, \quad \text{ergo} \quad 3p > 14 \quad \text{et} \quad p > 5.$$

Sit $p=7$; erit $\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{8}=\frac{35+11q}{7q-74}$, unde numerus integer oritur, si $q=61$, qui vero dat $y=15$, non primum. Quodsi vero ponatur $n=14$, ut sit $N=24$, prodibit:

$$\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{p+1}=\frac{7(5p+11q)}{(3p-67)q-74p-144}$$

et facto $p=23$,

$$\frac{x+1}{q+1}=\frac{y+1}{12}=\frac{7(115+11q)}{q-923}.$$

Hoc igitur modo pluribus substitutionibus faciendis, plures numeri amicabiles erui poterunt.

§ 14. Quamquam autem hoc modo multo plures inveniri possunt numeri amicabiles, quam methodo a Cartesio et Schotenio usitata, tamen hic casui plurimum debetur, cum plures positiones plerumque frustra instituantur, antequam pro x et y numeri primi prodeant. Aliam igitur aperiam viam, ab hac ita diversam, ut inventio fortuita numerorum primorum non requiratur: quae derivatur ex ea numerorum amicabilium proprietate, qua uterque eandem habet divisorum summam. Facile autem est ope tabulae annexae hujusmodi numeros quot libuerit invenire, quorum summa divisorum sit eadem. Sint igitur v et u duo istiusmodi numeri, quorum utriusque summa divisorum sit eadem $=V$: quod si ergo esset quoque $V=v+u$, numeri v et u forent amicabiles. Sin autem haec proprietas locum non habeat, tum saepe eorum multipla reperire licebit, quae hac proprietate gaudeant. Ponamus ergo numeros amicabiles esse av et au, erunt utique divisorum summae AV et AV aequales, dummodo a respectu utriusque numeri v et u fuerit primus: reliquum ergo est, ut sit $AV=av+au$, seu $\frac{A}{a}=\frac{v+u}{V}$, ex qua aequatione idoneus valor pro a ita quaeri potest. Reducta fractione $\frac{v+u}{V}$ ad simplicissimam formam, necesse est, ut a per ejus denominatorem sit divisibilis; scilicet si fractio $\frac{v+u}{V}$ perducta sit ad $\frac{m}{n}$, ponatur $a=nb$; erit $A=NB$ et $\frac{A}{a}=\frac{NB}{nb}=\frac{m}{n}$, unde fit $\frac{B}{b}=\frac{m}{N}$. Similiter porro b divisibile erit per denominatorem hujus fractionis, atque operationem ut ante instituendo, tamdiu continuetur, donec solutio vel perspiciatur, vel impossibilis evadat. Notandum vero est pro a non solum multiplum numeri n, sed quoque ejus potestatis cujuspiam assumi posse: ita ut investigatio plerumque pluribus modis institui queat.

§ 15. Sumamus ergo pro v et u duos numeros, quorum eadem sit divisorum summa, ponaturque

$$v=71, \quad u=5.11, \quad \text{erit} \quad V=72=2^3.3^2,$$

ita, ut numeri amicabiles sint $71a$ et $55a$. Erit ergo $\frac{A}{a}=\frac{v+u}{V}=\frac{126}{72}=\frac{7}{4}$. Unde patet, numerum a factorem habere debere 4, seu 2^2, vel etiam altiorem potestatem ipsius binarii. Sit igitur

$$a=2^2b, \quad \text{erit} \quad A=7B \quad \text{et} \quad \frac{A}{a}=\frac{7B}{4b}=\frac{7}{4}, \quad \text{ideoque} \quad \frac{B}{b}=\frac{1}{1}.$$

Hinc igitur obtinetur $b=1$; ac propterea $a=4$, prodeuntque numeri amicabiles:

$$4.71=284 \quad \text{et} \quad 4.55=220.$$

Neque vero altior binarii potestas pro factore ipsius a assumi potest, posito enim

$$a=8b, \quad \text{fit} \quad A=15B \quad \text{et} \quad \frac{A}{a}=\frac{15B}{8b}=\frac{7}{4}, \quad \text{unde} \quad \frac{B}{b}=\frac{14}{15},$$

quae aequatio est impossibilis, cum nullus numerus ad suam divisorum summam rationem majoris inaequalitatis habere possit. Simili modo si statuatur:

$$v = 5.131 = 655, \quad u = 17.43 = 731, \quad \text{erit} \quad V = 2^3.3^2.11,$$

et numeri amicabiles $655a$ et $731a$; debebit autem esse

$$\frac{A}{a} = \frac{v+u}{V} = \frac{1386}{2^3.3^2.11} = \frac{77}{4.11} = \frac{7}{4},$$

unde ut ante fit $a = 4$; ita ut numeri amicabiles hinc reperiantur

$$4.655 = 2620 \quad \text{et} \quad 4.731 = 2924.$$

Pari modo cum sequentes numeri eandem divisorum summam habeant:

$$v = 5.251 \quad \text{et} \quad u = 13.107, \quad \text{erit enim} \quad V = 2^3.3^3.7,$$

unde si numeri amicabiles statuantur:

$$5.251a = 1255a \quad \text{et} \quad 13.107a = 1391a, \quad \text{erit} \quad \frac{A}{a} = \frac{2646}{2^3.3^3.7} = \frac{7}{4},$$

unde iterum fit $a = 4$, ita ut numeri amicabiles sint futuri:

$$5020 \quad \text{et} \quad 5564.$$

§ 16. In his exemplis inventio numeri a nihil habebat difficultatis; sumamus ergo exempla, ubi a plus laboris requirit. Statuatur

$$v = 827 \quad \text{et} \quad u = 5.137, \quad \text{ex utroque fit} \quad V = 2^2.3^2.23.$$

Quaeratur ergo multiplicator communis a, ut sit $\frac{A}{a} = \frac{v+u}{V} = \frac{1512}{2^2.3^2.23} = \frac{42}{23}$. Cum igitur 23 sit factor ipsius a, ponatur $a = 23b$, erit

$$A = 2^3.3B, \quad \text{ideoque} \quad \frac{A}{a} = \frac{2^3.3B}{23b} = \frac{2.3.7}{23}, \quad \text{ergo} \quad \frac{B}{b} = \frac{7}{4},$$

unde fit, ut in superioribus exemplis, $b = 4$ et $a = 4.23$, ideoque numeri amicabiles erunt:

$$4.23.827 = 76084 \quad \text{et} \quad 4.23.5.137 = 63020.$$

Deinde cum numeri 17.263 et 43.107 eandem habeant divisorum summam $2^4.3^3.11$, ponatur

$$v = 17.263 = 4471; \quad \text{et} \quad u = 43.107 = 4601, \quad \text{erit} \quad V = 2^4.3^3.11,$$

$$\text{atque} \quad \frac{A}{a} = \frac{9072}{2^4.3^3.11} = \frac{2^4.3^4.7}{2^4.3^3.11} = \frac{21}{11}.$$

Ponatur ergo $\begin{matrix} a = 11b \\ A = 12B \end{matrix}$, erit $\frac{A}{a} = \frac{12B}{11b} = \frac{21}{11}$ et $\frac{B}{b} = \frac{7}{4}$,

ideoque $b = 4$, $a = 4.11 = 44$: sicque numeri amicabiles erunt:

$$4.11.17.263 = 196724 \quad \text{et} \quad 4.11.43.107 = 202444.$$

Afferamus aliud exemplum, sitque

$$v = 5.17 = 85, \quad u = 107, \quad \text{erit} \quad V = 2^2.3^3, \quad \text{ergo} \quad \frac{A}{a} = \frac{192}{2^2.3^3} = \frac{16}{9}.$$

Ponatur ergo $\begin{matrix} a = 3^2 b \\ A = 13B \end{matrix}$, erit $\frac{A}{a} = \frac{13B}{9b} = \frac{16}{9}$, ergo $\frac{B}{b} = \frac{16}{13}$.

Fiat porro $b = 13c$, erit $B = 14C$ et $\frac{B}{b} = \frac{14C}{13c} = \frac{16}{13}$, ergo $\frac{C}{c} = \frac{8}{7}$,

unde fit $c=7$, $b=7.13$ et $a=3^2.7.13$. Quare hinc numeri amicabiles nascuntur:

$$3^2.7.13.85=69615 \quad \text{et} \quad 3^2.7.13.107=87633.$$

Si posuissemus $a=3^3b$ et $A=2^3.5B$, prodiisset $\frac{B}{b}=\frac{6}{5}$, unde foret $b=5$ et $a=3^3.5$; at cum a ad utrumque numerum v et u debeat esse primus, iste valor ob factorem 5 cum v communem, est inutilis.

§ 17. Evolvamus adhuc exemplum ultimum, quoniam in eo quaedam artificia notanda occurrunt, quae in aliis similibus problematibus solvendis utilitatem habere possunt. Assumamus ergo pro v et u sequentes numeros, qui communem habent divisorum summam:

$$v=5.41=205 \quad \text{et} \quad u=251, \quad \text{eritque} \quad V=2^2.3^2.7.$$

Hinc ergo nascuntur numeri amicabiles

$$205a \quad \text{et} \quad 251a, \quad \text{si fuerit} \quad \frac{A}{a}=\frac{456}{2^2.3^2.7}=\frac{38}{3.7}.$$

Ergo numerus a divisores habebit 3 et 7. Ponatur ergo:

$$\begin{matrix} a=3b \\ A=4B \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{B}{b}=\frac{19}{2.7},$$

quae aequatio jam est impossibilis, cum 19 sit minor quam summa divisorum ipsius 2.7, quae est 24. Numeri autem multipli ipsius 2.7 multo adhuc minorem tenent rationem ad summas suorum divisorum. Ponamus ergo:

$$\begin{matrix} a=3^2b \\ A=13B \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{B}{b}=\frac{2.3.19}{7.13},$$

ideoque b factores habebit 7 et 13. Ponatur nunc

$$\begin{matrix} b=7c \\ B=8C \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{C}{c}=\frac{3.19}{4.13},$$

quae aequatio iterum est impossibilis, ob $3.19 <$ summa divisorum ipsius 4.19. Quare ulterius tentetur haec positio:

$$\begin{matrix} b=7^2c \\ B=3.19C \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{C}{c}=\frac{14}{13}, \quad \text{unde fit} \quad c=13;$$

hincque $b=7^2.13$ et $a=3^2.7^2.13$. Numeri ergo amicabiles ex hac positione orti erunt;

$$3^2.7^2.13.205=1175265 \quad \text{atque} \quad 3^2.7^2.13.251=1438983.$$

His igitur praeceptis observatis non difficile erit tam hoc problema de numeris amicabilibus quam alia similia copiosius resolvere.

Sequitur tabula exhibens summas divisorum numerorum primorum, millenario inferiorum, eorumque potestatum:

Num.	Summa divisorum.
2	$3.$
2^2	$7.$
2^3	$3.\ 5.$
2^4	$31.$
2^5	$3^2.\ 7.$
2^6	$127.$
2^7	$3.\ 5.\ 17.$
2^8	$7.\ 73.$
2^9	$3.\ 11.\ 31$
2^{10}	$23.\ 89.$
2^{11}	$3^2.\ 5.\ 7.\ 13.$
2^{12}	$8191.$
2^{13}	$3.\ 43.\ 127.$
2^{14}	$7.\ 31.\ 151.$
2^{15}	$3.\ 5.\ 17.\ 257.$
2^{16}	$131071.$
2^{17}	$3^3.\ 7.\ 19.\ 73.$
2^{18}	$524287.$
2^{19}	$3.\ 5^2.\ 11.\ 31.\ 41.$
2^{20}	$7^2.\ 127.\ 337.$
2^{21}	$3.\ 23.\ 89.\ 683.$
2^{22}	$47.\ 178481.$
2^{23}	$3^2.\ 5.\ 7.\ 13.\ 17.\ 241.$
2^{24}	$31.\ 601.\ 1801.$
2^{25}	$3.\ 2731.\ 8191.$
2^{26}	$7.\ 73.\ 262657.$
2^{27}	$3.\ 5.\ 29.\ 43.\ 113.\ 127.$
2^{28}	$233.\ 1103.\ 2089.$
2^{29}	$3^2.\ 7.\ 11.\ 31.\ 151.\ 331.$
2^{30}	$2147483647.$
2^{31}	$3.\ 5.\ 17.\ 257.\ 65537.$
2^{32}	$7.\ 23.\ 89.\ 599479.$
2^{33}	$3.\ 43691.\ 131071.$
2^{34}	$31.\ 71.\ 127.\ 122921.$
2^{35}	$3^3.5.7.13.19.37.73.109.$
2^{36}	$223.\ 616318177.$
3	$2^2.$
3^2	$13.$
3^3	$2^3.\ 5.$
3^4	$11^2.$
3^5	$2^2.\ 7.\ 13.$
3^6	$1093.$
3^7	$2^4.\ 5.\ 41.$
3^8	$13.\ 757.$
3^9	$2^2.\ 11^2.\ 61.$
3^{10}	$23.\ 3851.$
3^{11}	$2^3.\ 5.\ 7.\ 13.\ 73.$
3^{12}	$797161.$
3^{13}	$2^2.\ 547.\ 1093.$
3^{14}	$11^2.\ 13.\ 4561.$
3^{15}	$2^5.\ 5.\ 17.\ 41.\ 193.$
5	$2.\ 3.$
5^2	$31.$
5^3	$2^2.\ 3.\ 13.$
5^4	$11.\ 71.$
5^5	$2.\ 3^2.\ 7.\ 31.$
5^6	$19531.$
5^7	$2^3.\ 3.\ 13.\ 313.$
5^8	$19.\ 31.\ 829.$
5^9	$2.\ 3.\ 11.\ 71.\ 521.$
7	$2^3.$
7^2	$3.\ 19.$
7^3	$2^4.\ 5^2.$
7^4	$2801.$
7^5	$2^3.\ 3.\ 19.\ 43.$
7^6	$29.\ 4733.$
7^7	$2^5.\ 5^2.\ 1201.$
7^8	$3^2.\ 19.\ 37.\ 1063.$
7^9	$2^3.\ 11.\ 191.\ 2801.$
7^{10}	$329554457.$
11	$2^2.\ 3.$
11^2	$7.\ 19.$
11^3	$2^3.\ 3.\ 61.$
11^4	$5.\ 3221.$
11^5	$2^2.\ 3^2.\ 7.\ 19.\ 37.$
11^6	$43.\ 45319.$
11^7	$2^4.\ 3.\ 61.\ 7321.$
11^8	$7.\ 19.\ 1772893.$
11^9	$2^2.\ 3.\ 5.\ 3221.\ 13421.$
13	$2.\ 7.$
13^2	$3.\ 61.$
13^3	$2^2.\ 5.\ 7.\ 17.$
13^4	$30941.$
13^5	$2.\ 3.\ 7.\ 61.\ 157.$
13^6	$5229043.$
13^7	$2^3.\ 5.\ 7.\ 17.\ 14281.$
17	$2.\ 3^2.$
17^2	$307.$
17^3	$2^2.\ 3^2.\ 5.\ 29.$
17^4	$88741.$
17^5	$2.\ 3^3.\ 7.\ 13.\ 307.$
19	$2^2.\ 5.$
19^2	$3.\ 127.$
19^3	$2^3.\ 5.\ 181.$
19^4	$151.\ 911.$
19^5	$2^2.\ 3.\ 5.\ 7^3.\ 127.$
23	$2^3.\ 3.$
23^2	$7.\ 79.$
23^3	$2^4.\ 3.\ 5.\ 53.$
23^4	$292561.$
29	$2.\ 3.\ 5.$
29^2	$13.\ 67.$
29^3	$2^2.\ 3.\ 5.\ 421.$
31	$2^5.$
31^2	$3.\ 331.$
31^3	$2^6.\ 13.\ 37.$
37	$2.\ 19.$
37^2	$3.\ 7.\ 67.$
37^3	$2^2.\ 5.\ 2603.$

Num.	Summa divisorum	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
41	2. 3. 7.	89	2. 3^{2}. 5.	149	2. 3. 5^{2}.
41^{2}	1723.	89^{2}	8011.	149^{2}	7. 31. 103.
41^{3}	2^{2}. 3. 7. 29^{2}.	89^{3}	2^{2}. 3^{2}. 5. 17. 233.	149^{3}	2^{2}. 3. 5^{2}. 11. 101.
43	2^{2}. 11.	97	2. 7^{2}.	151	2^{3}. 19.
43^{2}	3. 631.	97^{2}	3. 3169.	151^{2}	3. 7. 1093.
43^{3}	2^{3}. 5^{2}. 11. 37.	97^{3}	2^{2}. 5, 7^{2}. 941.	151^{3}	2^{4}. 13. 19. 877.
47	2^{4}. 3.	101	2. 3. 17.	157	2. 79.
47^{2}	37. 61.	101^{2}	10303.	157^{2}	3. 8269.
47^{3}	2^{5}. 3. 5. 13. 17.	101^{3}	2^{2}. 3. 17. 5101.	157^{3}	2^{2}. 5^{2}. 17. 29. 79.
53	2. 3^{3}.	103	2^{3}. 13.	163	2^{2}. 41.
53^{2}	7. 409.	103^{2}	3. 3571.	163^{2}	3. 7. 19. 67.
53^{3}	2^{2}. 3^{3}. 5. 281.	103^{3}	2^{4}. 5. 13. 1061.	163^{3}	2^{3}. 5. 41. 2657.
59	2^{2}. 3. 5.	107	2^{2}. 3^{3}.	167	2^{3}. 3. 7.
59^{2}	3541.	107^{2}	7. 13. 127.	167^{2}	28057.
59^{3}	2^{3}. 3. 5. 1741.	107^{3}	2^{3}. 3^{3}. 5^{2}. 229.	167^{3}	2^{4}. 3. 5. 7. 2789.
61	2. 31.	109	2. 5. 11.	173	2. 3. 29.
61^{2}	3. 13. 97.	109^{2}	3. 7. 571.	173^{2}	67. 449.
61^{3}	2^{2}. 31. 1861.	109^{3}	2^{2}. 5. 11. 13. 457.	173^{3}	2^{2}. 3. 5. 29. 41. 73.
67	2^{2}. 17.	113	2. 3. 19.	179	2^{2}. 3^{2}. 5.
67^{2}	3. 7^{2}. 31.	113^{2}	13. 991.	179^{2}	7. 4603.
67^{3}	2^{3}. 5. 17. 449.	113^{3}	2^{2}. 3. 5. 19. 1277.	179^{3}	2^{3}. 3^{2}. 5. 37. 433.
71	2^{3}. 3^{2}.	127	2^{7}.	181	2. 7. 13.
71^{2}	5113.	127^{2}	3. 5419.	181^{2}	3. 79. 139.
71^{3}	2^{4}. 3^{2}. 2521.	127^{3}	2^{8}. 5. 1613.	181^{3}	2^{2}. 7. 13. 16381.
73	2. 37.	131	2^{2}. 3. 11.	191	2^{6}. 3.
73^{2}	3. 1801.	131^{2}	17293.	191^{2}	7. 13^{2}. 31.
73^{3}	2^{2}. 5. 13. 37. 41.	131^{3}	2^{3}. 3. 11. 8581.	191^{3}	2^{7}. 3. 17. 29. 37.
79	2^{4}. 5.	137	2. 3. 23.	193	2. 97.
79^{2}	3. 7^{2}. 43.	137^{2}	7. 37. 73.	193^{2}	3. 7. 1783.
79^{3}	2^{5}. 5. 3121.	137^{3}	2^{2}. 3. 5. 23. 1877.	193^{3}	2^{2}. 5^{3}. 97. 149.
83	2^{2}. 3. 7.	139	2^{2}. 5. 7.	197	2. 3^{2}. 11.
83^{2}	19. 367.	139^{2}	3. 13. 499.	197^{2}	19. 2053.
83^{3}	2^{3}. 3. 5. 7. 13. 53.	139^{3}	2^{3}. 5. 7. 9661.	197^{3}	2^{2}. 3^{2}. 5. 11. 3881.

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
199	$2^3. 5^2.$	269	$2. 3^3. 5.$	337	$2. 13^2.$
199^2	3. 13267.	269^2	13. 37. 151.	337^2	3. 43. 883.
199^3	$2^4. 5^2. 19801.$	269^3	$2^2. 3^3. 5. 97. 373.$	337^3	$2^2. 5. 13^2. 41. 277.$
211	$2^2. 53.$	271	$2^4. 17.$	347	$2^2. 3. 29.$
211^2	3. 13. 31. 37.	271^2	3. 24571.	347^2	7. 13. 1327.
211^3	$2^3. 53. 113. 197.$	271^3	$2^5. 17. 36721.$	347^3	$2^3. 3. 5. 29. 12041.$
223	$2^5. 7.$	277	2. 139.	349	$2. 5^2. 7.$
223^2	3. 16651.	277^2	3. 7. 19. 193.	349^2	3. 19. 2143.
223^3	$2^6. 5. 7. 4973.$	277^3	$2^2. 5. 139. 7673.$	349^3	$2^2. 5^2. 7. 60901.$
227	$2^2. 3. 19.$	281	2. 3. 47.	353	2. 3. 59.
227^2	73. 709.	281^2	109. 727.	353^2	19. 6577.
227^3	$2^3. 3. 5. 19. 5153.$	281^3	$2^2. 3. 13. 47. 3037.$	353^3	$2^2. 3. 5. 17. 59. 733.$
229	2. 5. 23.	283	$2^2. 71.$	359	$2^3. 3^2. 5.$
229^2	3. 97. 181.	283^2	3. 73. 367.	359^2	7. 37. 499.
229^3	$2^2. 5. 13. 23. 2017.$	283^3	$2^3. 5. 71. 8009.$	359^3	$2^4. 3^2. 5. 13. 4957.$
233	$2. 3^2. 13.$	293	$2. 3. 7^2.$	367	$2^4. 23.$
233^2	7. 7789.	293^2	86143.	367^2	3. 13. 3463.
233^3	$2^2. 3^2. 5. 13. 61. 89.$	293^3	$2^2. 3. 5^2. 7^2. 17. 101.$	367^3	$2^5. 5. 23. 13469.$
239	$2^4. 3. 5.$	307	$2^2. 7. 11.$	373	2. 11. 17.
239^2	19. 3019.	307^2	3. 43. 733.	373^2	$3. 7^2. 13. 73.$
239^3	$2^5. 3. 5. 13^4.$	307^3	$2^3. 5^3. 7. 11. 13. 29.$	373^3	$2^2. 5. 11. 17. 13913.$
241	$2. 11^2.$	311	$2^3. 3. 13.$	379	$2^2. 5. 19.$
241^2	3. 19441.	311^2	19. 5107.	379^2	3. 61. 787.
241^3	$2^2. 11^2. 113. 257.$	311^3	$2^4. 3. 13. 137. 353.$	379^3	$2^3. 5. 19. 71821.$
251	$2^2. 3^2. 7.$	313	2. 157.	383	$2^7. 3.$
251^2	43. 1471.	313^2	$3. 181^2.$	383^2	147073.
251^3	$2^3. 3^2. 7. 17^2. 109.$	313^3	$2^2. 5. 97. 101. 157.$	383^3	$2^8. 3. 5, 14669.$
257	2. 3. 43.	317	2. 3. 53.	389	2. 3. 5. 13.
257^2	61. 1087.	317^2	7. 14401.	389^2	7. 21673.
257^3	$2^2. 3. 5^2. 43. 1321.$	317^3	$2^2. 3. 5. 13. 53. 773.$	389^3	$2^2. 3. 5. 13. 29. 2609.$
263	$2^3. 3. 11.$	331	$2^2. 83.$	397	2. 199.
263^2	$7^2. 13. 109.$	331^2	3. 7. 5233.	397^2	3. 31. 1699.
263^3	$2^4. 3. 5. 11. 6917.$	331^3	$2^3. 29. 83. 1889.$	397^3	$2^2. 5. 199. 15761.$

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
401	2. 3. 67.	463	2^4. 29.	547	2^2. 137.
401^2	7. 23029.	463^2	3. 19. 3769.	547^2	3. 163. 613.
401^3	2^2. 3. 37. 41. 53. 67.	463^3	2^5. 5. 13. 17. 29. 97.	547^3	2^3. 5. 137. 29921.
409	2. 5. 41.	467	2^2. 3^2. 13.	557	2. 3^2. 31.
409^2	3. 55897.	467^2	19. 11503.	557^2	7^2. 6343.
409^3	2^2. 5. 41. 83641.	467^3	2^3. 3^2. 5. 13. 113. 193.	557^3	2^2. 3^2. 5^3. 17. 31. 73.
419	2^2. 3. 5. 7.	479	2^5. 3. 5.	563	2^2. 3. 47.
419^2	13. 13537.	479^2	43. 5347.	563^2	31. 10243.
419^3	2^3. 3. 5. 7. 41. 2141.	479^3	2^6. 3. 5. 89. 1289.	563^3	2^3. 3. 5. 29. 47. 1093.
421	2. 211.	487	2^3. 61.	569	2. 3. 5. 19.
421^2	3. 59221.	487^2	3. 7. 11317.	569^2	7^2. 6619.
421^3	2^2. 13. 17. 211. 401.	487^3	2^4. 5. 37. 61. 641.	569^3	2^2. 3. 5. 19. 161881.
431	2^4. 3^3.	491	2^2. 3. 41.	571	2^2. 11. 13.
431^2	7. 67. 397.	491^2	37. 6529.	571^2	3. 7. 103. 151.
431^3	2^5. 3^3. 293. 317.	491^3	2^3. 3. 41. 149. 809.	571^3	3^3. 11. 13. 163041.
433	2. 7. 31.	499	2^2. 5^3.	577	2. 17^2.
433^2	3. 37. 1693.	499^2	3. 7. 109^2.	577^2	3. 19. 5851.
433^3	2^2. 5. 7. 31. 18749.	499^3	2^3. 5^3. 13. 61. 157.	577^3	2^2. 5. 13^2. 17^2. 197.
439	2^3. 5. 11.	503	2^3. 3^2. 7.	587	2^2. 3. 7^2.
439^2	3. 31^2. 67.	503^2	13. 19501.	587^2	547. 631.
439^3	2^4. 5. 11. 173. 557.	503^3	2^4. 3^2. 5. 7. 25301.	587^3	2^3. 3. 5. 7^2. 34457.
443	2^2. 3. 37.	509	2. 3. 5. 17.	593	2. 3^3. 11.
443^2	7. 28099.	509^2	43. 6037.	593^2	163. 2161.
443^3	2^3. 3. 5^4. 37. 157.	509^3	2^2. 3. 5. 17. 281. 461.	593^3	2^2. 3^3. 5^2. 11. 13. 541.
449	2. 3^2. 5^2.	521	2. 3^2. 29.	599	2^3. 3. 5^2.
449^2	97. 2083.	521^2	31^2. 283.	599^2	7. 51343.
449^3	2^2. 3^2. 5^2. 100801.	521^3	2^2. 3^2. 29. 135721.	599^3	2^4. 3. 5^2. 17. 61. 173.
457	2. 229.	523	2^2. 131.	601	2. 7. 43.
457^2	3. 7. 9967.	523^2	3. 13. 7027.	601^2	3. 13. 9277.
457^3	2^2. 5^2. 229. 4177.	523^3	2^3. 5. 7. 131. 1609.	601^3	2^2. 7. 43. 313. 577.
461	2. 3. 7. 11.	541	2. 271.	607	2^5. 19.
461^2	373. 571.	541^2	3. 7. 13963.	607^2	3. 13. 9463.
461^3	2^2. 3. 7. 11106261.	541^3	2^2. 13. 271. 11257.	607^3	2^6. 5^2. 19. 7369.

Num.	Summa divisorum	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
613	2. 307.	677	2. 3. 113.	757	2. 379.
613^2	3. 125461.	677^2	459007.	757^2	3. 13. 14713.
613^3	2^2. 5. 53. 307. 709.	677^3	2^2. 3. 5. 113. 45833.	757^3	2^2. 5^2. 73. 157. 379.
617	2. 3. 103.	683	2^2. 3^2. 19.	761	2. 3. 127.
617^2	97. 3931.	683^2	7. 66739.	761^2	579883.
617^3	2^2. 3. 5. 103. 38069.	683^3	2^3. 3^2. 5. 19. 46649.	761^3	2^2. 3. 17. 127. 17033.
619	2^2. 5. 31.	691	2^2. 173.	769	2. 5. 7. 11.
619^2	3. 19. 6733.	691^2	3. 19. 8389.	769^2	3. 31. 6367.
619^3	2^3. 5. 13. 31. 14737.	691^3	2^3. 173. 193. 1237.	769^3	2^2. 5. 7. 11. 71. 17393.
631	2^3. 79.	701	2. 3^3. 13.	773	2. 3^2. 43.
631^2	3. 307. 433.	701^2	492103.	773^2	598303.
631^3	2^4. 79. 199081.	701^3	2^2. 3^3. 13. 17. 97. 149.	773^3	2^2. 3^2. 5. 43. 59753.
641	2. 3. 107.	709	2. 5. 71.	787	2^2. 197.
641^2	7. 58789.	709^2	3. 7. 23971.	787^2	3. 37^2. 151.
641^3	2^2. 3. 107. 205441.	709^3	2^2. 5. 37. 71. 6793.	787^3	2^3. 5. 197. 241. 257.
643	2^2. 7. 23.	719	2^4. 3^2. 5.	797	2. 3. 7. 19
643^2	3. 97. 1423.	719^2	487. 1063.	797^2	157. 4051.
643^3	2^3. 5^2. 7. 23. 8269.	719^3	2^5. 3^2. 5. 53. 4877.	797^3	2^2. 3. 5. 7. 19. 63521.
647	2^3. 3^4.	727	2^3. 7. 13.	809	2. 3^4. 5.
647^2	211. 1987.	727^2	3. 176419.	809^2	7. 13. 19. 379.
647^3	2^4. 3^4. 5. 41. 1021.	727^3	2^4. 5. 7. 13. 17. 3109.	809^3	2^2. 3^4. 5. 229. 1429.
653	2. 3. 109.	733	2. 367.	811	2^2. 7. 29.
653^2	7. 13^2. 19^2.	733^2	3. 19. 9439.	811^2	3. 31. 73. 97.
653^3	2^2. 3. 5. 109. 42641.	733^3	2^2. 5. 13. 367. 4133.	811^3	2^3. 7. 13. 29. 41. 617.
659	2^2. 3. 5. 11.	739	2^2. 5. 37.	821	2. 3. 137.
659^2	13. 33457.	739^2	3. 7. 26041.	821^2	7. 229. 421.
659^3	2^3. 3. 5. 11. 17. 53. 241.	739^3	2^3. 5. 37. 273061.	821^3	2^2. 3. 137. 337021.
661	2^2. 331.	743	2^3. 3. 31.	823	2^3. 103.
661^2	3. 145861.	743^2	552793.	823^2	3. 7. 43. 751.
661^3	2^2. 331. 218461.	743^3	2^4. 3. 5^2. 31. 61. 181.	823^3	2^4. 5. 103. 67733.
673	2^2. 337.	751	2^4. 47.	827	2^2. 3^2. 23.
673^2	3. 151201.	751^2	3. 7. 26893.	827^2	684757.
673^3	2^2. 5. 337. 45293.	751^3	2^5. 47. 282001.	827^3	2^3. 3^2. 5. 13. 23. 5261.

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
829	2. 5. 83.	883	2^2. 13. 17.	947	2^2. 3. 79.
829^2	3. 211. 1087.	883^2	3. 260191.	947^2	7. 277. 463.
829^3	2^2. 5. 17^2. 29. 41. 83.	883^3	2^3. 5. 13. 17. 77969.	947^3	2^3. 3. 5. 79. 89681.
839	2^3. 3. 5. 7.	887	2^3. 3. 37.	953	2. 3^2. 53.
839^2	704761.	887^2	13. 60589.	953^2	181. 5023.
839^3	2^4. 3. 5. 7. 109. 3229	887^3	2^4. 3. 5. 29. 37. 2713.	953^3	2^2. 3^2. 5. 53. 90821.
853	2. 7. 61.	907	2^2. 227.	967	2^3. 11^2.
853^2	3. 43. 5647.	907^2	3. 7. 39217.	967^2	3. 67. 4657.
853^3	2^2. 5. 7. 13. 29. 61. 193.	907^3	2^3. 5^2. 227. 16453.	967^3	2^4. 5. 11^2. 13. 7193.
857	2. 3. 11. 13.	911	2^4. 3. 19.	971	2^2. 3^5.
857^2	735307.	911^2	830833.	971^2	13. 79. 919.
857^3	2^2. 3. 5^2. 11. 13. 37. 397.	911^3	2^5. 3. 19. 29. 41. 349.	971^3	2^3. 3^5. 197. 2393.
859	2^2. 5. 43.	919	2^3. 5. 23.	977	2. 3. 163.
859^2	3. 246247.	919^2	3. 7. 13. 19. 163.	977^2	7. 136501.
859^3	2^3. 5. 43. 137. 2693.	919^3	2^4. 5. 23. 37. 101. 113.	977^3	2^2. 3. 5. 53. 163. 1801.
863	2^5. 3^3.	929	2. 3. 5. 31.	983	2^3. 3. 41.
863^2	7^2. 15217.	929^2	157. 5503.	983^2	103. 9391.
863^3	2^6. 3^3. 5. 13. 17. 337.	929^3	2^2. 3. 5. 31. 431521.	983^3	2^4. 3. 5. 13. 41. 7433.
877	2. 439.	937	2. 7. 67.	991	2^5. 31.
877^2	3. 7. 37. 991.	937^2	3. 292969.	991^2	3. 7. 13^2. 277.
877^3	2^2. 5. 439. 76913.	937^3	2^2. 5. 7. 67. 87797.	991^3	2^6. 31. 491041.
881	2. 3^2. 7^2.	941	2. 3. 157.	997	2. 499.
881^2	19. 40897.	941^2	811. 1093.	997^2	3. 13. 31. 823.
881^3	2^2. 3^2. 7^2. 388081.	941^3	2^2. 3. 13. 157. 34057.	997^3	2^2. 5. 499. 99401.

IV.

Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum, quorum area rationaliter exprimi possit.

(Conf. *Comment. arithm.* Prooem. pag. X. N. 6.)

. . . .

27. Problemate igitur proposito ita soluto, ut nihil ultra desiderari possit, siquidem solutio tradita latissime patet. Verum praeter animadversiones jam allatas, solutio adhuc alias rationes suppeditat, quarum evolutio non parum ad analyseos incrementum conferre videtur. In hujusmodi enim quaestionibus non tam solutioni ipsi, quam usui in reliquis analyseos partibus intentos nos esse convenit.

28. Primum igitur observo, etiamsi in formulis pro lateribus trianguli § 9 latus a longe alio modo ac reliqua b et c exprimatur, tamen ea inter se ita esse permutabilia, ut nulli prae reliquis ulla praerogativa tribui possit. Ita in casibus § 12 evolutis videmus latus a casu primo esse 14, cum in casu tertio, qui idem triangulum praebet, numerus 14 lateri c conveniat. Simili modo latera a et c in casibus congruis 2do et 9no, idem 4to et 13^{tio} inter se permutantur.

29. Haec permutabilitas, non obstante expressionum diversitate, omni attentione digna videtur. Quae quo clarius agnoscatur, ea non solum in lateribus triangulorum, quae problemati proposito satisfaciunt, locum habere deprehenditur, sed etiam generatim in omnibus triangulis, quorum area rationaliter exprimi potest; in formulis enim pro hujusmodi triangulis § 5 datis similis disparitas inter latus a et duo reliqua b et c observatur.

30. Ad hoc ostendendum contemplemur rationem ternorum laterum hujusmodi triangulorum, quorum area est rationalis, quae ita se habet:

$$a : b : c = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{pqrs} : \frac{pp + qq}{pq} : \frac{rr + ss}{rs},$$

ubi latera b et c semper eam inter se tenent rationem, quam duae fractiones hujus formae $\frac{ff+gg}{fg}$, a qua tamen fractio $\frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{pqrs}$ abhorrere videtur. In hac quidem signa ambigua adhibui, quoniam binis lateribus b et c gemini valores lateris a conveniunt.

31. Docendum ergo est etiam latera a et b semper talem rationem inter se tenere, qualis est inter binos numeros formae $\frac{ff+gg}{fg}$. Cum igitur sit

$$a : b = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{rs} : pp + qq,$$

dico eandem proportionem ita exprimi posse, ut sit

$$a : b = \frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy},$$

convenientia enim perspicua reddetur sumendo $x = ps \pm qr$ et $y = pr \mp qs$.

32. Posito enim $x = ps \pm qr$ et $y = pr \mp qs$, erit

$$xx + yy = (pp + qq)(rr + ss) \text{ et } xy = (ps \pm qr)(pr \mp qs),$$

unde fit

$$\frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy} = \frac{rr + ss}{rs} : \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}$$

ideoque

$$\frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy} = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{rs} : pp + qq,$$

quae est ipsa ratio, quam formulae nostrae inter a et b praebuerunt.

33. Quare si a, b, c sint latera trianguli, cujus area rationalis, inter bina quaeque alia ratio existere nequit, nisi quae intercedat inter binos numeros formae $\frac{ff + gg}{fg}$. Ac si duo latera aliam inter se teneant rationem, nullo modo tertium latus inveniri potest, quod cum illis aream rationalem includat.

34. Quomodo ergo hae rationes, quae inter bina latera trianguli aream rationalem habentis intercedere possunt, sint comparatae, et quaenam hinc excludantur, haud abs re erit diligentius inquirere. Considerari ergo primum oportet fractiones in forma $\frac{ff + gg}{fg}$, vel potius in hac $\frac{ff + gg}{2fg}$ contentas.

35. Haec autem fractio $\frac{ff + gg}{2fg}$ pro numeratore habet hypothenusam trianguli rectanguli rationalis pro . . . .

49. Huic problemati affine est istud:

Invenire triangulum, in quo rectae, ex singulis angulis ita ductae, ut latera opposita bifariam secent, per numeros rationales exprimantur;

quod autem illo ideo difficilius est judicandum, quoniam non generaliter solvi patitur. Positis a, b, c lateribus trianguli, negotium huc redit, ut tres istae formulae

$$2aa + 2bb - cc, \quad 2aa + 2cc - bb, \quad 2bb + 2cc - aa$$

reddantur quadrata.

50. Si in hunc finem ponatur

$$a = (m + n)p - (m - n)q, \quad b = (m - n)p + (m + n)q, \quad c = 2mp - 2nq,$$

ut formula prima quadrata evadat; pro reliquis ad quadratum revocari debent hae formulae

$$(3m + n)^2 pp - 2(3mm + 8mn - 3nn)pq + (3n - m)^2 qq \quad \text{et}$$

$$(3m - n)^2 pp - 2(3nn + 8mn - 3mm)pq + (3n + m)^2 qq$$

quorum productum sufficiet quadrato coaequasse. Est vero productum

$$\left.\begin{array}{l} +(9mm-nn)^2p^4-8mn(27mm+13nn)p^3q \\ +(9nn-mm)^2q^4-8mn(27nn+13mm)pq^3 \end{array}\right\} -6(3m^4-94mmnn+3n^4)ppqq.$$

51. Si radix statuatur

$$(9mm-nn)pp-\frac{4mn(27mm+13nn)}{9mm-nn}pq+(9nn-mm)qq,$$

elicerentur hi valores:

$$p=(mm+nn)(9mm-nn) \quad \text{et} \quad q=2mn(9mm+nn),$$

ex quibus sequentia triangula simpliciora concluduntur

$a=87,$	$a=127,$	$a=207,$	$a=881,$	$a=463$
$b=85,$	$b=131,$	$b=328,$	$b=640,$	$b=142$
$c=68,$	$c=158,$	$c=145,$	$c=569,$	$c=529.$

52. Cum hic invenienda sint tria quadrata, ut binorum summa duplicata, tertio minuta, fiat quadratum, simili modo facile solvitur quaestio de tribus quadratis, quorum binorum summa ipsa, tertio minuta, fiat quadratum. Quo in genere facillima videtur quaestio haec:

Invenire tria quadrata, quorum binorum summa sit quadratum.

Verum tentanti mox patebit, hujus solutionem multo majoribus difficultatibus implicari. Si enim positis his quadratis aa, bb et cc, statuatur

$$b=\frac{2mn}{mm-nn}a \quad \text{et} \quad c=\frac{2pq}{pp-qq}a,$$

ut tam $aa+bb$, quam $aa+cc$ fiant quadrata, superest, ut haec formula

$$mmnn(pp-qq)^2+ppqq(mm-nn)^2$$

aequetur quadrato; cujus tractatio frustra suscipitur.

53. Commodissima autem methodus hoc problema solvendi videtur statuendo

$$aa=4mnpq, \quad b=mp-nq \quad \text{et} \quad c=np-mq,$$

ut fiat

$$aa+bb=(mp+nq)^2 \quad \text{et} \quad aa+cc=(np+mq)^2.$$

Quo igitur et $bb+cc$ fiat quadratum, fiat

$$mp-nq=2(mm-nn)rs=b, \quad np-mq=(mm-nn)(rr-ss)=c$$

eritque

$$bb+cc=(mm-nn)^2(rr+ss)^2.$$

Cum autem hinc prodeat

$$p=2mrs-n(rr-ss) \quad \text{et} \quad q=2nrs-m(rr-ss),$$

habebitur $\frac{aa}{4}=mmnnr^4-2mn(mm+nn)r^3s+2mmnnrrss+2mn(mm+nn)rs^3+mmnns^4.$

54. Ad hanc speciali saltem modo resolvendam fingatur

$$\frac{a}{2}=mnrr-(mm+nn)rs+mnss,$$

elicieturque $r = 4mn$ et $s = mm + nn$, unde numeris m et n arbitrio nostro relictis, consequimur sequentes numerorum a, b, c valores

$$a = 2mn(3mm - nn)(3nn - mm),$$
$$b = 8mn(mm - nn)(mm + nn),$$
$$c = (mm - nn)(mm - 4mn + nn)(mm + 4mn + nn).$$

55. Hinc simplicissima solutio eruitur sumendo $m = 2$ et $n = 1$, unde resultant hi numeri:

$a = 44$	$aa = 1936$	$aa + bb = 59536 = 244^2$
$b = 240$	$bb = 57600$	$aa + cc = 15625 = 125^2$
$c = 117$	$cc = 13689$	$bb + cc = 71289 = 267^2$.

V.

Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels, que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré.

---

1. Soient x, y, z les racines des trois carrés, les équations seront

$$\left.\begin{aligned} yy + zz - xx &= pp, \\ xx + zz - yy &= qq, \\ xx + yy - zz &= rr. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si l'on ajoute ces équations deux à deux, elles produiront les équations suivantes:

$$\begin{aligned} pp + qq &= 2zz, \\ pp + rr &= 2yy, \\ qq + rr &= 2xx, \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'en résolvant notre problème, celui-ci sera aussi resolu: *trouver trois nombres carrés tels, que la demi-somme de deux quelconques d'entre eux produise aussi un carré;* puisque

$$\frac{pp+qq}{2} = zz, \quad \frac{pp+rr}{2} = yy \quad \text{et} \quad \frac{qq+rr}{2} = xx.$$

2. De plus il est évident, qu'ayant trouvé les trois nombres x, y, z, tous leurs multiples satisferont pareillement, savoir: nx, ny, nz. De sorte que tous ces cas ne renferment qu'une seule solution, et par conséquent, nous ne chercherons, dans la suite, que trois nombres tels, qu'ils n'aient aucun diviseur commun. D'où il est d'abord évident, que tous les trois nombres cherchés ne seront pas pairs. Or, avec quelque attention, on verra de suite que ces trois nombres doivent être tous impairs; car tout carré pair est de la forme $4aa$, et tout carré impair de la forme $4(aa+a)+1$; donc si nous supposons deux de nos carrés pairs, c'est-à-dire

$$xx = 4aa, \quad y = 4bb \quad \text{et le troisième impair:} \quad zz = 4(cc+c)+1,$$

il en résultera pour $xx+yy-zz$ cette expression $4(aa+bb-cc-c)-1$, qui ne saurait jamais être un carré. Si nous supposons ensuite deux seulement impairs et le troisième pair, comme

$$xx = 4(aa+a)+1, \quad y = 4(bb+b)+1, \quad z = 4cc,$$

nous aurons pour $xx+yy-zz$ cette expression $4(aa+a+bb+b-cc)+2$, qui ne saurait non plus être un carré. Mais posant tous les trois carrés impairs, par exemple

$$xx = 4(aa+a)+1, \quad yy = 4(bb+b)+1, \quad z = 4(cc+c)+1,$$

nous aurons pour $xx + yy - zz$ la forme $4(aa + a + bb + b - cc - c) + 1$, qui peut représenter un carré.

3. Cette considération nous montre d'abord, que si l'on voulait chercher quatre nombres carrés tels, que la somme de trois moins le quatrième fasse un nombre carré, la recherche serait inutile, puisque la question est absolument impossible. Pour le prouver, on n'a qu'à parcourir tous les cas par rapport aux pairs et impairs. En effet,

1) si trois carrés sont pairs, savoir:

$$xx = 4aa, \quad yy = 4bb, \quad zz = 4cc \quad \text{et} \quad vv = 4(dd + d) + 1,$$

on aura pour $xx + yy + zz - vv$ la valeur $4(aa + bb + cc - dd - d) - 1$, qui ne peut jamais être un carré.

2) Soient seulement deux pairs et deux impairs, ou bien

$$xx = 4aa, \quad yy = 4bb, \quad zz = 4(cc + c) + 1, \quad vv = 4(dd + d) + 1,$$

on aura pour $xx - yy + zz + vv$ cette formae $4(aa - bb + cc + c + dd + d) + 2$, qui ne peut jamais être un carré.

3) Supposons à présent un seul carré pair, savoir

$$xx = 4aa, \quad yy = 4(bb + b) + 1, \quad zz = 4(cc + c) + 1, \quad vv = 4(dd + d) + 1,$$

nous aurons pour $yy + zz + vv - xx$ la forme $4(bb + b + cc + c + dd + d - aa) + 3$, qui encore n'est jamais un nombre carré.

4) Enfin soient tous les quatre nombres impairs, c'est-à-dire

$$xx = 4(aa + a) + 1, \quad yy = 4(bb + b) + 1, \quad zz = 4(cc + c) + 1, \quad vv = 4(dd + d) + 1;$$

on aura pour $xx + yy + zz - vv$ la valeur $4(aa + a + bb + b + cc + c - dd - d) + 2$, qui ne peut non plus représenter un nombre carré.

4. Après ces considérations, examinons de quelle manière on pourrait arriver à une solution du problème proposé. Pour cet effet je remarque, que nos deux premières équations peuvent être représentées sous cette forme générale

$$zz \pm (yy - xx) = \text{à un carré quelconque.}$$

Or $AA + BB \pm 2AB$ est toujours un carré parfait; donc, comparant cette formule avec la précédente, nous aurons $zz = AA + BB$, $yy - xx = 2AB$, et pour rendre $AA + BB$ un carré parfait il ne faut que supposer $A = aa - bb$, $B = 2ab$, et nous aurons $zz = (aa + bb)^2$; donc $z = aa + bb$. D'après ces suppositions, la valeur de $yy - xx$ sera $4ab(aa - bb)$. Mais $yy - xx$ étant le produit de $y + x$ par $y - x$, et $4ab(aa - bb)$ le produit de $2ab$ par $(2aa - 2bb)$, on vérifiera l'équation $yy - xx = 4ab(aa - bb)$ en prenant $y + x = 2ab$, $y - x = 2aa - 2bb$; donc

$$x = bb + ab - aa \quad \text{et} \quad y = aa + ab - bb.$$

Ainsi, en prenant pour les valeurs de x, y et z les expressions

$$bb + ab - aa, \quad aa + ab - bb \quad \text{et} \quad aa + bb,$$

les deux premières équations seront satisfaites. Il ne s'agit donc que de satisfaire aussi à la troisième équation qui, par la substitution de ces valeurs de x, y, z, devient

$$xx + yy - zz = a^4 + b^4 - 4aabb = rr.$$

5. Tout revient donc à trouver pour a et b de tels nombres, que la formule $a^4 + b^4 - 4aabb$ devienne un carré. Il est facile de remarquer que cette condition sera remplie, si l'on prend $a = 2b$. Pour trouver une autre solution de l'équation $a^4 + b^4 - 4aabb = rr$, posons $a = b(z+2)$, et nous aurons $a^4 + b^4 - 4aabb = b^4(z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 16z + 1)$. Supposons que la racine de cette expression soit $b^2(zz + 8z + 1)$. En comparant le carré de

$$b^2(zz + 8z + 1) \quad \text{avec} \quad b^4(z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 16z + 1),$$

on trouvera $\qquad 8z^3 + 46zz = 0;\;$ d'où l'on tirera $\; z = -\frac{23}{4};$

par conséquent $z + 2 = -\frac{15}{4}$ et $a = -\frac{15b}{4}$. Or, puisqu'il est indifférent que les valeurs de a et b soient positives ou négatives, nous prendrons $a = 15$, $b = 4$, et nous aurons $x = 149$, $y = 269$, $z = 241$, qui paraissent être les plus petits nombres cherchés. De là, par conséquent, nous trouverons $p = 329$, $q = 89$, $r = 191$.

6. Comme cette solution est tirée de l'équation $yy - xx = 4ab(aa - bb)$, par la décomposition du second membre en ses facteurs $2ab$ et $2(aa - bb)$, il s'en suit qu'on pourrait exprimer généralement les valeurs de y et x de cette manière: $y + x = \frac{2m}{n}ab$ et $y - x = \frac{2n}{m}(aa - bb)$. Mais, après des calculs très pénibles, on ne parviendrait qu'à des solutions très particulières. La supposition la plus simple est $y + x = 2a(a + b)$, $y - x = 2b(a - b)$; d'où nous tirons

$$yy + xx = 2(a^4 + 2a^3b + 2aabb - 2ab^3 + b^4).$$

De là, pour la valeur de $rr = yy + xx - zz$, nous trouvons $a^4 + 4a^3b + 2aabb - 4ab^3 + b^4$ qui est le carré complet de $aa + 2ab - bb$; donc les valeurs de a et b sont entièrement arbitraires. Mais si l'on considère les valeurs de x, y et z, qui sont $aa + bb$, $aa + 2ab - bb$ et $aa + bb$, on trouvera que x et z sont égaux, et par cette raison la solution ne saurait être admise.

7. On pourrait employer encore bien d'autres méthodes pour la solution du problème. Mais toutes ces méthodes ont le grand défaut de ne donner que des solutions très particulières, et cela après des calculs très longs et très difficiles. C'est pourquoi j'exposerai ici quatre méthodes tout-à-fait singulières, et qui, sans beaucoup de peine, fourniront une infinité de formules générales pour exprimer les trois nombres x, y et z, lesquelles, à leur tour, donneront une infinité de solutions. Cependant, il s'en faut de beaucoup que toutes ces formules contiennent toutes les solutions possibles.

Méthodes faciles pour trouver des solutions plus générales.

Première méthode.

8. Si nous supposons $s = xx + yy + zz$, nos équations (1) deviendront

$$s - 2xx = pp, \quad \text{ou} \quad s = pp + 2xx,$$
$$s - 2yy = qq, \quad \text{ou} \quad s = qq + 2yy,$$
$$s - 2zz = rr, \quad \text{ou} \quad s = rr + 2zz,$$

d'où l'on voit que s doit être, de trois manières différentes, la somme d'un carré et d'un double carré.

*

9. Considérons donc plus soigneusement les nombres contenus dans cette forme $aa + 2bb$. Je remarque premièrement que, lorsqu'un tel nombre est premier, il ne peut avoir cette forme que d'une seule manière; car s'il était résoluble de deux manières, de sorte que $s = aa + 2bb$ et aussi $s = cc + 2dd$, il s'en suivrait que $aa - cc = 2dd - 2bb$ et par conséquent $\frac{a+c}{d+b} = \frac{2(d-b)}{a-c}$. Or puisque ces deux fractions sont égales, supposons qu'après avoir été réduites aux plus petits termes, elles soient $\frac{m}{n}$. De là nous aurons $\frac{a+c}{d+b} = \frac{m}{n}$, ou $a + c = mf$, $d + b = nf$; pareillement $\frac{2(d-b)}{a-c} = \frac{m}{n}$ et $d - b = mg$, $a - c = 2ng$, et par conséquent $2a = mf + 2ng$, $2b = nf - mg$. Mais puisque $4s = 4aa + 8bb$, en substituant, au lieu de $2a$ et $2b$, leurs valeurs, nous aurons $4s = ff(mm + 2nn) + 2gg(mm + 2nn)$, ou bien $4s = (ff + 2gg)(mm + 2nn)$, ce qui ne peut avoir lieu, s étant un nombre premier.

10. Il suit de là que s ne saurait être un nombre premier, et il est démontré qu'un nombre de la forme $aa + 2bb$ ne peut être divisible que par des nombres de la même forme, lorsque a et b sont premiers entre eux. Ainsi s est le produit de deux ou de plusieurs nombres premiers de la même forme $aa + 2bb$. Mais il est facile de remarquer, que deux facteurs premiers ne suffisent pas pour produire une triple résolution; donc s doit avoir au moins trois facteurs premiers de la forme $aa + 2bb$.

11. Observons ici que tout nombre impair de la forme $aa + 2bb$ est toujours de la forme $8n + 1$ ou $8n + 3$, et que lorsque le nombre est pair et de la forme $aa + 2bb$, il est le double de l'une ou de l'autre de ces deux formules. La forme $aa + 2bb$ se rapporte au premier cas, lorsque a est impair, et au second, quand a est pair. Ainsi, tout autre nombre impair ou de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$ est entièrement exclu du nombre des diviseurs de la forme $aa + 2bb$. Donc tous les nombres qui sont divisibles par quelques-uns de ceux-ci: 5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31, 37, 39, 45, 47, 53, 55, etc. ne peuvent pas être compris dans la forme $aa + 2bb$, où nous supposons a et b premiers entre eux.

12. Il est très remarquable que tous les nombres premiers, tant de la forme $8n + 1$ que $8n + 3$, sont toujours réductibles à un carré plus le double d'un carré, mais d'une seule manière: en voici des exemples

$8n + 1$	$8n + 3$
$17 = 3^2 + 2.2^2$	$3 = 1^2 + 2.1^2$
$41 = 3^2 + 2.4^2$	$11 = 3^2 + 2.1^2$
$73 = 1^2 + 2.6^2$	$19 = 1^2 + 2.3^2$
$89 = 9^2 + 2.2^2$	$43 = 5^2 + 2.3^2$
$97 = 5^2 + 2.6^2$	$59 = 3^2 + 2.5^2$
$113 = 9^2 + 2.4^2$	$67 = 7^2 + 2.3^2$
$137 = 3^2 + 2.8^2$	$83 = 9^2 + 2.1^2$
	$107 = 3^2 + 2.7^2$
	$131 = 9^2 + 2.5^2$
	$139 = 11^2 + 2.3^2$

13. Dans toutes ces décompositions on ne saurait découvrir le moindre ordre, et pourtant il n'y a pas de doute que cela n'ait lieu pour tous les nombres de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, et c'est ce qu'on peut même démontrer rigoureusement. Pour cet effet, il ne s'agit que de prouver qu'étant proposé un nombre quelconque, premier, de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, on peut toujours assigner un produit de la forme $aa+2bb$ qui admette l'un ou l'autre pour facteur. Cette démonstration se tire d'un très beau théorème de Fermat, savoir: que la forme $c^{2m}-1$ est toujours divisible par le nombre $2m+1$, lorsque celui-ci est premier et ne divise pas c. Par conséquent, si le nombre $8n+1$ est premier, il sera toujours un facteur de la formule $c^{8n}-1$, quel que soit c, pourvu qu'il ne soit pas un multiple de $8n+1$. Mais comme la quantité $c^{8n}-1$ a deux facteurs qui sont $(c^{4n}+1)$, $(c^{4n}-1)$, il faut donc que l'un ou l'autre soit divisible par $8n+1$. Par conséquent, si nous prenons pour c un nombre qui ne rende pas $c^{4n}-1$ multiple de $8n+1$, le nombre $c^{4n}+1$ sera nécessairement divisible par $8n+1$. Mais la formule $c^{4n}+1$ peut être écrite ainsi $(c^{2n}-1)^2+2c^{2n}$; donc le nombre $8n+1$ est diviseur de la forme $aa+2bb$.

14. Quant à l'autre formule $8n+3$, chaque nombre premier de la forme $8n+3$ est un diviseur de $c^{8n+2}-1$ et par conséquent de $c^{4n+1}+1$, ou de $c^{4n+1}-1$. Soit $c=2$, la formule $c^{4n+1}-1$ revient à la suivante $2.2^{4n}-1$, qui ne peut jamais être divisible par $8n+3$, parce que tous les diviseurs de la forme $2ff-1$ sont ou $8n+1$, ou $8n-1$, et jamais $8n+3$. Donc $2^{4n+1}+1$ ou $2.2^{4n}+1$ qui est de la forme $aa+2bb$, sera nécessairement divisible par $8n+3$.

Après cette digression qui paraît n'être pas inutile, revenons à notre problème. Nous avons vu que la somme s doit avoir au moins trois facteurs, ainsi posons la égale à

$$(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)$$

et, pour abréger le calcul, soit $(aa+2bb)(cc+2dd)=mm+2nn$, alors nous aurons

$$m=ac\pm 2bd,\quad n=bc\mp ad.$$

De là notre somme s sera exprimée ainsi: $s=(mm+2nn)(ff+2gg)$, que nous supposerons égale à $zz+2vv$, et nous aurons pareillement $z=mf\pm 2ng$ et $v=nf\mp mg$.

15. Substituons maintenant, au lieu de m et n, les valeurs trouvées, et nous aurons quatre valeurs différentes pour z et v, savoir pour z:

$$1)\quad f(ac+2bd)+2g(bc-ad),$$
$$2)\quad f(ac+2bd)-2g(bc-ad),$$
$$3)\quad f(ac-2bd)+2g(bc+ad),$$
$$4)\quad f(ac-2bd)-2g(bc+ad),$$

et pour v:

$$1)\quad f(bc-ad)-g(ac+2bd),$$
$$2)\quad f(bc-ad)+g(ac+2bd),$$
$$3)\quad f(bc+ad)-g(ac-2bd),$$
$$4)\quad f(bc+ad)+g(ac-2bd).$$

16. Voilà donc quatre valeurs différentes de z et v. Mais comme il n'en faut que trois, à cause des trois conditions $s=pp+2xx$, $s=qq+2yy$ et $s=rr+2zz$, que nous avons à

remplir, nous ne prendrons que les trois premières valeurs de z et v; nous trouverons ainsi

$$\begin{aligned}
f(ac+2bd)+2g(bc-ad)&=p,\\
f(ac+2bd)-2g(bc-ad)&=q,\\
f(ac-2bd)+2g(bc+ad)&=r,\\
f(bc-ad)-g(ac+2bd)&=x,\\
f(bc-ad)+g(ac+2bd)&=y,\\
f(bc+ad)-g(ac-2bd)&=z.
\end{aligned}$$

17. Cherchons à présent, par le moyen des valeurs x, y, z, la somme de leurs carrés qui aura cette forme $Aff+Bgg+2Cfg$, où

$$\begin{aligned}
A&=3bbcc-2abcd+3aadd,\\
B&=3aacc+4abcd+12bbdd,\\
C&=-(bc+ad)(ac-2bd).
\end{aligned}$$

La différence entre cette expression de la somme s et sa valeur précédente

$$\begin{aligned}
s&=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)\\
&=ff(aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd)+2gg(aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd)
\end{aligned}$$

nous conduit à l'équation

$$Fff+Ggg+2Cfg=0, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned}
F&=bbcc-2abcd+aadd-aacc-4bbdd,\\
G&=aacc+4abcd+4bbdd-4bbcc-4aadd,\\
C&=-(bc+ad)(ac-2bd).
\end{aligned}$$

Nous voilà donc parvenus à la solution de notre problème; car il ne s'agit plus, dans l'équation $Fff+Ggg+2Cfg=0$, qui renferme les six lettres a, b, c, d, f, g, que de trouver des valeurs convenables pour les six lettres, afin de satisfaire à notre égalité, et de là nous trouverons x, y, z, comme aussi p, q, r.

18. Etant donc arrivé à l'égalité $Fff+Ggg+2Cfg=0$, qui donne

$$\frac{f}{g}=\frac{-C\pm\sqrt{(CC-FG)}}{F},$$

il faudrait chercher de telles valeurs pour a, b, c, d, f, g, que $CC-FG$ devienne un carré. Mais cela nous conduirait à de très grandes difficultés, que nous voudrions éviter. Heureusement nous sommes tombés sur un cas, où l'équation $Fff+Ggg+2Cfg=0$ se réduit facilement au premier degré, savoir quand F est égal à 0; alors on a $Ggg+2Cfg=0$, ou bien $\frac{f}{g}=-\frac{G}{2C}$. Ainsi, en réduisant $-\frac{G}{2C}$ aux plus petits termes, si l'on prend le numérateur pour f et le dénominateur pour g, toutes les formules trouvées ci-dessus seront exprimées en nombres rationels. C'est en quoi consiste le mérite de cette méthode.

19. Remarquons maintenant que la valeur $bbcc-2abcd+aadd-aacc-4bbdd$, trouvée pour F, peut être exprimée comme produit de deux facteurs de la manière suivante:

$$F=\{(b+a)c+(a+2b)d\}\ \{(b-a)c+(a-2b)d\}.$$

Ainsi on pourra égaler à zéro ou l'un ou l'autre de ces deux facteurs, pour que F devienne zéro. Du premier on tire $\frac{c}{d} = \frac{-a-2b}{b+a}$, du second $\frac{c}{d} = \frac{2b-a}{b-a}$. Il y aura donc une double détermination pour les lettres c et d, par conséquent aussi une double solution du problème.

20. De la même manière nous pourrions faire évanouir la valeur de G, et puisqu'elle est égale à $aacc + 4abcd + 4bbdd - 4bbcc - 4aadd$, ce qui est le produit de ces deux facteurs

$$(a+2b)\,c - (2b+2a)\,d, \quad (a-2b)\,c - (2b-2a)\,d,$$

nous aurons, pour la détermination de c et d, l'équation $\frac{c}{d} = \frac{2b+2a}{a+2b}$, ou $\frac{c}{d} = \frac{2b-2a}{a-2b}$. Mais ces valeurs ne conduiraient pas à des solutions nouvelles; ainsi il suffira de nous en tenir aux valeurs tirées de $F=0$.

21. Voilà donc une solution assez simple du problème proposé, et qui fournira en même temps une infinité de solutions particulières. Pour cela, il n'y aura qu'à suivre les règles suivantes:

1) Après avoir pris à volonté les deux nombres a et b, cherchons les valeurs de c et d par l'une ou l'autre de ces deux formules $\frac{c}{d} = \frac{-a-2b}{b+a}$, ou $\frac{c}{d} = \frac{2b-a}{b-a}$, puisque chacune conduira à une solution.

2) Cherchons ensuite les valeurs de C et G d'après les formules

$$C = -(bc+ad)(ac-2bd),$$
$$G = (aa-4bb)\,cc + (4bb-4aa)\,dd + 4abcd,$$

et nous aurons

$$\frac{f}{g} = \frac{(aa-4bb)\,cc + 4(bb-aa)\,dd + 4abcd}{2(bc+ad)(ac-2bd)},$$

c'est-à-dire, après avoir réduit cette fraction à ses plus petits termes, il faudra prendre f égal au numérateur, et g au dénominateur.

3) Ayant ainsi trouvé les valeurs de f et g, on aura immédiatement celles de x, y, z par les formules

$$x = f(bc-ad) - g\,(ac+2bd),$$
$$y = f(bc-ad) + g\,(ac+2bd),$$
$$z = f(bc+ad) - g\,(ac-2bd),$$

qui sont les racines des trois nombres cherchés.

4) Enfin les lettres p, q, r se trouveront aussi d'après ces formules

$$p = f(ac+2bd) + 2g\,(bc-ad),$$
$$q = f(ac+2bd) - 2g\,(bc-ad),$$
$$r = f(ac-2bd) + 2g\,(bc+ad).$$

Eclaircissons ces règles par quelques exemples.

Exemple 1. Soit $a=1$ et $b=1$, alors $\frac{c}{d}$ sera égale, dans le premier cas, à $-\frac{3}{2}$, et dans le second à $\frac{1}{0}$, ce qui ne conduit à rien. Ainsi supposons $c=3$ et $d=-2$; $\frac{f}{g}$ sera $=-\frac{51}{14}$; soit $f=51$ et $g=-14$. Alors

$x = 51(3+2) + 14(3-4) = 241,$ $p = -51 - 28.5 = -191,$
$y = 51(3+2) - 14(3-4) = 269,$ $q = -51 + 28.5 = 89,$
$z = 51(3-2) + 14(3+4) = 149,$ $r = 51.7 - 28 = 329,$

enfin $s = 3.17.2993$ ou $= 3.17.41.73$.

Exemple 2. Soit $a = 1$ et $b = 2$, alors $\frac{c}{d} = -\frac{5}{3}$ ou $= \frac{3}{1}$, développons donc l'un et l'autre cas.

Cas 1. Soit $c = 3$ et $d = 1$, on aura $\frac{f}{g} = \frac{99}{14}$ et, par conséquent, $f = 99$ et $g = 14$; de là nous aurons

$x = 99.5 - 14.7 = 397,$ $p = 99.7 + 28.5 = 833,$
$y = 99.5 + 14.7 = 593,$ $q = 99.7 - 28.5 = 553,$
$z = 99.7 + 14 = 707,$ $r = -99 + 28.7 = 97,$
$s = 9.11.10193.$

Cas 2. Soit $c = 5$ et $d = -3$, on aura $\frac{f}{g} = -\frac{387}{238}$ et, par conséquent, $f = 387$, $g = -238$; de là

$x = 387.13 - 238.\ 7 = 3365,$ $p = 387. - 7 - 2.238.13 = -8897,$
$y = 387.13 + 238.\ 7 = 6697,$ $q = 387. - 7 + 2.238.13 = 3479,$
$z = 387.\ 7 + 238.17 = 6755,$ $r = 387.\ 17 - 2.238.\ 7 = 3247,$
$s = 9.43.263057.$

Exemple 3. Soit $a = 3$ et $b = 1$, on aura $\frac{c}{d} = -\frac{5}{4}$ ou $= \frac{1}{2}$. Il faut remarquer ici que le dernier cas est déjà traité dans l'exemple précédent, puisque a, b, c, d sont permutables. C'est pourquoi nous ne développerons que le premier cas, où $c = 5$ et $d = -4$; $\frac{f}{g} = \frac{627}{322}$, d'ou $f = 627$, $g = 322$ et, par conséquent,

$x = 627.\ 17 - 322.\ 7 = 8405,$ $p = 627.\ 7 + 644.17 = 15337,$
$y = 627.\ 17 + 322.\ 7 = 12913,$ $q = 627.\ 7 - 644.17 = -6559,$
$z = 627. - 7 - 322.23 = -11795,$ $r = 627.23 - 644.\ 7 = 9913,$
$s = 11.57.600497.$

22. Ces exemples suffisent pour montrer comment, par ces règles, on peut facilement trouver autant de solutions qu'on voudra. Nous nous contenterons ici d'exposer les résultats les plus simples, et pour lesquels les nombres x, y, z ne surpassent pas mille.

	I	II	III	IV	V
$x =$	241	397	425	595	493
$y =$	269	593	373	769	797
$z =$	149	707	205	965	937
$p =$	191	833	23	1081	1127
$q =$	89	553	289	833	697
$r =$	329	97	527	119	289

Seconde méthode.

23. La solution de notre problème a été réduite à cette équation carrée

$$Fff + Ggg + 2Cfg = 0, \quad \text{où}$$

$$C = -(bc + ad)(ac - 2bd),$$

$$F = (bb - aa)cc + (aa - 4bb)dd - 2abcd,$$

$$G = (aa - 4bb)cc + (4bb - 4aa)dd + 4abcd,$$

et enfin à la formule $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm \sqrt{(CC - FG)}}{F}$, dans laquelle $CC - FG$ doit être un carré. Supposons donc $CC - FG = VV$, de sorte que $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm V}{F}$. Substituant dans l'expression $CC - FG$ les valeurs de C, F et G, nous aurons

$$VV = (aa - 2bb)^2 c^4 + 8(aa - 2bb)abc^3 d - 4(aa - 2bb)^2 ccdd - 16(aa - 2bb)abcd^3 + 4(aa - 2bb)^2 d^4,$$

expression qui, étant divisée par $(aa - 2bb)^2$ et abrégée par la substitution de m au lieu de $\frac{ab}{aa - 2bb}$, deviendra assez simple, savoir:

$$\frac{VV}{(aa - 2bb)^2} = c^4 + 8mc^3 d - 4ccdd - 16mcd^3 + 4d^4.$$

24. Maintenant, comme cette formule doit être un carré, supposons sa racine égale à

$$\frac{V}{aa - 2bb} = cc - 4mcd + 2dd,$$

et de là, en les comparant, on trouvera l'égalité suivante: $2mc - d - 2mmd = 0$ et, par conséquent, $\frac{c}{d} = \frac{2mm + 1}{2m}$. Ainsi, soit $c = 2mm + 1$ et $d = 2m$, notre formule deviendra

$$\frac{V}{aa - 2bb} = (2mm + 1)^2 - 8mm(2mm + 1) + 8mm = 4mm + 1 - 12m^4.$$

25. A présent il ne s'agira plus que de prendre pour a et b des nombres à volonté, et l'on aura $m = \frac{ab}{aa - 2bb}$; si l'on substitue les valeurs déjà trouvées dans celles de C, F, V, on aura $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm V}{F}$: On voit par là que les lettres f et g peuvent être déterminées de deux manières dans chaque cas. Or, ayant trouvé ces lettres, on pourra déterminer aisément tant les valeurs de x, y, z, que celles de p, q, r. Le cas le plus simple se prévoit, et se rapporte à la supposition de $a = 1$ et $b = 1$; alors $m = -1$, $c = 3$, $d = -2$ et $F = 0$; mais ce cas est précisément celui de la première méthode. Voici d'autres exemples:

Exemple 1. Soit $a = 2$ et $b = 1$, alors $m = 1$, $c = 3$, $d = 2$, $f = 28$, $g = 51$ et enfin

$$x = 482, \quad p = 382,$$
$$y = -538, \quad q = 178,$$
$$z = 298, \quad r = -658.$$

Exemple 2. Soit $a = 3$ et $b = 2$, alors $m = 6$, $c = 73$, $d = 12$, $f = -7$, $g = 17$ et enfin

$$x = 5309, \quad p = 1871,$$
$$y = 3769, \quad q = 5609,$$
$$z = 4181 \quad r = 4991.$$

Troisième méthode.

26. Ayant posé, comme dans la première méthode, la somme des trois carrés cherchés $s=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)$, je supposerai le premier facteur $aa+2bb$ résoluble de deux manières différentes en un carré plus le double d'un carré, savoir $\alpha\alpha+2\beta\beta=aa+2bb$. Prenons la première forme $aa+2bb$ pour la détermination des lettres x, y, p, q, comme nous l'avons déjà fait (16), et la dernière $\alpha\alpha+2\beta\beta$ pour la détermination de z et r, en sorte que

$$x=f(bc-ad)-g(ac+2bd), \qquad p=f(ac+2bd)+2g(bc-ad),$$
$$y=f(bc-ad)+g(ac+2bd), \qquad q=f(ac+2bd)-2g(bc-ad),$$
$$z=f(\beta c+\alpha d)-g(\alpha c-2\beta d), \qquad r=f(\alpha c-2\beta d)+2g(\beta c+\alpha d).$$

Tirant de là la somme des trois carrés $xx+yy+zz=s$, nous aurons cette formule

$$s=Aff+Bgg-2Cfg, \quad \text{où}$$

$$A=2bbcc-4abcd+2aadd+\beta\beta cc+2\alpha\beta cd+\alpha\alpha dd,$$
$$B=2aacc+8abcd+8bbdd+\alpha\alpha cc-4\alpha\beta cd+4\beta\beta dd,$$
$$C=(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d).$$

Soit de plus $\quad D=(aa+2bb)(cc+2dd)=aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd;$

nous aurons $\quad s=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)=Dff+2Dgg.$

Retranchant cette valeur de s de la formule $Aff+Bgg-2Cfg$, nous obtiendrons l'équation

$$Fff+Ggg-2Cfg=0, \quad \text{où} \quad F=A-D, \quad G=B-2D,$$

et par conséquent $\quad F=(\beta\beta-aa)cc+(\alpha\alpha-4bb)dd-4abcd+2\alpha\beta cd,$

$$G=(\alpha\alpha-4bb)cc+8abcd-4\alpha\beta cd+4(\beta\beta-aa)dd,$$

valeurs qui peuvent être représentées ainsi qu'il suit:

$$F=((\beta+a)c+(\alpha+2b)d)((\beta-a)c+(\alpha-2b)d),$$
$$G=((\alpha+2b)c-2(\beta+a)d)((\alpha-2b)c-2(\beta-a)d).$$

27. D'après ces équations il est évident qu'on rendra $F=0$, en posant

$$\frac{c}{d}=\frac{-\alpha-2b}{\beta+a} \quad \text{ou} \quad =\frac{-\alpha+2b}{\beta-a}.$$

Alors notre équation deviendra $Ggg-2Cfg=0$, d'où $\frac{f}{g}=\frac{G}{2C}$. Cette formule est assez compliquée à cause de la valeur de G, mais nous la rendrons plus simple, en remarquant que F étant égal à zéro, la quantité G peut être remplacée par $2F+G$, et cette quantité, d'après les équations précédentes, est égale à

$$(2(\beta\beta-aa)+\alpha\alpha-4bb)(cc+2dd)=-(aa+2bb)(cc+2dd);$$

par conséquent $\quad \frac{f}{g}=-\frac{(aa+2bb)(cc+2dd)}{2(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d)};$

d'où il suit $\quad f=(aa+2bb)(cc+2dd); \quad g=-2(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d).$

28. Si l'on voulait substituer ces valeurs de c, d, f, g dans les formules finales de x, y, z et p, q, r, elles deviendraient assez compliquées. Mais on peut en tirer une règle très simple pour trouver les nombres x, y, z et p, q, r.

Règle

pour trouver autant de solutions qu'on voudra de notre problème.

29. Ayant pris à volonté deux nombres m et n, dont m doit être impair, qu'on en tire ces trois quantités $s = mm + 2nn$, $t = mm - 2nn$ et $u = 2mn$; cela posé, les valeurs des six lettres x, y, z, p, q et r seront

$$x = s(s+u)(3s+4u) - 2tt(s+2u), \qquad p = st(3s+4u) + 4t(s+u)(s+2u),$$
$$y = s(s+u)(3s+4u) + 2tt(s+2u), \qquad q = st(3s+4u) - 4t(s+u)(s+2u),$$
$$z = st(3s+4u) + 2t(s+2u)^2 \qquad r = s(s+2u)(3s+4u) - 4tt(s+2u).$$

30. En considérant ces six formules, on voit de suite qu'elles ne donnent point de solutions différentes de notre problème, soit qu'on prenne t positif ou négatif; puisque le changement de t en $-t$ ne fait que changer les signes de z, p et q. Mais si l'on prend u négatif, ces formules subiront un grand changement. D'où l'on voit que chaque paire des nombres m et n donnera deux solutions différentes, selon qu'on prendra m et n positivement ou négativement. En voici des applications.

Exemple 1. Soit $m = 1$ et $n = \pm 1$; alors $s = 3$, $t = 1$, $u = \pm 2$. Soit premièrement $u = -2$, nous aurons $s + u = 1$, $s + 2u = -1$, $3s + 4u = 1$ et, par conséquent,

$$x = 3.1.1 + 2 = 5, \qquad p = 3 - 4 = -1,$$
$$y = 3 - 2 = 1, \qquad q = 3 + 4 = 7,$$
$$z = 3 + 2 = 5, \qquad r = -3 + 4 = 1.$$

Mais ici deux des nombres cherchés sont égaux, c'est pourquoi cette solution ne saurait être admise.

Si l'on prend $u = 2$, alors $s + u = 5$, $s + 2u = 7$, $3s + 4u = 17$ et, par conséquent,

$$x = 3.5.17 - 2.7 = 241, \qquad p = 3.17 + 4.5.7 = 191,$$
$$y = 3.5.17 + 2.7 = 269, \qquad q = 3.17 - 4.5.7 = -89,$$
$$z = 3.17 + 2.49 = 149, \qquad r = 3.7.17 - 4.7 = 329.$$

Exemple 2. Soit, dans cet exemple, $m = 1$, $n = 2$; alors $s = 9$, $t = -7$, $u = \pm 4$. Prenons premièrement $u = -4$; on aura $s + u = 5$, $s + 2u = 1$, $3s + 4u = 11$ et enfin

$$x = 9.5.11 - 98 = 397, \qquad p = -9\,7\,11 - 4.7.5.1 = -833,$$
$$y = 9.5.11 + 98 = 593, \qquad q = -9.7.11 + 4.7.5.1 = -553,$$
$$z = -7.9.11 - 2.7 = -707, \qquad r = 9.1.11 - 4.7.7.1 = -97.$$

Soit, pour le second cas, $u = 4$, alors $s + u = 13$, $s + 2u = 17$, $3s + 4u = 43$ et, par conséquent,

$$x = 9.13.43 - 98.17 = 3365, \qquad p = -7.9.43 - 4.7.13.17 = -8897,$$
$$y = 9.13.43 + 98.17 = 6697, \qquad q = -7.9.43 + 4.7.13.17 = 3479,$$
$$z = -7.9\,43 - 2.7.17^2 = -6755, \qquad r = 9.17.43 - 4.7^2.17 = 3247.$$

Démonstration

de la règle précédente.

31. Posons $aa + 2bb = \alpha\alpha + 2\beta\beta = s$, $a\alpha - 2b\beta = t$ et $a\beta + b\alpha = u$; on aura $ss = tt + 2uu$. Prenons les valeurs trouvées ci-dessus (27) de c et d, savoir $c = -\alpha - 2b$, $d = \beta + a$. Pour

ce qui concerne les deux autres, elles dérivent de celles-ci en prenant a et b négatives. On aura $cc+2dd=3s+4u$, $\alpha c+2\beta d=-t$, $\alpha c-2\beta d=-(s+2u)$, $bc-ad=-(s+u)$, et $\beta c+\alpha d=t$, et enfin, d'après (27), $f=s(3s+4u)$ et $g=2t(s+2u)$.

32. Substituons maintenant ces valeurs dans les formules rapportées ci-dessus (26); nous trouverons les expressions suivantes:

$$x=s(s+u)(3s+4u)-2tt(s+2u),$$
$$y=s(s+u)(3s+4u)+2tt(s+2u),$$
$$z=st(3s+4u)+2t(s+2u)^2,$$
$$p=st(3s+4u)+4t(s+u)(s+2u),$$
$$q=st(3s+4u)-4t(s+u)(s+2u),$$
$$r=s(3s+4u)(s+2u)-4tt(s+2u),$$

qui ont été rapportées dans la règle.

33. Enfin, puisque les trois lettres s, t, u ne sont assujetties qu'à vérifier l'équation $ss=tt+2u$, on n'a qu'à trouver les nombres s, t, u qui remplissent cette condition; alors les formules précédentes donneront immédiatement les valeurs des nombres cherchés. Quant à celles de s, t, u, qui remplissent la condition $ss=tt+2au$, voici les plus simples:

s	3	9	17	19	27	33	33	41	43
t	1	7	1	17	23	17	31	23	7
u	2	4	12	6	10	20	8	24	30.

Quatrième méthode.

34. Nous avons vu, au commencement du Mémoire, que les équations

$$yy+zz-xx=pp,\quad zz+xx-yy=qq$$

seront satisfaites, si l'on prend

$$z=aa+bb,\quad yy-xx=4ab(aa-bb),\quad p=aa+2ab-bb,\quad q=aa-2ab-bb;$$

d'où il est facile de remarquer que ces équations seront vérifiées, si nous supposons

$$z=mn(aa+bb),\quad yy-xx=4mmnn(aa-bb)$$
$$\text{et}\quad p=mn(aa+2ab-bb),\quad q=mn(aa-2ab-bb).$$

Il ne restera donc qu'à remplir la troisième condition de notre problème, savoir: $xx+yy-zz=rr$.

35. Maintenant, pour que les trois nombres x, y, z n'aient point de facteur commun, prenons $y+x=2mma(a+b)$ et $y-x=2nnb(a-b)$; pour abréger l'expression, soit $aa+ab=A$ et $ab-bb=B$, de sorte que $y+x=2mmA$ et $y-x=2nnB$; par conséquent, puisque $A-B=aa+bb$, nous trouverons $z=mn(A-B)$. La somme des carrés de $y+x$ et $y-x$ nous donne

$$2yy+2xx=4m^4AA+4n^4BB;\quad \text{donc}\quad yy+xx=2m^4AA+2n^4BB;$$

retranchant de là la valeur de zz, on trouve cette expression pour rr

$$rr=2m^4AA+2n^4BB-mmnn(A-B)^2.$$

36. Pour rendre cette formule plus traitable, supposons $m=f+g$, $n=f-g$; de là on obtiendra $rr=\alpha f^4+\beta f^3g+\gamma ffgg+\beta fg^3+\alpha g^4$, où

$$\alpha = 2AA + 2BB - (A - B)^2 = (A + B)^2,$$
$$\beta = 8AA - 8BB,$$
$$\gamma = 12(AA + BB) + 2(A - B)^2.$$

En substituant ces valeurs de α, β, γ dans l'équation précédente, nous aurons

$$rr = (A + B)^2 f^4 + 8(AA - BB) f^3 g + [12(AA + BB) + 2(A - B)^2] ffgg$$
$$+ 8(AA - BB) fg^3 + (A + B)^2 g^4.$$

37. Pour ramener à présent cette formule à un carré, supposons que sa racine soit

$$r = (A + B) ff + 4(A - B) fg - (A + B) gg,$$

d'où il suit

$$rr = (A + B)^2 f^4 + 8(AA - BB) f^3 g - 2(A + B)^2 ffgg + 16(A - B)^2 ffgg$$
$$- 8(AA - BB) fg^3 + (A + B)^2 g^4.$$

Retranchant de cette expression la précédente nous obtiendrons

$$0 = 32ABffg + 16(AA - BB) fg^3,$$

d'où l'on tire $\qquad \frac{f}{g} = \frac{AA - BB}{-2AB}$

et, par conséquent, $\qquad f = AA - BB,$

$$g = -2AB.$$

C'est ainsi qu'on trouvera les nombres f et g d'après les valeurs de A et B qui sont déterminées par les équations $A = aa + ab$, $B = ab - bb$. Puis, on prendra $m = f + g$, $n = f - g$, et l'on aura les valeurs de x, y, z, p, q, qui, d'après les équations précédentes, sont

$$x = mmA - nnB, \quad y = mmA + nnB, \quad z = mn(A - B),$$
$$p = mn(aa + 2ab - bb), \quad q = mn(aa - 2ab - bb).$$

Quant à r, nous avons eu

$$r = (A + B) ff + 4(A - B) fg - (A + B) gg,$$

et cette équation, à cause de $m = f + g$, $n = f - g$, devient

$$r = mn(A + B) + (mm - nn)(A - B).$$

Donc, il est aisé de développer les valeurs de x, y, z et p, q, r pour chaque valeur des lettres a et b.

38. Voici la manière de s'y prendre pour trouver autant de solutions qu'on voudra. Après avoir pris à volonté a et b, on formera $A = aa + ab$, $B = ab - bb$, puis $f = AA - BB$ et $g = -2AB$, de là $m = f + g$, $n = f - g$. Ainsi, ayant déterminé ces valeurs, les nombres cherchés seront donnés par les formules suivantes:

$$x = mmA - nnB, \qquad p = mn(aa + 2ab - bb),$$
$$y = mmA + nnB, \qquad q = mn(aa - 2ab - bb),$$
$$z = mn(A - B), \qquad r = mn(A + B) + (mm - nn)(A - B).$$

Rapportons ici quelques exemples.

Exemple 1. Soit $a = 1$, $b = 2$; nous aurons $A = 3$, $B = -2$; de là $f = 5$, $g = 12$, $m = 17$, $n = -7$, enfin les nombres cherchés seront:

$x = 17.17.3 + 7.7.2 = 965$, $p = -17.7.1 = -119$,
$y = 17.17.3 - 7.7.2 = 769$, $q = -17.7. - 7 = 833$,
$z = -17.7.5 = -595$, $r = -7.17.1 + 240.5 = 1081$.

Cette solution se trouve déjà rapportée plus haut (22).

Exemple 2. Soit $a = 2$, $b = 1$; nous aurons $A = 6$, $B = 1$, $f = 35$, $g = -12$, enfin $m = 23$, $n = 47$, et par conséquent,

$x = 23.23.6 - 47.47.1 = 965$, $p = 23.47.7 = 7567$,
$y = 23.23.6 + 47.47.1 = 5383$, $q = 23.47. - 1 = -1081$,
$z = 23.47.5 = 5405$, $r = 23.47.7 - 1680.5 = -833$.

39. Il faut observer qu'il serait superflu de prendre les nombres a et b tous deux impairs, puisqu'alors les nombres A et B seraient pairs, et par conséquent réductibles à de moindres nombres.

Exemple 3. Soit $a = 2$, $b = 3$; nous aurons $A = 10$, $B = -3$, $f = 91$, $g = 60$, $m = 151$, $n = 31$; d'où résulte

$x = 151.151.10 + 31.31.3 = 230893$, $p = 151.31.7 = 32767$,
$y = 151.151.10 - 31.31.3 = 225127$, $q = 151.31. - 17 = -79577$,
$z = 151.31.13 = 60853$, $r = 151.31.7 + 21840.13 = 316687$.

Observons ici que toutes les solutions trouvées par cette méthode, diffèrent essentiellement de toutes celles qu'on tire des méthodes précédentes.

VI.

Recherches sur le probléme de quatre nombres positifs et en proportion arithmétique tels, que la somme de deux quelconques soit toujours un nombre carré.

(Exhib. 1781 April. 23.)

1. Soient A, B, C, D les quatre nombres cherchés, disposés selon l'ordre de grandeur, en sorte que A soit le plus petit et D le plus grand. Les six conditions à remplir seront:

$$A+B=pp,\quad A+C=qq,\quad A+D=rr=B+C,\quad B+D=ss,\quad C+D=tt,$$

de là $2rr=pp+tt=qq+ss$, et enfin les quatre nombres cherchés seront exprimés par les quantités pp, qq, rr de la manière suivante:

$$2A=pp+qq-rr,\qquad 2B=pp+rr-qq,$$
$$2C=qq+rr-pp,\qquad 2D=3rr-pp-qq.$$

Le nombre A étant positif, il faut que $pp+qq>rr$; quant aux nombres B, C, D, ils seront de même positifs d'après la condition $2rr=pp+tt=qq+ss$, si l'on prend $p<t$, $q<s$, ce qui doit avoir lieu d'après les expressions précédentes de pp, qq, tt, ss, où, par hypothèse,

$$A<B<C<D.$$

2. De plus, on voit que r doit être égale à la somme de deux carrés; ainsi soit $r=xx+yy$, nous aurons $rr=(xx-yy)^2+(2xy)^2$, et par conséquent

$$2rr=(\pm(xx-yy)-2xy)^2+(\pm(xx-yy)+2xy)^2.$$

De là il est facile de prévoir que l'égalité $2rr=pp+tt$, ainsi que la condition $p<t$ sera remplie, si l'on prend

$$p=\pm(xx-yy)-2xy,\qquad t=\pm(xx-yy)+2xy,$$

où nous admettrons celui des deux signes $\pm$ qui rend $xx-yy$ positif.

De même, pour les nombres q, s, vérifiant les conditions

$$2rr=qq+ss,\qquad q<s,$$

nous trouvons ces expressions

$$q=\pm(x'x'-y'y')-2x'y',\qquad s=\pm(x'x'-y'y')+2x'y',$$

en admettant pour r cette autre décomposition en deux carrés $x'x'+y'y'$.

Ayant $p=\pm(xx-yy)-2xy$, $r=xx+yy$, nous en tirons

$$pp=(xx-yy)^2\mp4xy(xx-yy)+4xxyy=(xx+yy)^2\mp4xy(xx-yy)=rr\mp4xy(xx-yy).$$

De même, les équations $q=\pm(x'x'-y'y')-2x'y'$, $r=x'x'+y'y'$ nous donnent

$$qq=rr\mp4x'y'(x'x'-y'y').$$

Daprès ces valeurs de pp, qq, la condition $pp+qq > rr$ devient

$$rr > \pm 4xy(xx-yy) \pm 4x'y'(x'x'-y'y'),$$

où des deux doubles signes $\pm$ nous admettons ceux qui rendent $xx-yy$, $x'x'-y'y'$ positifs.

3. Puisque r doit être la somme de deux carrés de deux manières différentes, il doit être le produit de deux facteurs de cette même forme. Posons donc $r=(aa+bb)(cc+dd)$, où nous supposerons $a>b$, $c>d$. Pour diminuer le nombre des lettres, soit $\frac{a}{b}=f$, $\frac{c}{d}=z$, f et z étant des quantités qui surpassent 1: on aura $r=bbdd(ff+1)(zz+1)$, où nous pouvons supprimer le facteur carré $bbdd$ qui sera commun à tous les termes de l'inégalité que nous aurons à considérer. Ainsi nous aurons

$$r=(ff+1)(zz+1),$$

d'où, pour les valeurs de x, y, x', y', vérifiant les conditions

$$r=xx+yy, \qquad r=x'x'+y'y',$$

nous tirons

$$x=fz+1, \quad x'=fz-1, \quad y=z-f, \quad y'=z+f,$$

et de là

$$xy(xx-yy)=(fz+1)(z-f)((f+1)z-f+1)((f-1)z+f+1)=M,$$

$$x'y'(x'x'-y'y')=(fz-1)(z+f)((f+1)z+f-1)((f-1)z-f-1)=N,$$

ce qui change la condition

$$rr > \pm 4xy(xx-yy) \pm 4x'y'(x'x'-y'y')$$

dans la suivante:

$$rr > \pm 4M \pm 4N,$$

Ici, comme plus haut, on gardera ceux des deux doubles signes $\pm$ qui rendent $\pm M$ et $\pm N$ positifs.

4. Pour que ces formules soient plus commodes, soit $\frac{f+1}{f-1}=\varrho$, ϱ étant, ainsi que f, une quantité plus grande que l'unité. Introduisant cette quantité dans les valeurs de $\frac{M}{(f-1)^2}$, $\frac{N}{(f-1)^2}$, tirées des équations précédentes, nous aurons

$$\frac{M}{(f-1)^2}=(fz+1)(z-f)(\varrho z-1)(z+\varrho)=P,$$

$$\frac{N}{(f-1)^2}=(fz-1)(z+f)(\varrho z+1)(z-\varrho)=Q,$$

de sorte que la condition à remplir sera

$$\frac{rr}{(f-1)^2} > 4(\pm P \pm Q),$$

où il faudra toujours prendre les signes de manière à rendre $\pm P$, $\pm Q$ positifs.

5. En considérant ces formules, on doit remarquer d'abord que les deux lettres f et ϱ sont permutables entre elles, puisqu'en les remplaçant l'une par l'autre, la valeur P se change en Q, et réciproquement. En effet, ayant $\varrho=\frac{f+1}{f-1}$, on aura aussi $f=\frac{\varrho+1}{\varrho-1}$, de manière que l'une se détermine par l'autre de la même façon; puis, ces deux lettres se déterminent réciproquement l'une par l'autre par cette égalité $f\varrho-\varrho-f=1$, ou bien $(f-1)(\varrho-1)=2$.

Observons ici que, dans le cas où $f=\varrho$, on a $f-1=\varrho-1=\sqrt{2}$, et par conséquent $f=\varrho=1+\sqrt{2}$; dans tous les autres cas, l'une sera plus petite et l'autre surpassera ce nombre.

Ainsi supposant $\varrho > f$, nous aurons $f < 1 + \sqrt{2}$, $\varrho > 1 + \sqrt{2}$. Quant au cas $f = 1$, la valeur de ϱ devient infiniment grande.

6. Ayant posé $r = (ff + 1)(zz + 1)$, on aura $rr = (ff + 1)^2 (zz + 1)^2$ et de là

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)^2 (zz+1)^2}{(f-1)^2}.$$

Or comme $\frac{ff+1}{f-1} = \frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}$, on obtiendra donc

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)^2(zz+1)^2}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)(\varrho\varrho+1)}{(f-1)(\varrho-1)}(zz+1)^2,$$

ce qui donne

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{1}{2}(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2,$$

la valeur du produit $(f-1)(\varrho-1)$ étant égale à 2, comme nous l'avons vu. Substituant cette expression de $\frac{rr}{(f-1)^2}$ dans l'inégalité précédente, nous trouverons que la condition à remplir sera la suivante

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 > 8(\pm P \pm Q).$$

7. Développant les valeurs des lettres P et Q, nous aurons

$$P = f\varrho z^4 + (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - (ff\varrho\varrho + 1 - (\varrho-f)^2)zz - (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$
$$Q = f\varrho z^4 - (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - (ff\varrho\varrho + 1 - (\varrho-f)^2)zz + (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$

où le coefficient de zz peut se réduire à une forme très simple; en effet, puisque

$$(\varrho-f)^2 = (\varrho+f)^2 - 4f\varrho,$$

ce coefficient s'écrira ainsi: $ff\varrho\varrho + 1 + 4f\varrho - (\varrho+f)^2$. Mais nous avons vu (5) que $\varrho + f = f\varrho - 1$; donc $(\varrho+f)^2 = ff\varrho\varrho - 2f\varrho + 1$, par conséquent, ce coefficient se réduit à cette forme très simple $6f\varrho$. Ainsi nous aurons

$$P = f\varrho z^4 + (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - 6f\varrho zz - (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$
$$Q = f\varrho z^4 - (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - 6f\varrho zz + (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho.$$

8. Les valeurs de P et Q étant déterminées par ces équations, nous aurons à remplir cette condition

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 > 8(\pm P \pm Q);$$

de cette manière nous sommes conduits au problème suivant:

9. **Problème.** *Le nombre* f, *et par conséquent aussi* ϱ, *étant donnés, trouver toutes les valeurs de la lettre* z *qui puissent remplir la condition mentionnée.*

C'est par là qu'on parviendra à une solution complète du problème principal, attendu que la lettre $f = \frac{a}{b}$ donnera les nombres a et b, et $z = \frac{c}{d}$ pareillement c et d, desquels on tirera ensuite x, y, x', y' qui conduiront aux valeurs de p, q, r et enfin à celles de A, B, C, D.

10. **Solution.** Commençons par observer que les valeurs convenables de z sont comprises entre certaines limites, tantôt plus et tantôt moins étroites, selon la valeur du nombre f qui est toujours plus grande que 1 et moindre que $1 + \sqrt{2}$, ou bien, selon la valeur de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, qui surpasse toujours $1 + \sqrt{2}$. Ces limites peuvent être facilement assignées, lorsqu'on connaît les cas dans lesquels le premier membre de notre formule devient égal à l'autre, ou lorsqu'on connaît les racines de l'équation $(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 = 8(\pm P \pm Q)$, en ne tenant compte que de celles qui surpassent l'unité; car nous supposons $z > 1$.

11. Comme cette équation renferme deux quantités connues f et ϱ, liées entr'elles par l'équation

$$\frac{ff+1}{f-1}=\frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1},$$

il sera utile d'introduire à leur place une seule lettre, qui puisse exprimer également l'une et l'autre quantité, ainsi soit $\frac{ff+1}{f-1}=2n, \quad \frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}=2n.$

D'où nous tirons pour les valeurs de f et ϱ cette expression

$$n\pm\sqrt{(nn-2n-1)}.$$

Or, comme f est plus petit que ϱ, nous prendrons

$$f=n-\sqrt{(nn-2n-1)}, \quad \varrho=n+\sqrt{(nn-2n-1)},$$

et de là nous tirerons

$$f+\varrho=2n, \quad \varrho-f=2\sqrt{(nn-2n-1)} \quad \text{et enfin} \quad f\varrho=2n+1.$$

Soit ensuite $\sqrt{(nn-2n-1)}=k$, de sorte que $f=n-k$, $\varrho=n+k$, $\varrho-f=2k$. A présent il n'est pas difficile d'éliminer de notre équation les deux lettres f et ϱ.

12. Cela posé, commençons par le premier membre de notre équation, et comme

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)=(f\varrho-1)^2+(f+\varrho)^2$$

et que $f+\varrho=2n$ et $f\varrho-1=2n$, le premier membre prendra cette forme $8nn(zz+1)^2$, et l'équation à résoudre sera $nn(zz+1)^2=\pm P\pm Q$. Prenons maintenant en considération les valeurs de P et Q, savoir

$$P=f\varrho z^4+(f\varrho+1)(\varrho-f)z^3-6f\varrho zz-(f\varrho+1)(\varrho-f)z+f\varrho,$$
$$Q=f\varrho z^4-(f\varrho+1)(\varrho-f)z^3-6f\varrho zz+(f\varrho+1)(\varrho-f)z+f\varrho;$$

comme $f\varrho=2n+1$, $\varrho-f=2k$, ces valeurs deviendront

$$P=(2n+1)z^4+4(n+1)kz^3-6(2n+1)zz-4(n+1)kz+2n+1,$$
$$Q=(2n+1)z^4-4(n+1)kz^3-6(2n+1)zz+4(n+1)kz+2n+1.$$

13. Pour découvrir maintenant les valeurs de z dans notre équation, il faudra considérer avec soin les signes $+$ et $-$ que doivent avoir les lettres P et Q. Remarquons premièrement que lorsque $z>\varrho$, l'une et l'autre expression (4) sont positives; donc on les prendra avec le signe $+$. Mais si z est plus petit que f, alors P devient négatif et Q aussi, et par conséquent il faudra leur donner le signe $-$. Enfin, si z se trouve entre f et ϱ, la lettre P sera positive et Q négative. D'après ces considérations on voit que, selon que z est plus grand que ϱ, ou plus petit que f, ou enfin contenu entre ϱ et f, on aura trois cas à développer, nommément les suivants.

Premier cas.

Recherche des valeurs de z plus grandes que ϱ.

14. Comme les deux lettres P et Q ont le signe $+$, nous aurons

$$P+Q=2(2n+1)z^4-12(2n+1)zz+2(2n+1),$$

et notre équation développée à résoudre sera

$$nn(z^4+2zz+1)=2(2n+1)(z^4-6zz+1),$$

où, lorsque $nn > 2(2n+1)$, le premier membre surpassera toujours le second, et par conséquent toutes les valeurs de z, depuis ϱ jusqu'à l'infini, répondront à notre but, et nous aurons toujours $pp+qq > rr$. Cela arrive lorsque $n > 2+\sqrt{6}$. Or, dans le cas de $n = 2+\sqrt{6}$, on aura

$$k = \sqrt{(nn-2n-1)} = \sqrt{(5+2\sqrt{6})} = \sqrt{3}+\sqrt{2}, \quad \varrho = n+k = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1),$$
$$f = n-k = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

Donc cela aura lieu quand

$$\varrho > (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1), \quad f < (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1),$$

ou bien, en réduisant en fractions décimales, lorsque $\varrho > 7{,}5957541$ et $f < 1{,}3032254$. Ainsi, toutes les fois que $f < 1{,}3032254$, ou $\varrho > 7{,}5957541$, la quantité z peut être plus grande que ϱ jusqu'à l'infini.

15. Passons maintenant au cas, où $nn < 2(2n+1)$, ce qui arrive lorsque $n < 2+\sqrt{6}$, ou lorsque $f > (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ et, au contraire, $\varrho < (3+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$. Si nous retranchons dans notre équation le premier membre du second, nous aurons

$$(4n+2-nn)z^4 - (24n+12+2nn)zz + 4n+2-2nn.$$

Soit, pour abréger, $\frac{nn+12n+6}{4n+2-nn} = \Delta$, il viendra, après avoir divisé par $4n+2-nn$,

$$z^4 - 2\Delta zz + 1 = 0.$$

En résolvant cette équation, on a $zz = \Delta \pm \sqrt{(\Delta^2-1)}$, ou enfin $z = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta+1}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta-1}{2}\right)}$. Or, de ces quatre racines de l'équation $z^4 - 2\Delta zz + 1 = 0$, la plus grande $\sqrt{\left(\frac{\Delta+1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\Delta-1}{2}\right)}$ est la seule qui surpasse 1, et de là nous concluons que toutes les valeurs, depuis ϱ jusqu'à ce terme, fourniront des valeurs convenables pour z.

16. Supposons $f = \frac{3}{2}$ et par conséquent $\varrho = 5$; nous aurons $n = \frac{13}{4}$, $\Delta = 12{,}52112$ et $\frac{\Delta+1}{2} = 6{,}76056$, $\frac{\Delta-1}{2} = 5{,}76056$, enfin $\sqrt{\left(\frac{\Delta+1}{2}\right)} = 2{,}60$, $\sqrt{\left(\frac{\Delta-1}{2}\right)} = 2{,}40$, et de là $z = 5$, c'est-à-dire z ne saurait surpasser ϱ que d'une fraction extrêmement petite.

Second cas.

Recherche des valeurs de z qui se trouvent au dessous de f.

17. Ici P et Q sont négatifs, et notre équation à résoudre sera

$$nn(zz+1)^2 = -P-Q = -2(2n+1)z^4 + 12(2n+1)zz - 2(2n+1) = -2(2n+1)(z^4-6zz+1),$$

laquelle peut être réduite à la précédente, en faisant $z = \frac{v+1}{v-1}$; car alors on aura

$$nn(vv+1)^2 = 2(2n+1)(v^4 - 6vv + 1).$$

Observons ici que les deux lettres v et z dépendent l'une de l'autre de la même manière que f et ϱ, de sorte qu'on aura semblablement $vz = v+z+1$.

18. Ainsi nous aurons ici, de même qu'auparavant, les valeurs convenables de v entre les limites de ϱ et ∞, lorsque $\varrho > 7{,}5957541$, ou $f < 1{,}3032254$, et par conséquent $z = \frac{v+1}{v-1}$ pourra être pris entre les limites de f et 1.

19. Pour abréger, mettons au lieu des nombres rapportés 7,5957541 et 1,3032254 simplement ceux-ci: 7,5 et 1,3. D'après cela, on arrivera à cette conclusion importante: toutes les fois que ϱ se trouve entre les limites 7,5 et ∞, ou bien f entre 1,3 et 1, on pourra toujours prendre le nombre z, ou entre les limites ϱ et ∞, ou entre celles de f et 1.

20. Examinons à présent le cas où $\varrho < 7,5$, ou $f > 1,3$, et commençons par le cas de $\varrho = f = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $f = \varrho$, on aura $k = 0$ et $nn - 2n - 1 = 0$, ou $nn = 2n + 1$, par conséquent

$$A = \frac{nn + 6(2n+1)}{2(2n+1) - nn} = \frac{7nn}{nn} = 7, \quad \text{et enfin}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{7+1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)} = 2 + \sqrt{3} = 3,7320508, \qquad z = \frac{v+1}{v-1} = \sqrt{3} = 1,7320508.$$

Pour simplifier, nous remplacerons les nombres 3,7320508 et 1,7320508 par 3,73 et 1,73, et nous tirerons cette conclusion: dans le cas, où $f = \varrho = 1 + \sqrt{2}$, on pourra toujours prendre z, ou entre les limites ϱ et 3,73, ou entre celles de f et 1,73. Il ne s'agit plus que de rechercher les cas où ϱ se trouve dans les limites 7,5 et $1 + \sqrt{2}$, ou f entre celles de 1,3 et $1 + \sqrt{2}$.

21. Le cas traité précédemment par la supposition de $f = \frac{3}{2}$ et $\varrho = 5$, nous donne $v = 5$, d'où il suit que $z = \frac{v+1}{v-1} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire que, dans ce cas, z ne pourra différer de f que d'une fraction extrêmement petite. Il suit de là que lorsque l'on diminue ϱ au dessous de 7,5 vers le terme 5, la valeur de z diminuera de plus en plus jusqu'à devenir sensiblement égale à f.

Troisième cas.

Recherche des valeurs de z qui se trouvent entre ϱ et f.

22. Dans ce cas, la valeur de P sera positive et celle de Q négative, et l'équation à résoudre sera $nn(zz+1)^2 = P - Q$, ou $nn(zz+1)^2 = 8(n+1)k(z^3 - z)$. Supposons ici

$$\frac{8k(n+1)}{nn} = 4\vartheta, \quad \text{ou} \quad \frac{2k(n+1)}{nn} = \vartheta;$$

nous aurons cette équation bicarrée $z^4 - 4\vartheta z^3 + 2zz + 4\vartheta z + 1 = 0$, laquelle pourra être résolue sans qu'on ait recours au cube.

23. Supposons $z^4 - 4\vartheta z^3 + 2zz + 4\vartheta z + 1 = (zz - \alpha z - 1)(zz - \beta z - 1)$; le produit des facteurs du second membre est $z^4 - (\alpha + \beta) z^3 + (\alpha\beta - 2) zz + (\alpha + \beta) z + 1$, lequel étant comparé avec le premier membre, nous donne ces deux conditions $\alpha + \beta = 4\vartheta$, $\alpha\beta - 2 = 2$, ou bien $\alpha\beta = 4$, de là $\alpha - \beta = \sqrt{((\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta)} = 4\sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)}$, ce qui prouve l'impossibilité de l'équation $nn(z^4 + 2zz + 1) = 8(n+1)k(z^3 - z)$ dans le cas où $\vartheta < 1$. Donc, pour $\vartheta < 1$, on aura toujours $nn(z^4 + 2zz + 1) > 8(n+1)k(z^3 - z)$, et par conséquent toutes les valeurs de z depuis f jusqu'à ϱ vérifieront la condition mentionnée (8).

24. Pour trouver les valeurs de n qui rendent $\vartheta < 1$, nous prendrons l'expression de ϑ qui est $\frac{2k(n+1)}{nn}$, où $k = \sqrt{(nn - 2n - 1)}$. Ainsi, pour la détermination de ces valeurs de n, nous aurons cette condition

$$\frac{2(n+1)\sqrt{(nn-2n-1)}}{nn} < 1, \quad \text{ou bien} \quad n^4 - \frac{16}{3}nn - \frac{16}{3}n - \frac{4}{3} < 0,$$

qui se réduit à l'inégalité $n^4 < \frac{4}{3}(2n+1)^2$; de laquelle nous tirons

$$n^2 < \frac{2(2n+1)}{\sqrt{3}} < \frac{4n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \text{et enfin} \quad n < \frac{2+\sqrt{(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} = 2{,}7320508.$$

Il suit de là que, tant que n est plus petit que 2,7320508, ϑ sera plus petit que 1, et toutes les valeurs de z depuis f jusqu'à ϱ satisferont à notre but.

25. Passons maintenant au cas ou $\vartheta > 1$; alors, après avoir trouvé $\alpha + \beta = 4\vartheta$ et $\alpha - \beta = 4\sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)}$, nous aurons $\alpha = 2\vartheta + 2\sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)}$, $\beta = 2\vartheta - 2\sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)}$; ainsi les deux facteurs de notre bicarré seront

$$zz - 2(\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})z - 1 \quad \text{et} \quad zz - 2(\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})z - 1,$$

qui étant égalés à 0, donneront les quatre racines de notre équation:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{[2\vartheta(\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})]},$$
$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} - \sqrt{[2\vartheta(\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})]},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{[2\vartheta(\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})]},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} - \sqrt{[2\vartheta(\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)})]}.$$

Mais il n'est pas difficile de remarquer que

$$\vartheta \pm \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} = \left(\sqrt{\left(\frac{\vartheta+1}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\vartheta-1}{2}\right)}\right)^2;$$

donc les expressions trouvées pour les racines de notre équation se réduisent aux suivantes:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))}.$$

De ces quatre racines nous n'aurons à considérer que deux

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$

car les deux autres sont plus petites que 1. D'après ces valeurs de z, qui rendent

$$nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z) = 0,$$

il n'est pas difficile d'assigner les limites des valeurs de z qui vérifient la condition

$$nn(zz + 1)^2 > 8(n + 1)k(z^3 - z).$$

Pour cela, nous remarquons que la plus grande valeur de z, qui rend $nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z) = 0$; est $\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{\vartheta(\vartheta - 1)}$; donc toutes les valeurs qui surpassent cette limite donnent

$$nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z) > 0$$

et par conséquent remplissent la condition $nn(zz + 1)^2 > 8(n + 1)k(z^3 - z)$. Toutes les valeurs de z qui sont au-dessous de $\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))}$, et qui ne sont pas inférieures à l'autre racine de l'équation $nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z) = 0$,

qui est $\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{\vartheta((\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))}$,

rendront $nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z) < 0$,

et par conséquent ne vérifieront pas la condition $nn(zz + 1)^2 > 8(n + 1)k(z^3 - z)$. Mais, passé cette limite, toutes les valeurs de z rendront de nouveau $nn(zz + 1)^2 - 8(n + 1)k(z^3 - z)$ positif, et par conséquent rempliront la condition $nn(zz + 1)^2 > 8(n + 1)k(z^3 - z)$.

Donc, cette condition ne sera remplie que pour des valeurs de z comprises entre les limites

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))}.$$

26. Nous sommes en état maintenant d'assigner, pour chaque valeur proposée de f ou de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, des valeurs convenables de z entre f et ϱ, en cherchant $2n = \frac{ff+1}{f-1}$, ou $= \frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}$, puis $k = \sqrt{(nn - 2n - 1)}$, ou bien $k = n - f = \varrho - n$ et enfin $\vartheta = \frac{2(n+1)k}{nn}$, qui déterminera les limites de z par ces formules irrationelles:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))}.$$

27. Ayant déterminé, d'après ces formules, les valeurs de z pour plusieurs nombres f ou ϱ, et les ayant jointes aux valeurs de z tirées des deux recherches précédentes, nous avons construit une table qui donne, pour certains nombres ϱ, les limites des valeurs de z, qui remplissent la condition (8).

C'est ainsi que nous parvenons à la solution complète du problème principal. Si la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que $1 + \sqrt{2}$, on la cherchera dans la première colonne de notre table, et alors l'autre déterminera les limites du rapport $\frac{c}{d} = z$. Quant au cas de $\frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$, on prendra $\frac{a}{b} = f$, et cherchant dans la première colonne la valeur de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, on aura de même les limites des valeurs de $\frac{c}{d}$.

Table

qui représente, pour certains nombres ϱ, les limites pour z.

ϱ	Limites de z		ϱ	Limites de z	
2,41	1,73 ... 3,73		7,0	1,21 ... 1,38,	6,25 ... 10,71
3,0	1,71 ... 3,81		7,5	1,00 ... 1,36,	6,50 .... ∞
3,5	1,66 ... 4,00		8,0	1,00 ... 1,36,	6,56 .... ∞
3,75	1,64 ... 2,21,	2,65 ... 4,11	9,0	1,00 ... 1,35,	6,68 .... ∞
4,0	1,61 ... 1,80,	3,49 ... 4,25	10	1,00 ... 1,34,	6,92 .... ∞
4,5	1,55 ... 1,58,	4,40 ... 4,58	11	1,00 ... 1,33,	7,04 .... ∞
5,0	1,50 ... 1,50,	5,00 ... 5,00	13	1,00 ... 1,32,	7,21 .... ∞
5,5	1,43 ... 1,45,	5,44 ... 5,59	15	1,00 ... 1,32,	7,30 .... ∞
6,0	1,37 ... 1,42,	5,78 ... 6,43	∞	1,00 ... 1,30,	7,59 .... ∞
6,5	1,29 ... 1,40,	6,04 ... 7,82			

28. D'après cette table, on ne pourrait point assigner la valeur convenable de $z=\frac{c}{d}$, lorsque $\varrho=\frac{a}{b}=5$; car, pour $\varrho=5$, les limites de z, à un centième près, concourent l'une vers l'autre. Mais, plus nous nous éloignons de ce cas singulier, plus aussi s'étendront les limites entre lesquelles la fraction $\frac{c}{d}$ pourra être prise.

Pour éclaircir notre méthode par un exemple, prenons $\frac{a}{b}=4$, ou bien $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$; l'autre fraction $\frac{c}{d}$ pourra être prise ou entre les limites 1,61 et 1,80, ou entre 3,49 et 4,25. Ainsi soit $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$, $\frac{c}{d}=\frac{7}{2}$, on aura

$a=4$	$b=1$
$c=7$	$d=2$
$x=4.7+1.2=30$	$x'=4.7-1.2=26$
$y=4.2-7.1=1$	$y'=4.2+7.1=15$
$xx-yy=899$	$x'x'-y'y'=451$
$2xy=60$	$2x'y'=780$
$xx-yy-2xy=839$	$x'x'-y'y'-2x'y'=-329$

On prendra donc $p=329$, $q=839$ et r sera $=30^2+1^2=26^2+15^2=901$, et d'après les valeurs de p, q, r les nombres cherchés A, B, C, D seront exprimés ainsi:

$$A=\frac{pp+qq-rr}{2}=\frac{361}{2},\qquad B=\frac{pp+rr-qq}{2}=\frac{216121}{2},$$

$$C=\frac{qq+rr-pp}{2}=\frac{1407481}{2},\qquad D=\frac{3rr-pp-qq}{2}=\frac{1623241}{2},$$

ces nombres étant multipliés par 4, donneront pour la solution de notre problème les quatre entiers suivants:

722, 432242, 2814962, 3246482.

VII.

Considerationes circa analysin Diophanteam.

1. Saepe ac multum mecum cogitavi, an non liceret eam analyseos partem, quae Diophantea appellari solet, veluti reliquas matheseos disciplinas, ad certa capita revocare, quibus constitutis universus hujus analyseos complexus perspici, et cuique problemati caput, ad quod referri oporteat, assignari queat, ut hinc principia statim innotescant, ex quibus cujusque problematis solutionem peti conveniat. Verum postquam complures quaestiones huc pertinentes omni studio pertractassem, singulas fere sibi prorsus peculiares methodos et calculi artificia postulare deprehendi, ut propemodum totidem hujus analyseos capita constituenda videantur, quot problemata particularia in hoc genere proponi possunt. Ex quo nullo adhuc modo intelligere licet, quomodo pro hac analyseos parte principia generalia constitui, eamque in certas partes distribui oporteat.

2. Divisio quidem hujus analyseos in duas partes statim se offert, quarum altera ejusmodi problemata in se complectitur, quorum solutiones ita per formulas generales exhiberi queant, ut omnes plane solutiones in iis contineantur, ex iisque derivari queant. Altera autem pars ejusmodi quaestionibus solvendis versatur, quarum solutio generalis neutiquam in certis formulis comprehendi potest, sed ita institui solet, ut ex qualibet solutione jam inventa aliae novae deduci queant, quo in negotio tamen iterum fere infinita varietas pro diversa problematum indole cernitur; et quoniam nunc quidem maxima pars problematum, quae in analysi Diophantea tractari solent, ad hanc alteram partem est referenda, multo minus methodi ad ea solvenda accommodatae ad certas classes revocari posse videntur.

3. Neque vero illa divisio problematum inde petita, quod alia solutionem generalem, in certis formulis analyticis contentam, admittant, alia vero tantum solutiones particulares recipiant, quae tamen continuo ad alias novas perducant, tam certo est stabilita, ut haec duo problematum genera ob suam naturam penitus a se invicem dirimantur, cum utique evenire queat, ut problemata, quae ad posteriorem partem referenda videntur, certis adhibitis artificiis generaliter resolvi queant. Cujusmodi est problema de tribus cubis inveniendis, quorum summa sit cubus, cujus solutiones antehac tantum particulares sunt datae, donec equidem ejus solutionem generalem exhibui, ita ut hoc problema nunc primae parti accensendum videatur.

4. Cum igitur hactenus plura problemata Diophantea sim perscrutatus, unde multitudo ac varietas methodorum, quibus ad ea solvenda uti convenit, maxime elucet, nunc aliud ejus generis problema, quod quidem apud auctores passim occurrit, contemplabor, quod ita se habet:

Invenire tres numeros v, x, y, ***quorum binorum productum, summa eorundem auctum, producat numerum quadratum, ita ut hae tres formulae*** vx + v + x, vy + v + y, xy + x + y ***quadrata reddi debeant.***

Deinde vero eandem quaestionem ad quatuor hujusmodi numeros extendam, quandoquidem tum maximae difficultates occurrunt, dum haec quaestio, uti est proposita, generaliter resolvi potest, ac solutio tantum in numeris integris certa artificia postulat.

5. Ad hoc problema resolvendum, ponamus $v+1=A$, $x+1=B$ et $y+1=C$, ut sequentes tres formulae $AB-1$, $AC-1$ et $BC-1$ quadrata fieri debeant. Statuamus igitur primo $AB=pp+1$, $AC=qq+1$ et $BC=rr+1$, eritque $ABC=\sqrt{(pp+1)(qq+1)(rr+1)}$. Quo jam haec formula facilius rationalis efficiatur, litteras p et q ut datas spectemus, ponamusque $(pp+1)(qq+1)=mm+nn$, ut sit $m=pq\pm 1$, et $n=p\mp q$, fietque

$$ABC=\sqrt{(mm+nn)(rr+1)}=\sqrt{((mr+n)^2+(nr-m)^2)},$$

quae radix statuatur $=mr+n+t(nr-m)$, ut prodeat $nr-m=2mrt+2nt+nrtt-mtt$,

$$\text{hincque}\quad r=\frac{m(tt-1)-2nt}{n(tt-1)+2mt}.$$

6. Erit ergo $rr+1=\frac{(mm+nn)(tt+1)^2}{(n(tt-1)+2mt)^2}$ et $ABC=\frac{(mm+nn)(tt+1)}{n(tt-1)+2mt}$, unde ob $BC=rr+1$, reperitur

$$A=\frac{n(tt-1)+2mt}{tt+1},\quad \text{et ob}\quad mm+nn=(pp+1)(qq+1),$$

$$B=\frac{(pp+1)(tt+1)}{n(tt-1)+2mt}\quad \text{et}$$

$$C=\frac{(qq+1)(tt+1)}{n(tt-1)+2mt},$$

existente $m=pq\pm 1$ et $n=p\mp q$.

7. En ergo solutionem maxime generalem nostri problematis, in qua adeo binos numeros p et q pro lubitu accipere licet, ita ut binae formulae $AB-1$ et $AC-1$ datis quadratis aequentur; et cum littera t etiamnunc arbitrio nostro permittatur, pro tertia formula $BC-1$ infinita quadrata reperiri possunt, unde hoc problema sine ullo dubio ad primam partem, ubi solutiones generales exhibere licet, erit referendum. Verum cum hoc modo terni numeri quaesiti plerumque prodeant fracti, si solutiones in integris desiderentur, alia artificia in hunc finem adhiberi conveniet, quae hic exposuisse juvabit.

Solutio problematis per numeros integros.

8. Quoniam numeros p et q ut datos spectamus, solutio ita facilius obtinetur. Posito

$$AB=pp+1\quad \text{et}\quad AC=qq+1,\quad \text{ut sit}\quad B=\frac{pp+1}{A}\quad \text{et}\quad C=\frac{qq+1}{A},$$

erit statim $$BC-1=\frac{(pp+1)(qq+1)}{AA}-1=\frac{mm+nn-AA}{AA},$$

quae forma cum esse debeat quadratum, sumatur $A=n=p-q$, seu $p=q+A$, fietque

$$B=A+2q+\frac{qq+1}{A}\quad \text{et}\quad C=\frac{qq+1}{A},$$

unde numeros A et q ita accipi conveniet, ut A sit divisor ipsius $qq+1$. Quare necesse est pro

A capi summam duorum quadratorum, ac tum semper pro q infinitos valores assignare licebit, ut $qq+1$ divisionem per A admittat, veluti ex sequentibus exemplis patebit:

1) Sit $A=1$ et $q=u$, erunt tres numeri quaesiti $A=1$, $B=uu+2u+2$ et $C=uu+1$.

2) Sit $A=2$, sumique oportet $q=2u-1$, unde prodeunt numeri quaesiti:

$$A=2,\quad B=2uu+2u+1,\quad C=2uu-2u+1.$$

3) Sit $A=5$, sumique oportet $q=5u\pm 2$, unde duae resultant solutiones

$$A=5,\quad B=5uu+14u+10,\quad C=5uu+4u+1$$
$$A=5,\quad B=5uu+6u+2,\quad C=5uu-4u+1;$$

sicque binis A et C duplex valor ipsius B respondet, scilicet

$$A=5,\quad C=5uu+4u+1,\quad B=5uu+14u+10$$
$$\text{vel}\quad B=5uu-6u+2.$$

4) Sit $A=ff+gg$ et k minimus numerus, cujus quadratum unitate auctum per A sit divisibile, ut sit $\frac{kk+1}{ff+gg}=h$. Jam ponatur $q=(ff+gg)u+k$, eruntque tres numeri quaesiti

$$A=ff+gg,\quad C=(ff+gg)uu+2ku+h \text{ et } B=(ff+gg)uu+2(ff+gg+k)u+ff+gg+2k+h,$$

ubi observo, si ambo numeri k et u capiantur negative, ut valor ipsius C maneat idem, tum pro B alium insuper prodire valorem

$$B=(ff+gg)uu-2(ff+gg-k)u+ff+gg-2k+h.$$

9. Alio autem modo prorsus singulari solutiones in integris facile inveniri possunt, qui ita procedit: Capiantur binae fractiones $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ tam parum a se invicem discrepantes, ut sit $ad-bc=\pm 1$; inde formetur tertia $\frac{c\pm a}{d\pm b}$, quae ad utramque priorum simili modo erit comparata. Quo facto tres numeri quaesiti ita se habebunt:

$$A=aa+bb,\quad B=cc+dd,\quad C=(c\pm a)^2+(d\pm b)^2,$$

namque ob $ad-bc=\pm 1$, erit $AB=(ac+bd)^2+1$,

$$AC=(ac\pm aa+bd\pm bb)^2+1,$$
$$BC=(cc\pm ac+dd\pm bd)^2+1.$$

10. Hinc simpliciores solutiones obtinentur sequentes:

$\frac{a}{b}$,	$\frac{c}{d}$,	$\frac{a+c}{b+d}$	A	B	C
$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{f}$,	$\frac{1}{f+1}$	1	$ff+1$	$ff+2f+2$
$\frac{1}{1}$,	$\frac{f-1}{f}$,	$\frac{f}{f+1}$	2	$2ff-2f+1$	$2ff+2f+1$
$\frac{1}{2}$,	$\frac{f}{2f-1}$,	$\frac{f+1}{2f+1}$	5	$5ff-4f+1$	$5ff+6f+2$
$\frac{1}{2}$,	$\frac{f}{2f-1}$,	$\frac{f-1}{2f-3}$	5	$5ff-4f+1$	$5ff-14f+10$
$\frac{1}{3}$,	$\frac{f}{3f-1}$,	$\frac{f+1}{3f+2}$	10	$10ff-6f+1$	$10ff+14f+5$
$\frac{1}{3}$,	$\frac{f}{3f-1}$,	$\frac{f-1}{3f-4}$	10	$10ff-6f+1$	$10ff-26f+17$

unde patet has solutiones convenire cum praecedentibus.

11. Datis autem duobus numeris A et B, ut sit $AB - 1 = \square = pp$, tertius C infinitis modis inveniri potest sequenti modo: Cum tam $AC - 1$ quam $BC - 1$ quadratum esse debeat, statuatur primo productum $ABCC - (A + B)C + 1 = (mC + 1)^2$, unde reperitur

$$C = \frac{A+B+2m}{AB-mm}, \quad \text{unde fit} \quad AC - 1 = \frac{(A+m)^2}{AB-mm} \quad \text{et} \quad BC - 1 = \frac{(B+m)^2}{AB-mm}.$$

Tantum ergo superest ut $AB - mm = pp + 1 - mm$ reddatur quadratum puta $= nn$, seu ut sit $mm + nn = pp + 1$. Hunc in finem sumantur duae fractiones a et α, ut sit $aa + \alpha\alpha = 1$, fiatque $m = ap + \alpha$ et $n = \alpha p - a$, ex quo habebitur

$$C = \frac{A+B \pm 2(ap+\alpha)}{(\alpha p - a)^2},$$

ubi sumtis pro lubitu duobus numeris f et g, capi oportet

$$a = \frac{ff-gg}{ff+gg} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2fg}{ff+gg}.$$

12. Hinc adeo plures valores pro C in integris inveniri possunt; sumto enim $f = 1$ et $g = 0$, prodit $C = A + B \pm 2p$. Deinde posito $f = 2p$ et $g = 1$, prodit

$$C = (A + B)(4pp + 1)^2 \pm 2p(4pp + 1)(4pp + 3).$$

Tum vero etiam sumendo $f = 4pp + 1$ et $g = 2p$, fit

$$C = (A + B)(16p^4 + 12pp + 1)^2 \pm 2p(16p^4 + 12pp + 1)(16p^4 + 20pp + 5).$$

Porro, positio $f = 8p^3 + 4p$ et $g = 4pp + 1$ dat quoque duos novos valores integros. Ex quo intelligere licet, in genere formam tertii numeri C fore

$$C = (A + B)M^2 \pm 2pMN,$$

ubi quantitates M et N has series recurrentes constituunt:

$$M = +1, \quad 4pp + 1, \quad 16p^4 + 12pp + 1, \quad 64p^6 + 80p^4 + 24pp + 1, \text{ etc.},$$
$$N = +1, \quad 4pp + 3, \quad 16p^4 + 20pp + 5, \quad 64p^6 + 112p^4 + 56pp + 7, \text{ etc.},$$

quarum utriusque scala relationis est $4pp + 2, \ -1$, ita ut in genere sit

$$M = \frac{(\sqrt{(1+pp)}+p)^{2\lambda+1} + (\sqrt{(1+pp)}-p)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{et} \quad N = \frac{(\sqrt{(1+pp)}+p)^{2\lambda+1} - (\sqrt{(1+pp)}-p)^{2\lambda+1}}{2p}.$$

Vel posito $2p = q$, et denotante n numerum parem quemcunque erit

$$M = q^n + \frac{(n-1)}{1}q^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}q^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}q^{n-6} + \text{etc.}$$

$$N = q^n + \frac{(n+1)}{1}q^{n-2} + \frac{(n+1)(n-2)}{1.2}q^{n-4} + \frac{(n+1)(n-3)(n-4)}{1.2.3}q^{n-6} + \text{etc.}$$

13. **Problema 2.** *Invenire quatuor numeros, ut binorum productum una cum summa eorundem binorum faciat quadratum; seu, quod eodem redit, invenire quatuor numeros* A, B, C, D, *ut binorum producta, unitate minuta, sint quadrata, sicque hae sex formulae*

$$AB - 1, \quad AC - 1, \quad AD - 1, \quad BC - 1, \quad BD - 1, \quad CD - 1$$

fiant quadrata.

Pro solutione hujus problematis spectemus duos numeros A et B tanquam datos, ut sit

$$AB - 1 = pp, \quad \text{seu} \quad AB = pp + 1,$$

ac sumto $aa + \alpha\alpha = 1$, statuatur tertius numerus $C = \frac{A+B+2(ap+\alpha)}{(\alpha p - a)^2}$. Simili modo sumto $bb + \beta\beta = 1$, ponatur quartus numerus $D = \frac{A+B+2(bp+\beta)}{(\beta p - b)^2}$, sicque jam erit satisfactum his conditionibus

$$AB - 1 = \square, \quad AC - 1 = \square, \quad BC - 1 = \square, \quad AD - 1 = \square, \quad BD - 1 = \square,$$

ita ut tantum restet sexta conditio implenda, qua esse debet $CD - 1 = \square$, quae propterea dat

$$(A+B)^2 + 2(A+B)((a+b)p + \alpha + \beta) + 4(ap+\alpha)(bp+\beta) - (\alpha p - a)^2(\beta p - b)^2 = \square,$$

cui ita satisfieri oportet, ut simul fiat $AB = pp + 1$.

14. Praeter a, α, b, β spectetur etiam p ut datum, et cum sit

$$B = \frac{pp+1}{A} \quad \text{et} \quad A + B = \frac{AA+pp+1}{A},$$

quadratum effici debebit haec forma:

$$\begin{aligned} A^4 + 2A^3(a+b)p + 2A^2(pp+1) \qquad &+ 2A(pp+1)(a+b) + (pp+1)^2 \\ + 2A^3(\alpha+\beta) + 4A^2(ap+\alpha)(bp+\beta) &+ 2A(pp+1)(\alpha+\beta) \\ - A^2(\alpha p - a)^2(\beta p - b)^2, & \end{aligned}$$

cujus radix statuatur

$$\begin{aligned} AA + A(a+b)p - pp - 1 \\ + A(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

unde nascetur haec aequatio

$$\left.\begin{aligned} &AA(a+b)^2pp \\ &+ 3AA(a+b)(\alpha+\beta)p \\ &+ AA(\alpha+\beta)^2 \\ &- 4AA(pp+1) \\ &- 4AA(ap+\alpha)(bp+\beta) \\ &+ AA(\alpha p - a)^2(\beta p - b)^2 \end{aligned}\right\} = 4A(pp+1)((a+b)p + \alpha + \beta),$$

ex qua elicitur

$$A = \frac{4(pp+1)((a+b)p+\alpha+\beta)}{((a+b)p+\alpha+\beta)^2 - 4(pp+1) - 4(ap+\alpha)(bp+\beta) + (\alpha p - a)^2(\beta p - b)^2}.$$

15. Quanquam haec solutio neutiquam est generalis, siquidem ex formula quarti ordinis est derivata, tamen quoniam numeros a, α, b, β cum p pro arbitrio assumere licet, dum sit

$$aa + \alpha\alpha = 1 \quad \text{et} \quad bb + \beta\beta = 1,$$

innumerabiles suppeditat solutiones, circa quas nil aliud desiderari videtur, nisi quod numeri prodeant non solum fracti sed etiam praemagni, ac subinde etiam negativi. Simpliciores autem solutiones ex casu quo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $a = 1$, $b = -1$ obtinebuntur, ubi fit $C = A + B + 2p$ et $D = A + B - 2p$, existente $AB = pp + 1$; tum igitur erit $CD - 1 = (A+B)^2 - 4pp - 1 = \square$. Quare si statuatur $(A+B)^2 = qq + 4pp + 1$, erit $(A-B)^2 = qq - 3$, ex quo fiat $A - B = q - r$, ut prodeat $q = \frac{rr+3}{2r}$ et $A - B = \frac{3-rr}{2r}$. Jam invento q sit $A + B = 2p + s$, fietque

$$p=\frac{qq+1-ss}{4s} \quad \text{et} \quad A+B=\frac{qq+1+ss}{2s}.$$

Si hic capiatur $r=1$, erunt numeri quaesiti

$$A=\frac{ss+2s+5}{4s}, \qquad B=\frac{ss-2s+5}{4s}, \qquad C=\frac{5}{s}, \qquad D=s,$$

Posito $r=2$, ut sit $q=\frac{7}{4}$, habebuntur

$$A=\frac{16ss+8s+65}{64s}, \quad B=\frac{16ss-8s+65}{64s}, \quad C=\frac{65}{16s}, \quad D=s,$$

qui fient omnes unitate majores sumto $s=\frac{7}{2}$:

$$A=\frac{289}{224}, \qquad B=\frac{233}{224}, \qquad C=\frac{65}{56}, \qquad D=\frac{7}{2},$$

et sumto $s=\frac{15}{4}$: $\quad A=\frac{4}{3}, \qquad B=\frac{13}{12}, \qquad C=\frac{13}{12}, \qquad D=\frac{15}{4}.$

16. Praeterea etiam solutio particularis notari meretur, qua sumtis $b=-a$ et $\beta=-\alpha$ fit

$$C=\frac{A+B+2(ap+\alpha)}{(\alpha p-a)^2} \quad \text{et} \quad D=\frac{A+B-2(ap+\alpha)}{(\alpha p-a)^2}, \quad \text{et ob} \quad B=\frac{pp+1}{A}$$

prodit haec aequatio

$$\left.\begin{aligned} A^4+2AA\,(pp+1)+(pp+1)^2 \\ -4AA\,(ap+\alpha)^2 \\ -AA\,(\alpha p-a)^4 \end{aligned}\right\}=\Box,$$

qua reducta ad hanc formam $(AA-pp-1)^2+AA\,(\alpha p-a)^2(4-(\alpha p-a)^2)=\Box$, evidens est hoc fieri sumendo $\alpha p-a=2$, seu $p=\frac{2+a}{\alpha}$, hincque

$$B=\frac{pp+1}{A}, \quad C=\frac{A+B+\frac{2(2a+1)}{\alpha}}{4}=\frac{\alpha(A+B)+4a+2}{4\alpha} \quad \text{et} \quad D=\frac{\alpha(A+B)-4a-2}{4\alpha},$$

ubi adeo A pro lubitu accipi potest.

17. Si hic ponamus $a=\frac{ff-gg}{ff+gg}$ et $\alpha=\frac{2fg}{ff+gg}$, et pro m et n sumamus numeros quoscunque, quatuor numeri quaesiti prodibunt sequenti modo expressi:

$$A=\frac{m(ff+gg)}{2nfg}, \qquad B=\frac{n(9ff+gg)}{2mfg},$$

$$C=\frac{(m+3n)^2ff+(m-n)^2gg}{8mnfg}, \quad D=\frac{(m-3n)^2ff+(m+n)^2gg}{8mnfg},$$

quae solutio, etsi est particularis, tamen satis late patet, ob quatuor numeros f, g, m, n arbitrio nostro relictos. Sit, exempli gratia, $f=1$, $g=2$, et $m=5$, $n=6$, erunt numeri satisfacientes

$$A=\frac{25}{24}, \quad B=\frac{39}{10}, \quad C=\frac{533}{480}, \quad D=\frac{653}{480}, \quad \text{unde fit}$$

$$AB-1=\left(\frac{7}{4}\right)^2, \quad AC-1=\left(\frac{19}{48}\right)^2, \quad AD-1=\left(\frac{31}{48}\right)^2,$$

$$BC-1=\left(\frac{73}{40}\right)^2, \quad BD-1=\left(\frac{83}{40}\right)^2, \quad CD-1=\left(\frac{343}{480}\right)^2.$$

Cum autem hae solutiones omnes in numeris fractis consistant praeter simplicissimam, quae est

$$A=1,\quad B=2,\quad C=5,\quad D=1,$$

quaestio oritur satis curiosa, num praeterea non aliae solutiones in numeris integris reperiri queant?

18. **Problema 3.** *Invenire quatuor numeros, ut binorum productum dato numero* n *auctum sit numerus quadratus.*

Sint A, B, C, D quatuor numeri quaesiti, et cum $AB+n$ esse debeat quadratum, ponatur $A=naa-bb$ et $B=ncc-dd$, ut fiat $AB=(nac-bd)^2-n(ad-bc)^2$, quare dum sit $ad-bc=\pm 1$, haec conditio adimpletur. Quare ejusmodi fractiones $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ investigare oportet, ut sit $ad-bc=\pm 1$, quod cum facile praestetur, idem eveniet in fractionibus $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{a-c}{b-d}$, cum utraque illarum conjunctis. Statuamus ergo

$$A=naa-bb,\qquad B=ncc-dd,$$
$$C=n(a+c)^2-(b+d)^2,\qquad D=n(a-c)^2-(b-d)^2,$$

nihilque aliud superest nisi ut $CD+n$ reddatur quadratum, hoc est

$$\left.\begin{array}{l} nn(aa-cc)^2-2n(ab-cd)^2+(bb-dd)^2 \\ \qquad -2n(ad-bc)^2 \\ \qquad +n \end{array}\right\}=\square,$$

seu ob $(ad-bc)^2=1$,

$$\left.\begin{array}{l} nn(aa-cc)^2-2n(ab-cd)^2+(bb-dd)^2 \\ \qquad -n \end{array}\right\}=\square,$$

quae autem aequatio tantum solutionem particularem continet.

19. Solutionem autem generalem, ut supra impetrabimus ponendo $AB=pp-n$, tum quia pro C esse debet tam $AC+n=\square$ quam $BC+n=\square$, ponatur productum

$$nn+n(A+B)C+ABCC=nn+2nCx+CCxx,$$

fiet

$$C=\frac{n(A+B-2x)}{xx-AB}\quad \text{et}\quad AC+n=\frac{n(A-x)^2}{xx-AB},$$

unde patet $\frac{xx-AB}{n}$ quadratum esse debere. Statuatur ergo

$$xx-AB=xx-pp+n=nyy,\quad \text{seu}\quad xx-nyy=pp-n.$$

Simili modo ponamus $vv-nzz=pp-n$, ut obtineamus

$$C=\frac{A+B-2x}{yy}\quad \text{et}\quad D=\frac{A+B-2v}{zz},$$

ac superest, ut reddatur quadratum

$$(A+B)^2-2(x+v)(A+B)+nyyzz+4xv.$$

At ob $B=\frac{pp-n}{A}$ et $A+B=\frac{AA+pp-n}{A}$, habebitur

$$A^4 - 2A^3(x+v) + 2AA(pp-n) - 2A(pp-n)(x+v) + (pp-n)^2$$
$$+ nAAyyzz$$
$$+ 4AAxv$$

quadrato aequandum. Statuatur radix $AA - A(x+v) - (pp-n)$, eritque

$$AA(x+v)^2 - 4AA(pp-n) - nAAyyzz - 4AAxv + 4A(x+v)(pp-n) = 0,$$

seu $A = \frac{4(x+v)(pp-n)}{nyyzz + 4(pp-n) - (x+v)^2 + 4xv}$, seu $A = \frac{4(x+v)(pp-n)}{n(yy-1)(zz-1) + 2xv + 2pp - 3n}$, seu

$$A = \frac{4(x+v)(pp-n)}{nyyzz - 2n(yy+zz) + (v+x)^2}.$$

20. Solutio particularis satis concinna hinc obtinetur ut supra sumendo $v = -x$, ut fiat $z = y$ atque $C = \frac{A+B-2x}{yy}$ et $D = \frac{A+B+2x}{yy}$, existente $AB = pp - n = xx - nyy$: cum enim quadratum esse debeat haec forma

$$A^4 + 2AA(pp-n) + nAAy^4 - 4AAxx + (pp-n)^2,$$

seu $$(AA - pp + n)^2 + nAAyy(yy-4),$$

evidens est hoc fieri sumto $y = 2$, ut sit $pp = xx - 3n$. Ponatur $p = x - t$, fiet

$$x = \frac{tt+3n}{2t} \quad \text{et} \quad p = \frac{3n-tt}{2t}, \quad \text{seu} \quad p = \frac{3nuu-tt}{2tu} \quad \text{et} \quad x = \frac{3nuu+tt}{2tu},$$

$$\text{hinc} \quad AB = \frac{(nuu-tt)(9nuu-tt)}{4ttuu}.$$

Quocirca habebimus

$$A = \frac{f(nuu-tt)}{2gtu}, \qquad B = \frac{g(9nuu-tt)}{2ftu},$$

$$C = \frac{n(f+3g)^2uu - (f-g)^2tt}{8fgtu}, \qquad D = \frac{n(f-3g)^2uu - (f+g)^2tt}{8fgtu}.$$

Circa hanc solutionem notari convenit esse $C + D = \frac{A+B}{2}$.

21. **Problema 4.** *Invenire quatuor numeros, ut binorum producta singula, summa numerorum aucta, fiant numeri quadrati.*

Inventis, per problema praecedens, quatuor numeris A, B, C, D, quorum binorum producta dato numero n aucta fiunt quadrata, statuantur numeri quatuor quaesiti mA, mB, mC, mD, et cum sit $mm(AB+n)$ quadratum, seu $mmAB + mmn = \square$, efficiendum erit tantum, ut numerus mmn aequalis fiat summae horum quatuor numerorum $m(A+B+C+D)$, unde statim reperitur multiplicator quaesitus

$$m = \frac{A+B+C+D}{n}.$$

Quodsi ergo numeri A, B, C, D ex § praecedente accipiantur, ob $C + D = \frac{A+B}{2}$ habebitur

$$m = \frac{3(A+B)}{2n} = \frac{3n(ff+9gg)uu - 3(ff+gg)tt}{4nfgtu}.$$

Hic igitur non solum quatuor litterae f, g et t, u, sed etiam numerus n pro lubitu accipi possunt, ita ut haec solutio latissime pateat, etiamsi non sit generalis.

22. Quoniam autem hic numerus n arbitrio nostro relinquitur, ex aequatione § praecedentis $pp = xx - 3n$ statim sumamus $n = \frac{xx-pp}{3}$, ut sit $AB = \frac{4pp-xx}{3}$; hinc ponamus

$$A = \frac{f(2p+x)}{3g} \quad \text{et} \quad B = \frac{g(2p-x)}{f}, \quad \text{erit}$$

$$A + B = \frac{2(ff+3gg)p + (ff-3gg)x}{3fg},$$

hinc

$$C = \frac{2(ff+3gg)p + (ff-6fg-3gg)x}{12fg},$$

$$D = \frac{2(ff+3gg)p + (ff+6fg-3gg)x}{12fg}.$$

Nunc igitur ob $A + B + C + D = \frac{2(ff+3gg)p + (ff-3gg)x}{2fg}$, erit multiplicator communis

$$m = \frac{6(ff+3gg)p + 3(ff-3gg)x}{2fg(xx-pp)}.$$

23. Possunt hic adeo bini numeri A et B pro lubitu assumi, unde fit

$$2p + x = \frac{3Ag}{f} \quad \text{et} \quad 2p - x = \frac{Bf}{g}, \quad \text{hinc}$$

$$p = \frac{3Agg+Bff}{4fg} \quad \text{et} \quad x = \frac{3Agg-Bff}{2fg}, \quad \text{atque}$$

$$n = \frac{(9Agg-Bff)(Agg-Bff)}{16ffgg}, \quad \text{tum vero}$$

$$C = \frac{A+B}{4} + \frac{3Agg-Bff}{4fg}, \qquad D = \frac{A+B}{4} - \frac{3Agg+Bff}{4fg}$$

ac denique multiplicator $m = \frac{3(A+B)}{2n}$. Si hic ad fractiones tollendas ponamus $A = 4afg$ et $B = 4bfg$, erit $C = (a+b)fg + 3agg - bff$ et $D = (a+b)fg - 3agg + bff$, atque $n = (9agg - bff)(agg - bff)$, tum vero $m = \frac{6(a+b)fg}{(9agg-bff)(agg-bff)}$.

24. Si sumamus $f = 1$ et $g = 1$, erit $A = 4a$, $B = 4b$, $C = 4a$, $D = 2b - 2a$ et multiplicator

$$m = \frac{6(a+b)}{(9a-b)(a-b)} = \frac{6(a+b)}{(b-a)(b-9a)},$$

qui ut fiat positivus, capi debet $b > 9a$; sit ergo

1) $a = 1$, $b = 10$, erit $A = 4$, $B = 40$, $C = 4$, $D = 18$ et $m = \frac{6.11}{9.1} = \frac{22}{3}$.

2) $a = 1$, $b = 11$, erit $A = 4$, $B = 44$, $C = 4$, $D = 20$ et $m = \frac{6.12}{10.2} = \frac{18}{5}$.

3) $a = 1$, $b = 13$, erit $A = 4$, $B = 52$, $C = 4$, $D = 24$ et $m = \frac{6.14}{12.4} = \frac{7}{4}$.

unde quatuor numeri quaesiti erunt integri

$$mA = 7, \quad mB = 91, \quad mC = 7, \quad mD = 42, \quad \text{quorum summa est} = 147.$$

Hic autem desiderari potest, quod duo quaesitorum numerorum sint aequales, quod etiam evenit sumendo $f = 3g$.

25. Ut igitur numeros inaequales nanciscamur, sumamus $f = 2$ et $g = 1$, fietque

$$A = 8a,\quad B = 8b,\quad C = 5a - 2b,\quad D = 6b - a \quad \text{et} \quad m = \frac{12(a+b)}{(9a-4b)(a-4b)} = \frac{12(a+b)}{(4b-9a)(4b-a)},$$

unde casus simpliciores erunt

1) $a = 5,\ b = 1,$ hinc $A = 40,\ B = 8,\ C = 23,\ D = 1$ et $m = \frac{72}{41}$,

2) $a = 11,\ b = 2,$ hinc $A = 88,\ B = 16,\ C = 51,\ D = 1$ et $m = \frac{4}{7}$,

3) $a = 3,\ b = 7,$ hinc $A = 24,\ B = 56,\ C = 1,\ D = 39$ et $m = \frac{24}{5}$.

Ponamus etiam $f = 3$ et $g = 2$, ut consequemur

$$A = 24a,\quad B = 24b,\quad C = 18a - 3b,\quad D = 15b - 6a$$

et

$$m = \frac{36(a+b)}{9(4a-b)(4a-9b)} = \frac{4(a+b)}{(4a-b)(4a-9b)}$$

sicque patet hinc praecedentem solutionem enasci.

26. Verum solutio adeo in integris prodit ponendo $f = 5$ et $g = 1$, unde fit

$$A = 20a,\quad B = 20b,\quad C = 8a - 20b,\quad D = 30b + 2a \quad \text{et} \quad m = \frac{30(a+b)}{(25b-9a)(25b-a)}.$$

Sumatur jam $a = 19,\ b = 7$ fietque

$$A = 380,\quad B = 140,\quad C = 12,\quad D = 248 \quad \text{et} \quad m = \frac{30.26}{4.156} = \frac{5}{4}.$$

Quare quatuor numeri quaesiti erunt

I. 475, II. 175, III. 15, IV. 310,

quorum summa est $975 = 25.39$. Alii numeri integri sunt

I. 504, II. 96, III. 36, IV. 264,

quorum summa est $= 900$.

27. Hinc etiam solvi potest hoc problema,

quo quaeruntur quatuor numeri ejusmodi, ut binorum producta, summa omnium minuta, fiant numeri quadrati.

Solutio enim ex praecedente facile deducitur, dum pro multiplicatore m numerus capitur negativus. Unde in numeris integris sequens solutio obtinetur:

$$\mathrm{I} = 80,\quad \mathrm{II} = 24,\quad \mathrm{III} = 8,\quad \mathrm{IV} = 44,$$

quorum summa est 156; quibusque hoc modo quaestioni satisfit

$$80.24 - 156 = 1764 = 42^2,\qquad 80.8 - 156 = 484 = 22^2,$$
$$80.44 - 156 = 3364 = 58^2,\qquad 24.8 - 156 = 36 = 6^2,$$
$$24.44 - 156 = 900 = 30^2,\qquad 8.44 - 156 = 196 = 14^2.$$

Appendix.

28. Adjungam hic problema prorsus singulare, olim mihi propositum, quod vires analyseos Diophanteae omnino transcendere videtur, quandoquidem solutio ad formulam sexti gradus quadrato aequandam perducit, dum adhuc operationes istius analyseos non ultra quartum gradum sunt promotae. Problema autem hoc, cujus tandem unam solutionem sum adeptus, ita se habet:

Invenire duos numeros, quorum productum ita sit comparatum, ut sive addatur, sive subtrahatur tam summa quam differentia eorum, semper prodeant numeri quadrati.

Positis ergo numeris quaesitis $\frac{x}{n}$ et $\frac{y}{n}$, requiritur ut sit

$$\text{tam} \quad xy \pm n(x+y) = \text{quadrato}$$
$$\text{quam} \quad xy \pm n(x-y) = \text{quadrato}.$$

Cum nunc sit $AA + BB \pm 2AB$ quadratum, capiatur xy ita, ut duplici modo in duo quadrata resolvi possit. Hunc in finem posito $xy = (pp+qq)(rr+ss)$, erit duplici modo

$$\text{vel} \quad A = pr + qs \quad \text{et} \quad B = ps - qr,$$
$$\text{vel} \quad A = ps + qr \quad \text{et} \quad B = pr - qs;$$

quare statuatur

$$n(x+y) = 2(pr+qs)(ps-qr) \quad \text{et}$$
$$n(x-y) = 2(ps+qr)(pr-qs), \quad \text{ut fiat}$$

$$\sqrt{(xy + n(x+y))} = pr + qs + ps - qr$$
$$\sqrt{(xy - n(x+y))} = pr + qs - ps + qr$$
$$\sqrt{(xy + n(x-y))} = ps + qr + pr - qs$$
$$\sqrt{(xy - n(x-y))} = ps + qr - pr + qs$$

29. Jam factae positiones praebent

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{(pr+qs)(ps-qr)}{(ps+qr)(pr-qs)} = \frac{pprs + pqss - pqrr - qqrs}{pprs - pqss + pqrr - qqrs},$$

unde fit $\frac{x}{y} = \frac{rs(pp-qq)}{pq(ss-rr)}$. Ponamus ergo $x = mrs(pp-qq)$ et $y = mpq(ss-rr)$, eritque

$$x + y = m(pr+qs)(ps-qr),$$

ideoque $n = \frac{2}{m}$, ut numeri quaesiti fiant

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{2} mmrs(pp-qq) \quad \text{et}$$
$$\frac{y}{n} = \frac{1}{2} mmpq(ss-rr).$$

Nunc ob $xy = (pp+qq)(rr+ss)$, habebimus hanc aequationem resolvendam

$$mmpqrs(pp-qq)(ss-rr) = (pp+qq)(rr+ss);$$

quae utique ita est comparata, ut per nulla artificia adhuc cognita confici possit.

30. Facile autem perspicitur id effici oportere, ut haec fractio quadratum evadat

$$\frac{pq(pp-qq)(pp+qq)}{rs(ss-rr)(rr+ss)} = \square,$$

tum igitur ob
$$mm = \frac{(pp+qq)(rr+ss)}{pqrs(pp-qq)(ss-rr)},$$
erit
$$\frac{x}{n} = \frac{(pp+qq)(rr+ss)}{2pq(ss-rr)} \quad \text{et} \quad \frac{y}{n} = \frac{(pp+qq)(rr+ss)}{2rs(pp-qq)},$$
dummodo formulae $pq(pp-qq)(pp+qq)$ et $rs(ss-rr)(rr+ss)$ rationem quadratam inter se teneant.

31. Ad hoc praestandum alia non patere videtur via, nisi ut simplicioribus numeris pro A et B assumendis, hujus formulae $AB(AA-BB)(AA+BB)$ plures valores evolvantur, donec duo occurrant rationem quadratam inter se tenentes. Hoc modo reperi istam conditionem impleri sumendo $p=12$, $q=1$, $s=16$ et $r=11$, unde fit
$$pq(pp-qq)(pp+qq) = 4.3.5.11.13.29 \quad \text{et}$$
$$rs(ss-rr)(rr+ss) = 144.3.5.11.13.29.$$
Quamobrem ambo numeri quaesiti sunt
$$\frac{x}{n} = \frac{5.13.29.29}{8.3.5.27} = \frac{13.841}{8.81} = A,$$
$$\frac{y}{n} = \frac{5.13.29.29}{32.11.11.13} = \frac{5.841}{32.121} = B,$$
qui duo numeri si dicantur A et B, fit
$$\sqrt{(AB+A+B)} = \frac{29.329}{16.9.11} = \frac{9541}{1584}; \quad \sqrt{(AB-A-B)} = \frac{29.33}{16.9.11} = \frac{29}{48};$$
$$\sqrt{(AB+A-B)} = \frac{841.11}{16.9.11} = \frac{841}{144}; \quad \sqrt{(AB-A+B)} = \frac{841.3}{16.9.11} = \frac{841}{528}.$$

VIII.

De quadratis magicis.

(Conv. acad. exhib. 1776 Oct. 17.)

§ 1. Quadratum magicum dici solet, cujus cellulis numeri naturales ita sunt inscripti, ut summae numerorum per omnes fascias tam horizontales quam verticales, tum vero etiam per binas diagonales prodeant inter se aequales; ita si latera quadrati in x partes aequales dividantur, numerus omnium cellularum erit xx, et singulae fasciae tam horizontales, quam verticales, quin etiam binae diagonales continebunt x cellulas, in quas ergo omnes numeros naturales $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots xx$ ita disponi oportet, ut summae per omnes fascias memoratas evadant inter se aequales. Cum igitur summa omnium horum numerorum, ab 1 usque ad xx, erit $\frac{xx(1+xx)}{2}$, summa uniuscujusque fasciae erit $=\frac{x(1+xx)}{2}$, unde si fuerit $x=3$, summa per singulas fascias erit $=15$.

§ 2. Hinc ergo in quotcunque cellulas totum quadratum fuerit divisum, summa numerorum per singulas fascias dispositorum facile assignari poterit, unde istas summas pro singulis hujusmodi quadratis per omnes fascias assignasse juvabit

x	xx	$\frac{x(1+xx)}{2}$
1	1	1
2	4	5
3	9	15
4	16	34
5	25	65
6	36	111
7	49	175
8	64	260
9	81	360
	etc.	

ubi x denotat numerum partium, in quas latera quadrati dividuntur, xx numerum cellularum in quadrato contentarum et $\frac{1}{2}x(1+xx)$ indicat summam omnium numerorum per singulas fascias dispositorum.

§ 3. Ut jam certam regulam investigemus, hujusmodi quadrata magica omnium ordinum construendi, plurimum intererit observasse, omnes numeros ab 1, 2, 3, etc. usque ad xx hac formula $mx+n$ repraesentari posse. Si enim loco m accipiamus successive omnes valores 0, 1, 2, 3, 4 usque ad $x-1$, tum vero pro n omnes numeros $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots x$, manifestum est hinc omnes

plane numeros ab 1 usque ad xx provenire, siquidem cum omnibus valoribus ipsius m singuli valores ipsius n ordine combinentur. Cum igitur hoc modo omnes numeri quadrato inscribendi per formulam $mx + n$ exhiberi, ideoque per duas partes repraesentari queant, in sequentibus perpetuo partes priores mx simpliciter litteris latinis a, b, c, d, etc., partes vero posteriores n litteris graecis α, β, γ, δ, etc. designabimus, ubi evidens est pro quovis numero x multitudinem tam litterarum latinarum, quam graecarum esse $= x$, quandoquidem valores litterarum latinarum erunt $0x$, $1x$, $2x$, $3x$ usque ad $(x - 1)x$, graecarum autem valores sunt 1, 2, 3, 4 .... x. Neque vero hic certus ordo in istis litteris tam latinis, quam graecis stabiliri est censendus, cum quaelibet litterarum latinarum pro lubitu sive $0x$, sive $1x$, sive $2x$, etc. significare possit, dummodo singulis valores diversi tribuantur; quod idem de litteris graecis est tenendum.

§ 4. In posterum igitur quilibet numerus quadrato inscribendus per aggregatum ex littera latina et graeca repraesentabitur veluti per $b + \delta$, sive per $a + \beta$ etc. ita, ut singuli numeri per duas partes sint repraesentandi, tum enim si singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur manifesto omnes plane numeri ab 1 usque ad xx resultare debent, tum vero etiam perspicuum est ex diversa harum litterarum combinatione etiam semper diversos numeros oriri, neque ullum numerum duplici modo exprimi posse.

§ 5. Cum igitur omnes numeri per aggregata ex littera latina cum graeca repraesententur, pro constructione quadratorum magicorum haec regula principalis constituatur, ut primo litterae latinae singulis quadrati cellulis ita inscribantur, ut earum summa per omnes fascias eadem proveniat, ubi cum istarum litterarum numerus sit $= x$, cellularum autem omnium numerus $= xx$, evidens est quamlibet litteram x vicibus repeti debere. Simili autem modo quoque graecae litterae cellulis ejusdem quadrati ita inscribi intelligantur, ut earum quoque summae per omnes fascias evadant aequales. Sic enim etiam summae omnium numerorum ex littera latina et graeca compositorum per omnes fascias inter se erunt aequales. Tantum igitur superest, ut in hac dispositione singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur, quandoquidem hac ratione nullus numerorum ab 1 usque ad xx praetermittetur, neque ullus bis occurrere poterit.

§ 6. His regulis in genere traditis singulas species quadratorum pro cellularum numero pertractemus, ubi quidem statim apparet, a novem cellulis esse incipiendum, quandoquidem in quadrato in quatuor tantum cellulas diviso talis dispositio locum habere nequit. Praeterea hic in genere animadvertisse juvabit, cum pro qualibet specie numerus litterarum tam latinarum, quam graecarum sit $= x$, omnes autem fasciae totidem cellulas contineant, praescriptae conditioni satisfieri, si singulis fasciis omnes diversae litterae tam latinae, quam graecae inscribantur. Sin autem eveniat, ut in quapiam fascia eadem littera bis vel ter occurrat, semper necesse est, ut summa omnium litterarum in eadem fascia occurrentium aequalis sit summae omnium litterarum sive latinarum $a + b + c + d +$ etc., sive graecarum $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

I. Species quadratorum in 9 cellulas divisorum.

§ 7. Cum igitur pro hac specie sit $x = 3$, totidem habebimus litteras latinas a, b, c, totidemque graecas α, β, γ, at vero litterarum latinarum valores hic erunt 0, 2, 6, graecarum vero 1, 2, 3.

Nunc igitur a latinis a, b, c incipiamus, ac facile erit eas nostro quadrato, in 9 cellulas diviso, ita inscribere, ut in singulis fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes hae tres litterae occurrant, veluti ex hoc schemate videre licet:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

ubi etiam in altera diagonali eaedem tres litterae a, b, c reperiuntur, in altera vero eadem littera c ter repetitur; facile autem intelligitur fieri plane non posse, ut in ambabus diagonalibus simul omnes litterae fiant diversae; haec autem circumstantia nihil turbat, dummodo summa istius diagonalis scilicet $3c$ aequalis sit summae reliquarum fasciarum $a+b+c$, hoc est dummodo fuerit $2c=a+b$. Unde manifestum est pro c sumi debere 3, litteris vero a et b assignari valores 0 et 6, sic enim fiet $2c=a+b$. Pro lubitu autem poni poterit sive $a=0$, sive $b=0$; hoc observato summa ex singulis fasciis resultans est $a+b+c=9$.

§ 8. Simili modo litteras graecas in tale quadratum distribuere licet; talem autem figuram ordine inverso repraesentemus:

γ	β	α
α	γ	β
β	α	γ

ubi necesse est ut sit $2\gamma=\alpha+\beta$, ideoque $\gamma=2$. Sic enim si singulas cellulas prioris figurae cum singulis hujus figurae ordine naturali combinemus, patebit, quamlibet litteram latinam cum singulis graecis combinatum iri, ita ut ex hac conjunctione omnes numeri ab 1 usque ad 9 resultent; haec autem combinatio sequentem producet figuram:

$a\gamma$	$b\beta$	$c\alpha$
$b\alpha$	$c\gamma$	$a\beta$
$c\beta$	$a\alpha$	$b\gamma$

ubi notetur binas litteras junctas non productum, sed aggregatum designare.

§ 9. Cum igitur in hac figura sumi debeat $c=3$ et $\gamma=2$, ita ut litteris a et b valores 0 et 6, litteris autem α et β valores 1 et 3 tribui debeant, si sumamus $a=0$ et $b=6$, tum vero $\alpha=1$ et $\beta=3$, sequens orietur quadratum magicum:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

ubi quaelibet fascia nec non ambae diagonales summam dant 15. Si valores litterarum a et b, item α et β permutare velimus, facile intelligitur, inde tantum situm quadrati mutatum iri.

§ 10. Haec quidem dispositio tam latinarum, quam graecarum litterarum per se satis est perspicua, sed praecipuum momentum in hoc est positum, ut facta combinatione, singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur, id quod in nostra combinatione casu evenisse videtur. Ut igitur in hoc negotio nihil casui tribuamus, ante omnia observemus ordinem litterarum graecarum α, β, γ nullo modo ab ordine latinarum a, b, c pendere, unde pro qualibet fascia definita cum litteris latinis cognomines graecas combinare licebit, ita ut α cum a, β cum b et γ cum c combinetur; ita si prima fascia horizontalis statuatur $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, quoniam in nulla fascia sive horizontali, sive verticali eadem littera graeca bis occurrere debet, facile patet secundam fasciam horizontalem fore $b\gamma$, $c\alpha$, $a\beta$; tertiam vero $c\beta$, $a\gamma$, $b\alpha$; unde hoc quadratum resultet:

$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$
$b\gamma$	$c\alpha$	$a\beta$
$c\beta$	$a\gamma$	$b\alpha$

ubi quia in diagonali sinistra eadem littera graeca α ter occurrit, necesse est, ut fiat $3\alpha = \alpha + \beta + \gamma$, ideoque $2\alpha = \beta + \gamma$, quamobrem hinc valor ipsius α determinatur, scilicet $\alpha = 2$, quemadmodum vidimus sumi debere $c = 3$; hinc autem nulla nova quadrata magica nascuntur.

§ 11. Quanquam in hac prima specie dispositio litterarum graecarum nulla laborat difficultate, tamen pro quadratis plurium cellularum plurimum intererit, certam regulam tradere, secundum quam litterae graecae rite inscribi queant, postquam latinae jam debite fuerint dispositae; hunc in finem eligatur fascia quaepiam media sive horizontalis, sive verticalis, sive etiam diagonalis, ita ut ad utramque partem istius fasciae in cellulis inde aeque remotis, ubique duae litterae latinae diversae reperiantur, veluti hic evenit in columna media verticali, circa quam in prima horizontali reperiuntur litterae a et c, in secunda b et a, in tertia vero c et b, ubi binae litterae diversae sibi ubique respondent.

§ 12. Postquam autem talis columna media fuerit inventa, in ea singulae litterae latinae cum graecis cognominibus combinentur, tum vero in locis utrinque respondentibus litterae graecae cognomines permutentur; hocque modo ista figura resultabit:

$a\gamma$	$b\beta$	$c\alpha$
$b\alpha$	$c\gamma$	$a\beta$
$c\beta$	$a\alpha$	$b\gamma$

ubi certi sumus cum singulis latinis litteris omnes graecas combinari. Ceterum, ut conditioni diagonalium satisfiat, necesse est, quemadmodum jam notavimus, ut sumatur $2c = a + b$ et $2\gamma = \alpha + \beta$. Haec autem figura non discrepat ab ea, quam supra § 8 invenimus. Denique hic observasse juvabit, quomodocunque fasciae sive horizontales, sive verticales inter se permutentur, inde in summis tam

fasciarum horizontalium, quam verticalium nihil mutari. In diagonalibus autem hinc ingens discrimen nasci poterit: ita si prima columna verticalis auferatur et ad sinistram apponatur, orietur haec figura:

$b\beta$	$c\alpha$	$a\gamma$
$c\gamma$	$a\beta$	$b\alpha$
$a\alpha$	$b\gamma$	$c\beta$

ubi ob fascias diagonales sumi debebit $2a = b + c$ et $2\beta = \alpha + \gamma$, id quod in omnibus transpositionibus est notandum, quae observatio in sequentibus speciebus maximi erit momenti.

II. Species quadratorum in 16 cellulas divisorum.

§ 13. Cum ergo hic sit $x = 4$, quatuor habebimus litteras latinas a, b, c, d, quarum valores sunt 0, 4, 8, 12, totidemque etiam litteras graecas α, β, γ, δ, quorum valores erunt 1, 2, 3, 4. Primo igitur tali quadrato quatuor istas litteras latinas ita inscribamus, ut tam in omnibus fasciis horizontalibus, quam verticalibus, omnes hae quatuor litterae occurrant, atque ut hoc etiam, si fieri potest, in ambabus diagonalibus usu veniat.

§ 14. Quoniam igitur inter has litteras a, b, c, d nullus ordo praescribitur, eas in prima columna horizontali ordine inscribamus, tum vero etiam fasciae diagonali sinistrae, ubi in cellula secunda hujus fasciae diagonalis vel litteram c, vel d scribi oportebit, scribamus igitur c, et jam reliqua omnia determinabuntur, dummodo caveatur, ne eadem littera bis in eandem fasciam sive horizontalem, sive verticalem inferatur; hoc modo nanciscemur sequentem figuram:

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

ubi adeo etiam altera diagonalis omnes quatuor litteras continet, ita ut hic nulla conditio circa valores litterarum a, b, c, d praescribatur. Hic quidem cellulae diagonalis secundae etiam inscribere potuissemus litteram d, verum figura hinc resultans, non aliter nisi situ ab hac figura discreparet, ita ut haec figura omnes casus possibiles complecti sit censenda.

§ 15. Jam pro litteris graecis inscribendis, quoniam nulla datur fascia media, neque inter horizontales, neque verticales, fasciam diagonalem a, c, d, b pro media illa accipiamus, mox autem deprehendemus, in cellulis utrinque aeque remotis et respondentibus ubique binas litteras inter se diversas reperiri; unde regula supra § 11 data tuto uti licebit. Primo igitur litteris in hac diagonali dispositis jungamus graecas cognomines, deinde in cellulis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus; hocque modo sequens figura formabitur:

$a\alpha$	$b\delta$	$c\beta$	$d\gamma$
$d\beta$	$c\gamma$	$b\alpha$	$a\delta$
$b\gamma$	$a\beta$	$d\delta$	$c\alpha$
$c\delta$	$d\alpha$	$a\gamma$	$b\beta$

§ 16. In hac igitur figura omnes quatuor litterae tam latinae, quam graecae in omnibus fasciis tam directis, quam diagonalibus occurrunt; unde quaterni valores numerici his litteris pro lubitu sine ulla limitatione tribui possunt. Cum igitur quatuor litterae 24 variationes recipere queant, hinc omnino 576 diversae figurae formari poterunt, ubi quidem plures tantum ratione situs a se invicem discrepabunt.

§ 17. Neutiquam vero hinc concludere licet, in hac figura omnia plane quadrata magica hujus speciei contineri. Praeterea enim plurima alia exhiberi possunt, ubi non in singulis fasciis omnes quatuor litterae tam latinae, quam graecae reperiuntur, nihilo vero minus conditiones praescriptae adimplentur, tales autem formae per transpositionem columnarum sive horizontalium, sive verticalium oriri possunt, veluti si in superiore figura prima columna verticalis in finem transponatur, orietur haec figura:

$b\delta$	$c\beta$	$d\gamma$	$a\alpha$
$c\gamma$	$b\alpha$	$a\delta$	$d\beta$
$a\beta$	$d\delta$	$c\alpha$	$b\gamma$
$d\alpha$	$a\gamma$	$b\beta$	$c\delta$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes litterae tam latinae, quam graecae etiamnunc reperiuntur, verum in diagonali a sinistra ad dextram descendente duae tantum litterae latinae occurrunt scilicet b et c, graecae autem pariter tantum duae α et δ. Contra vero in altera diagonali tantum hae duae litterae latinae a et d, graecae vero ut ante, tantum α et δ.

§ 18. Ut igitur haec figura conditionibus praescriptis satisfaciat, non amplius singulis litteris singulos valores numericos tribuere licet, verum haec limitatio adjici debet, ut pro litteris latinis fiat $b+c=a+d$, pro graecis autem ut pariter sit $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, quamobrem si sumamus $a=0$, statui oportet $d=12$, ut fiat $b=4$ et $c=8$, vel vice versa $c=4$ et $b=8$. Simili modo pro graecis litteris si sumatur $\alpha=1$, fieri debet $\delta=4$, tum vero $\beta=2$ et $\gamma=3$. Unde nascitur istud quadratum magicum determinatum

8	10	15	1
11	5	4	14
2	16	9	7
13	3	6	12

ubi manifesto summa per singulas fascias est 34. Tales autem formae limitatae plurimis aliis modis, per transpositionem columnarum formari poterunt.

§ 19. Neque vero etiam absolute requiritur, ut per singulas columnas sive verticales, sive horizontales omnes litterae tam latinae quam graecae occurrant, verum etiam in his columnis fieri potest, ut tantum binae litterae sive latinae, sive graecae ingrediantur, dummodo earum summa sit semissis omnium quatuor. Pro hujusmodi autem figuris condendis, operationibus peculiaribus opus est, pro quibus vix certae regulae praescribi possunt, dummodo litterae tam latinae, quam graecae ita disponantur, ut non solum per omnes fascias debitam summam efficiant, sed etiam cum singulis latinis omnes graecae combinentur.

§ 20. Ut hujus operationis exemplum demus, statuamus primo esse $a+d=b+c$, ac litteras latinas ita disponamus, ut sequitur

a	a	d	d
d	d	a	a
b	b	c	c
c	c	b	b

ubi per omnes plane fascias summa numerorum est eadem, pro litteris autem graecis per diagonalem sinistram cum singulis litteris latinis graecae cognomines combinentur, quandoquidem circa hanc fasciam utrinque binae litterae diversae dispositae reperiuntur, quibuscum igitur litterae graecae permutatae conjungantur, unde sequens nascetur figura

$a\alpha$	$a\delta$	$d\beta$	$d\gamma$
$d\alpha$	$d\delta$	$a\beta$	$a\gamma$
$b\delta$	$b\alpha$	$c\gamma$	$c\beta$
$c\delta$	$c\alpha$	$b\gamma$	$b\beta$

ubi ergo pro litteris graecis necesse est, ut capiatur $\alpha+\delta=\beta+\gamma$; ita si capiamus $a=0$, $b=4$, $c=8$, $d=12$ et $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ et $\delta=4$, orietur istud quadratum magicum

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

§ 21. Plures aliae hujusmodi figurae formari possunt, cujusmodi est sequens:

$a\alpha$	$d\beta$	$a\delta$	$d\gamma$
$b\delta$	$c\gamma$	$b\alpha$	$c\beta$
$d\alpha$	$a\beta$	$d\delta$	$a\gamma$
$c\delta$	$b\gamma$	$c\alpha$	$b\beta$

ubi manifestum est pro litteris latinis sumi debere $a+d=b+c$, pro graecis autem $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, unde si, ut ante, valores sumantur, orietur sequens quadratum magicum:

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

§ 22. In his omnibus formis tam litterae latinae, quam graecae per omnes fascias eandem summam constituunt; fieri autem potest, ut ne hoc quidem usu veniat, verum tamen summa omnium debitum valorem obtineat, cujusmodi anomalias recensere eo magis inutile foret, cum pro talibus casibus nullae certae regulae tradi queant, quamobrem ex sequentibus speciebus eos casus potissimum contemplabimur, quibus significatio litterarum tam latinarum, quam graecarum nulla restrictione limitatur.

III. Species quadratorum in 25 cellulas divisorum.

§ 23. Hic igitur occurrent tam quinque litterae latinae a, b, c, d, e, quam graecae α, β, γ, δ, ε, quarum illarum valores erunt: 0, 5, 10, 15, 20, harum vero 1, 2, 3, 4, 5, ambos igitur harum litterarum ordines cellulis quadrati ita inscribi oportet, ut in singulis fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus, atque etiam diagonalibus omnes litterae occurrant.

§ 24. Primum igitur huic quadrato per supremam fasciam horizontalem litteras latinas ordine inscribamus, deinde fasciam diagonalem sinistram litteris compleamus, ita ut in nullis reliquarum fasciarum eadem littera bis occurrat, id quod plus uno modo fieri potest. Hac autem fascia constituta, altera diagonalis sponte impletur, ut in figura annexa videre licet:

$a\varepsilon$	$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$
$e\beta$	$c\alpha$	$d\delta$	$a\gamma$	$b\varepsilon$
$d\alpha$	$e\gamma$	$b\beta$	$c\varepsilon$	$a\delta$
$b\gamma$	$d\varepsilon$	$a\alpha$	$e\delta$	$c\beta$
$c\delta$	$a\beta$	$e\varepsilon$	$b\alpha$	$d\gamma$

Deinde sub cellula media scribi debet a et super ea d, unde columna media verticalis jam erit completa, tum vero reliquae fasciae sponte se produnt.

§ 25. Pro litteris graecis non opus est ad fasciam diagonalem confugere, sed si consideremus columnam verticalem mediam, utrinque in cellulis respondentibus deprehendimus binas diversas litteras, quamobrem in hac fascia singulis litteris latinis adscribamus graecas cognomines, et in locis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus, quemadmodum in figura fecimus.

§ 26. In hac igitur figura nulla plane limitatio praescribitur, sed tam pro litteris latinis, quam pro graecis quoslibet numerorum respondentium accipere licet, quare cum quinae litterae 120 permutationes admittant, hinc omnio 14400 variationes oriri possunt.

§ 27. Quodsi etiam hic fascias sive horizontales, sive verticales inter se permutare velimus, plures alias formas impetrabimus, quae autem ob diagonales plerumque certas determinationes postulabunt, veluti si hic prima columna verticalis in finem transponatur, orietur sequens forma:

$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$	$a\varepsilon$
$c\alpha$	$d\delta$	$a\gamma$	$b\varepsilon$	$e\beta$
$e\gamma$	$b\beta$	$c\varepsilon$	$a\delta$	$d\alpha$
$d\varepsilon$	$a\alpha$	$e\delta$	$c\beta$	$b\gamma$
$a\beta$	$e\varepsilon$	$b\alpha$	$d\gamma$	$c\delta$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes litterae occurrunt; verum ut simul diagonalibus satisfiat, tam haec summa $3c + b + d + 3\delta + \beta + \varepsilon$, quam ista

$$3a + b + c + 3\varepsilon + \alpha + \beta$$

praescriptam summam omnium latinarum et graecarum litterarum scilicet

$$a + b + c + d + e + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

conficiat, quamobrem hinc nascentur hae duae aequationes

$$2c + 2\delta = a + e + \alpha + \gamma \quad \text{et} \quad 2a + 2\varepsilon = d + e + \gamma + \delta,$$

quibus conditionibus pluribus modis satisfieri poterit, quin etiam seorsim tam litterae latinae, quam graecae ita determinari poterunt, ut fiat

$$1)\ 2c = a + e, \qquad 2)\ 2a = d + e, \qquad 3)\ 2\delta = \alpha + \gamma \quad \text{et} \quad 4)\ 2\varepsilon = \gamma + \delta.$$

Evidens enim est duabus prioribus satisfieri, si hae litterae d, b, a, c, e progressionem arithmeticam constituant, id quod fit sumendo $d = 0$, $b = 5$, $a = 10$, $c = 15$ et $e = 20$; duae reliquae conditiones adimplebuntur, si litterae graecae hoc ordine dispositae α, β, δ, ε, γ in progressione arithmetica procedant, id quod fiet sumendo $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 4$ et $\gamma = 5$, unde oritur istud quadratum:

8	20	2	21	14
16	3	15	9	22
25	7	19	13	1
4	11	23	17	10
12	24	6	5	18

hic scilicet ubique eadem summa prodit $= 65$.

§ 28. Talis autem distributio litterarum haud exiguam operam et circumspectionem postulat, praecipue in speciebus superioribus, ubi plura elementa prorsus arbitrio nostro relinquuntur, ita ut numerus talium figurarum continuo fiat major; verum si eam conditionem omittere velimus, qua nulla plane restrictio inter valores litterarum praescribatur, labor satis commodus reddi potest; si enim litterae c valor medius, qui est 10, tribuatur, reliquae vero arbitrio nostro relinquantur, eadem littera c alteram diagonalem complere poterimus, unde reliquae litterae ordine naturali sequantur, quemadmodum ex hac figura perspicietur:

c	d	e	a	b
b	c	d	e	a
a	b	c	d	e
e	a	b	c	d
d	e	a	b	c

Nunc in fascia media horizontali singulis litteris latinis graecae cognomines adscribantur, tum vero circa eam utrinque cognomines graecae permutentur; hincque orietur sequens forma:

$c\delta$	$d\varepsilon$	$e\alpha$	$a\beta$	$b\gamma$
$b\varepsilon$	$c\alpha$	$d\beta$	$e\gamma$	$a\delta$
$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	$d\delta$	$e\varepsilon$
$e\beta$	$a\gamma$	$b\delta$	$c\varepsilon$	$d\alpha$
$d\gamma$	$e\delta$	$a\varepsilon$	$b\alpha$	$c\beta$

unde patet pro γ medium valorem, qui est 3, accipi debere; quodsi ergo hic sumamus ordine

$$a = 0,\; b = 5,\; c = 10,\; d = 15,\; e = 20 \text{ et } \alpha = 1,\; \beta = 2,\; \gamma = 3,\; \delta = 4,\; \varepsilon = 5,$$

orietur sequens quadratum magicum:

14	20	21	2	8
10	11	17	23	4
1	7	13	19	25
22	3	9	15	16
18	24	5	6	12

§ 29. Per regulam autem vulgarem circa formationem quadratorum imparium, quae ubique tradi solet, ista figura formatur

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

quae num in forma nostra contineatur dispiciamus: ac primo quidem pro diagonali sinistra ob $c = 10$ statui debet $\delta = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 3$, $\varepsilon = 4$ et $\beta = 5$; tum vero $b = 0$, $d = 20$, $a = 15$, $e = 5$. Ex quibus valoribus hoc ipsum quadratum nascitur.

§ 30. Plures alias hujusmodi formas satis regulares tam in hac specie, quam sequentibus excogitare licet; unde numerus quadratorum magicorum facili negotio in immensum augeri poterit. Vix autem unquam certi esse possemus, nos omnes casus possibiles exhausisse, etiamsi eorum numerus certe non sit infinitus. Maxime autem sine dubio foret desiderandum, ut regulae magis generales et ad usum practicum accommodatae detegerentur, ne opus sit plerasque operationes quasi palpando peragere. Pulcherrimum enim certe incrementum theoriae combinationum hinc esset accessurum.

IV. Species quadratorum in 36 cellulas divisorum.

§ 31. Quoniam hic numerus variationum nimis est magnus, et plurimae determinationes arbitrio nostro relinquuntur, afferamus hic tantum regulam specialem, qua litterae tam latinae quam graecae facile in ordinem debitum disponi queant, litteris scilicet sex latinis tales valores tribuantur, ut sit $a + f = b + e = c + d$, similique modo pro graecis $\alpha + \zeta = \beta + \varepsilon = \gamma + \delta$; tum enim ad similitudinem § 20 singulis fasciis horizontalibus binas litteras latinas conjugatas inscribamus, in columnas vero verticales ejusmodi binas litteras graecas disponamus, hocque modo obtinebitur sequens figura:

$a\alpha$	$a\zeta$	$a\beta$	$f\varepsilon$	$f\gamma$	$f\delta$
$f\alpha$	$f\zeta$	$f\beta$	$a\varepsilon$	$a\gamma$	$a\delta$
$b\alpha$	$b\zeta$	$b\beta$	$e\varepsilon$	$e\gamma$	$e\delta$
$e\zeta$	$e\alpha$	$e\varepsilon$	$b\beta$	$b\delta$	$b\gamma$
$c\zeta$	$c\alpha$	$c\varepsilon$	$d\beta$	$d\delta$	$d\gamma$
$d\zeta$	$d\alpha$	$d\varepsilon$	$c\beta$	$c\delta$	$c\gamma$

§ 32 Hinc autem jam satis clare intelligitur, talem litterarum dispositionem in omnibus speciebus paribus cum successu adhibere posse, pro speciebus autem imparibus methodus ante descripta, qua litterae medios valores tenentes per ambas diagonales continuo repetuntur, reliquae vero litterae hinc in ordine naturali se insequuntur, ita ut quotcunque cellulae in quadrato proponantur, semper in nostra potestate sit plurima quadrata magica construere, etiamsi regulae hinc traditae maxime sint speciales.

IX.

Theorema arithmeticum ejusque demonstratio.

Theorema, quod hic proponere ac demonstrare constitui, jam pridem per litteras cum amicis communicaveram, quibus id non parum elegans et omni attentione dignum est visum, praesertim cum ejus demonstratio minime sit obvia, ac fortasse a plerisque frustra indagata. Sequenti autem modo istud theorema enunciavi:

> *Si fuerint propositi numeri quotcunque inaequales* a, b, c, d, *etc. et ex singulis ejusmodi formentur fractiones, quarum numerator communis sit unitas, denominator vero cujusque productum ex omnibus differentiis ejusdem numeri a singulis reliquorum, ita ut hae fractiones sint:*
>
> $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}},\quad \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}},\quad \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}},\quad \text{etc.}$$
>
> *tum summa omnium harum fractionum semper est nihilo aequalis.*

Ita si, exempli gratia, propositi sint hi numeri 2, 5, 7, 8, quatuor fractiones inde formandae sunt

$$\frac{1}{-3.-5.-6},\quad \frac{1}{3.-2.-3},\quad \frac{1}{5.2.-1},\quad \frac{1}{6.3.1}$$

quae ad has reducuntur

$$-\frac{1}{3.5.6},\quad +\frac{1}{3.2.3},\quad -\frac{1}{5.2.1},\quad +\frac{1}{6.3.1}$$

eritque vi theorematis

$$-\frac{1}{90}+\frac{1}{18}-\frac{1}{10}+\frac{1}{18}=0.$$

Ne signa negationis molestiam creent, formatio harum fractionum ita praecipi potest, ut dispositis numeris datis secundum ordinem magnitudinis, sive crescendo, sive decrescendo, pro quolibet ejus differentiae a singulis reliquorum in se invicem ducantur, hisque pro denominatoribus sumtis, numeratore existente unitate, fractionibus hinc factis signa + et — alternatim tribuantur.

Veluti si numeri propositi sint

3, 8, 12, 15, 17, 18

ex singulis denominatores ita colligantur

ex 3	5.	9.	12.	14.	15 =	113400
8	5.	4.	7.	9.	10 =	12600
12	9.	4.	3.	5.	6 =	3240
15	12.	7.	3.	2.	3 =	1512
17	14.	9.	5.	2.	1 =	1260
18	15.	10.	6.	3.	1 =	2700

eritque $$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0,$$
seu singulis per 36 multiplicatis:
$$\frac{1}{3150}-\frac{1}{350}+\frac{1}{90}-\frac{1}{42}+\frac{1}{35}-\frac{1}{75}=0,$$
quod, fractionibus ad eundem denominatorem 3150 reductis, $\frac{1-9+35-75+90-42}{3150}=0$ per se est manifestum.

Casu quidem, quo duo tantum numeri proponuntur, theorema demonstratione non eget, cum sit perspicuum esse
$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=0;$$
casus autem trium numerorum a, b, c jam magis est reconditus, neque enim statim liquet esse
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0;$$
sed pro pluribus numeris, atque adeo in genere, quantacunque sit eorum multitudo, vix quicquam juvat in casibus simplicioribus veritatem agnovisse.

Verum etiam hoc theorema multo latius extendi et sequenti modo proferri potest:

Theorema generalius.

Si propositi fuerint numeri inaequales quotcunque a, b, c, d, e, f, etc., quorum multitudo sit $=m$, et ex uniuscujusque a reliquis differentiis sequentia formentur producta:
$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)\text{ etc.}=A,$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)\text{ etc.}=B,$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f)\text{ etc.}=C,$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f)\text{ etc.}=D,$$
$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)\text{ etc.}=E,$$
etc.,

quorum singula $m-1$ factoribus constant; tum erit non solum ut ante
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\text{etc.}=0,$$
sed etiam hoc modo generalius:
$$\frac{a^n}{A}+\frac{b^n}{B}+\frac{c^n}{C}+\frac{d^n}{D}+\frac{e^n}{E}+\text{etc.}=0,$$
dummodo exponens n sit numerus integer positivus minor quam $m-1$.

Ita in exemplo supra allato, quo numeri propositi sunt 3, 8, 12, 15, 17, 18, non solum est ut ibi: $$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0,$$
sed etiam veritas in sequentibus fractionibus aeque habet locum:
$$\frac{3}{113400}-\frac{8}{12600}+\frac{12}{3240}-\frac{15}{1512}+\frac{17}{1260}-\frac{18}{2700}=0,$$
$$\frac{3^2}{113400}-\frac{8^2}{12600}+\frac{12^2}{3240}-\frac{15^2}{1512}+\frac{17^2}{1260}-\frac{18^2}{2700}=0,$$

$$\frac{3^3}{113400}-\frac{8^3}{12600}+\frac{12^3}{3240}-\frac{15^3}{1512}+\frac{17^3}{1260}-\frac{18^3}{2700}=0,$$

$$\frac{3^4}{113400}-\frac{8^4}{12600}+\frac{12^4}{3240}-\frac{15^4}{1512}+\frac{17^4}{1260}-\frac{18^4}{2700}=0,$$

neque vero ad altiores potestates progredi licet, cum quilibet denominator ex quinque factoribus constet.

Demonstratio Theorematis.

Theorema hoc nactus sum ex consideratione hujus formulae $\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,\text{etc.}}$, quam constat, dummodo exponens n sit numerus integer positivus, minor multitudine factorum in denominatore, semper resolvi posse in hujusmodi fractiones simplices:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}+\text{etc.},$$

quarum denominatores sunt ipsi factores illius denominatoris, numeratores vero quantitates constantes ab x non pendentes, quorum singulos sequenti modo definire licet. Cum forma proposita his fractionibus simplicibus sit aequalis, per $x-a$ multiplicando habebimus

$$\frac{x^n}{(x-b)(x-c)(x-d)\,\text{etc.}}=A+\frac{B(x-a)}{x-b}+\frac{C(x-a)}{x-c}+\frac{D(x-a)}{x-d}+\text{etc.}$$

quae aequalitas subsistet quicunque valor ipsi x tribuatur, quandoquidem litterae A, B, C, D, etc. ab x non pendent. Vera ergo erit ista aequatio, si ponatur $x=a$, unde fit

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\,\text{etc.}}=A,$$

sicque valor ipsius A innotescit, similique modo intelligitur esse

$$B=\frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\,\text{etc.}},\quad C=\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\,\text{etc.}},$$

sicque de reliquis. Cum igitur fractionibus simplicibus ad alteram partem transponendis sit

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,\text{etc.}}+\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}+\frac{C}{c-x}+\frac{D}{d-x}+\text{etc.}=0,$$

habebimus utique, numero x tanquam postremo horum numerorum a, b, c, d, ... x spectato

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-x)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots(b-x)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots(c-x)}+\dots$$

$$\dots+\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-v)}=0,$$

denotante v numerorum illorum penultimum.

Haec est demonstratio theorematis propositi, quae neutiquam ita est obvia, ut ista veritas inter vulgares, quarum ratio facile perspicitur, referenda videatur, nisi forte alia demonstratio facilior reperiri poterit; quod autem ob eam rationem minus sperare licet, quod hoc theorema veritati non est consentaneum, nisi exponens n sit numerus integer positivus, minor multitudine factorum in singulis denominatoribus.

Cum igitur sumto pro n numero majore, summa illarum fractionum non amplius evanescat, ex ipso fonte, unde hoc theorema hausimus, pro quovis casu valorem istius summae assignare poterimus, scilicet posito factorum numero $= m - 1$, ideoque numerorum omnium propositorum $a, b, c, d, \ldots x$ multitudinem $= m$. Si fuerit $n = m - 1$, vel $n = m$, vel $n > m$ fractio in demonstratione assumta

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}}$$

tanquam spuria spectari debet, quae partes quasi integras in se complectatur, atque huic ipsi parti integrae summa illarum fractionum formatarum aequalis sit necesse est.

Ita casu, quo $n = m - 1$, pars integra est unitas, ideoque summa illarum fractionum $= 1$. In exemplo igitur supra tractato, ubi secundum demonstrationem signa mutari oportet, erit

$$\frac{18^5}{2700} - \frac{17^5}{1260} + \frac{15^5}{1512} - \frac{12^5}{3240} + \frac{8^5}{12600} - \frac{3^5}{113400} = 1.$$

Sin autem sit $n = m$, pars integra, ex fractione illa eruta, est $x + a + b + c + d + \text{etc.}$, seu summa omnium numerorum propositorum. Cum ergo in superiori exemplo sit summa numerorum propositorum $= 73$, erit

$$\frac{18^6}{2700} - \frac{17^6}{1260} + \frac{15^6}{1512} - \frac{12^6}{3240} + \frac{8^6}{12600} - \frac{3^6}{113400} = 73.$$

Hinc facile colligitur, quomodo hae summae ulterius sint inveniendae. Numerorum scilicet propositorum $a, b, c, d, \ldots x$ primo sumatur summa, quae sit $= P$, tum summa productorum ex binis, quae sit $= Q$, porro summa productorum ex ternis, quae sit $= R$, item ex quaternis $= S$, ex quinis $= T$, et cetera, quo facto formetur series

$$1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}, \qquad \text{ut sit}$$

$$\mathfrak{A} = P, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}P - Q, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}P - \mathfrak{A}Q + R, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{C}P - \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}R - S, \text{ etc.}$$

atque

casu	erit summa nostrarum fractionum
$n = m - 1$	1
$n = m$	$\mathfrak{A} = P$
$n = m + 1$	$\mathfrak{B} = P^2 - Q$
$n = m + 2$	$\mathfrak{C} = P^3 - 2PQ + R$
$n = m + 3$	$\mathfrak{D} = P^4 - 3P^2Q + 2PR + Q^2 - S$
$n = m + 4$	$\mathfrak{E} = P^5 - 4P^3Q + 3P^2R + 3PQ^2 - 2PS - 2QR + T$
	etc.

Vel si ponatur summa ipsorum numerorum $= \mathfrak{P}$, summa quadratorum $= \mathfrak{Q}$, summa cuborum $= \mathfrak{R}$, summa potestatum quartarum $= \mathfrak{S}$, quintarum $= \mathfrak{T}$ etc. erit ut sequitur

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6}\mathfrak{P}^3 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{24}\mathfrak{P}^4 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + \tfrac{1}{8}\mathfrak{Q}^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\mathfrak{R} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{S}, \text{ etc.}$$

qui valores hac lege progrediuntur, ut sit:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{Q})$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}\mathfrak{A} + \mathfrak{R})$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4}(\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{Q}\mathfrak{B} + \mathfrak{R}\mathfrak{A} + \mathfrak{S})$$
etc.

Theorematis nostri veritate stabilita, haud abs re fore arbitror, si indolem formularum, circa quas theorema versatur, accuratius investigavero. Quaeritur igitur, si propositi fuerint numeri quotcunque a, b, c, d, etc., cujus indolis sit futura formula $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc., quae ex differentiis cujusque a reliquis in se invicem multiplicatis producitur. Sit igitur multitudo horum numerorum propositorum $= n$, et assumta quantitate indefinita z, inde formo hoc productum

$$(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e) \text{ etc.}$$

quod multiplicatione evolutum praebeat

$$z^n - \mathfrak{A}z^{n-1} + \mathfrak{B}z^{n-2} - \mathfrak{C}z^{n-3} + \mathfrak{D}z^{n-4} - \text{etc.}$$

Dividendo ergo per $z-a$ habebimus

$$(z-b)(z-c)(z-d) \text{ etc.} = \frac{z^n - \mathfrak{A}z^{n-1} + \mathfrak{B}z^{n-2} - \mathfrak{C}z^{n-3} + \text{etc.}}{z-a}$$

Quod si jam hic ponamus $z = a$, orietur ea ipsa forma $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc. quam supra littera A indicavi. Tum vero ad alteram partem tam numerator quam denominator in nihilum abit, ejusque propterea valor erit

$$na^{n-1} - (n-1)\mathfrak{A}a^{n-2} + (n-2)\mathfrak{B}a^{n-3} - (n-3)\mathfrak{C}a^{n-4} + \text{etc.}$$

qui cum sit

$$a^n - \mathfrak{A}a^{n-1} + \mathfrak{B}a^{n-2} - \mathfrak{C}a^{n-3} + \mathfrak{D}a^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

. . . .

(Conclusione caret.)

X.

Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis(*) depromta.

A. Divisores numerorum.

a) *De numeris formae* mxx + nyy *eorumque divisoribus.*

1.

(*J. A. Euler.*)

Theorema. Si formula $mxx+nyy$ casu $x=a$ et $y=b$ praebeat numerum primum α, tunc omnes numeri primi in formula $\alpha\pm 4mnp$ contenti simul erunt numeri formae $mxx+nyy$. Quin etiam omnes numeri primi in hac formula $aqq\pm 4mnp$ contenti simul erunt numeri formae $mxx+nyy$.

NB. Demonstratio adhuc desideratur. A. m. T. I. p. 13.

2.

(*Lexell.*)

Si formula $mxx+nyy$ divisibilis fuerit per numerum integrum i, infinitae aliae similes formulae per eundem divisibiles exhiberi possunt.

In genere enim haec formula $m(ax\pm\beta i)^2+n(ay\pm\gamma i)^2$ per i erit divisibilis, quicunque numeri integri pro α, β, γ accipiantur; semper autem numeros α, β, γ ita accipere licebit, ut quadratorum radices ambae $\alpha x-\beta i$ et $\alpha y-\gamma i$ infra $\frac{1}{2}i$ deprimantur, quin etiam altera $\alpha x-\beta i$ ad unitatem revocari poterit, quum enim numeri x et i dentur pro fractione $\frac{i}{x}$, quaeratur in numeris minoribus fractio illi proxime aequalis $\frac{\alpha}{\beta}$, ita ut sit $\alpha x-\beta i=\pm 1$, quo casu invento sit altera radix $\alpha y-\gamma i=r$, atque hi duo valores $x=1$ et $y=r$ quasi principales spectentur, tum vero reliqui ordine in hac tabella exhibentur:

x	y
1	r
2	$2r-\delta i$
3	$3r-\delta i$
4	$4r-\delta i$
5	$5r-\delta i$

Jam pulchra hic occurrit quaestio, quinam horum valorum pro x et y producturi sint minimam formulam $mxx+nyy$, quae cum minor sit quam $\frac{1}{4}(m+n)ii$, quotus certe minor erit quam $\frac{1}{4}i(m+n)$, ideoque erit vel 1, vel 2, vel 3 etc.

Exempli gratia, sit formula proposita $3xx+2yy$ et sumatur $x=7$, $y=2$, ac prodit numerus 155, cujus divisor sumatur $=i=31$, ut jam proxime fiat $\frac{i}{x}=\frac{31}{7}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{9}{2}$, sive $\alpha=9$ et $\beta=2$; tum enim fit

(*) Tomus I p. 1 ad 346, ab A. 1766 ad med. Apr. 1775; tomus II p. 1 ad 246, inde usque ad Junium 1779; tomus III p. 1 ad 184, inde usque ad mortem Euleri, 1783.

$$\alpha x - \beta i = 63 - 62 = +1, \quad \text{et altera radix} \quad \alpha y - \gamma i = 18 - 31 = -13 = r,$$

unde fiat sequens tabula:

x	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
y	13,	5,	8,	10,	3,	15,	2.

Minima formula hinc nascens erit secunda: $3.2^2 + 2.5^2 = 62$, quod per 31 divisum dat quotum minimum 2.

A. m. T. I. p. 94. 95.

3.

Theorema. Si fuerit numerus primus formae $p = 8n + 5$, constat semper dari formam $aa + 1$ per illum numerum p divisibilem, tum vero nulla hujusmodi forma $xx \pm ayy$ unquam erit per p divisibilis. Contra autem pro numeris primis formae $p = 8n + 1$ datur etiam forma $aa + 1$ per p divisibilis, tum vero dabuntur formulae $xx \pm ayy$ per p divisibiles.

Demonstratio eo nititur fundamento, quod priori casu numerus a semper sit non-residuum, in posteriori vero residuum; illud autem inde ostenditur, quod numerus residuorum sit $4n + 2$, inter quos quilibet numerus utroque signo + et — occurrit, unde multitudo diversorum residuorum erit $2n + 1$, scilicet impar; sin autem numerus ille a inter residua esset, haec multitudo prodiret par, quod esset absurdum.

A. m. T. I. p. 114.

4.

(*N. Fuss I.*)

Theorema. Si formula $naa + bb$ divisibilis sit per numerum p, semper dari poterit formula $n + qq$ divisibilis per eundem numerum p, ita ut $q < \frac{1}{2}p$.

Demonstratio. Quaeratur primo formula generalis $nxx + yy$ per numerum p divisibilis, quod fit sumendo $x = \alpha a - \beta p$ et $y = \alpha b - \gamma p$; tum enim ista formula erit $\alpha\alpha(naa + bb) - 2p(naa\beta + \alpha b\gamma) + pp(n\beta\beta + \gamma\gamma)$, quae ergo per p est divisibilis. Jam semper numeros α et β ita accipere licebit, ut fiat $\alpha a - \beta p = 1$, ideoque $x = 1$, quaerendo scilicet fractionem $\frac{\alpha}{\beta}$ proxime aequalem ipsi $\frac{p}{a}$. Cum igitur sit $y = \alpha b - \gamma p$, numerum γ semper ita accipere licebit, ut fiat y non solum minus quam p, sed etiam minus quam $\frac{1}{2}p$.

Problema. Quando formula $naa + bb$ divisibilis est per numerum p, quotum ex divisione resultantem per formulam integram exprimere.

Solutio. Cum igitur detur numerus q, ut sit $n + qq$ divisibile per p, ponatur $\frac{n + qq}{p} = r$ sumaturque $b = qa + pd$ eritque $naa + bb = naa + qqaa + 2pqad + ppdd$, quae ob $n = pr - qq$ abit in $p(raa + 2qad + pdd)$, quae ergo per p divisa dat $raa + 2qad + pdd$. Quod autem poni possit $b = qa + pd$, sive ut $\frac{b - qa}{p}$ semper sit numerus integer, inde patet, quod etiam detur formula $n + qq$ per p divisibilis, ideoque etiam $naa + aaqq$, quarum differentia $bb - aaqq$ per p divisibilis erit, unde cum p supponatur numerus primus, vel $b + aq$, vel $b - aq$ per p divisibile, utrumvis perinde est. Quia ergo $\frac{b - qa}{p}$ integer sit $= d$, ideoque poni semper poterit $b = qa + pd$.

A. m. T. II. p. 209.

5.

Theorema. Omnis numerus primus formae $8n + 1$ semper in forma $xx + 2yy$ continetur.

Demonstratio. Sufficiet ostendisse semper exhiberi posse formam $A^2 + 2B^2$ per $8n + 1$ divisibilem. Demonstratum autem est, hanc formam $a^{8n} - b^{8n}$ semper divisibilem esse per $8n + 1$, quicunque numeri pro a et b accipiantur, scilicet primi ad $8n + 1$. Ergo $a^{4n} - b^{4n}$, vel $a^{4n} + b^{4n}$ erit divisibilis. Facile autem demon-

stratur non omnes numeros $a^{4n} - b^{4n}$ divisibiles esse. Dantur ergo casus, quibus forma $a^{4n} + b^{4n}$ est divisibilis. Habebitur ergo summa duorum biquadratorum divisibilis $A^4 + B^4$. Quare cum sit $a^4 + b^4 = (aa - bb)^2 + 2aabb$, propositum est demonstratum. — Ita cum 97 in forma $8n+1$ contineatur, reperitur $97 = 5^2 + 2.6^2$.

Theorema. Omnis numerus primus formae $8n+3$ simul in forma $xx + 2yy$ continetur.

Demonstratio. Iterum sufficiet ostendisse, dari formam $A^2 + 2B^2$ per $8n+3$ divisibilem. Cum igitur haec forma $a^{8n+2} - b^{8n+2}$ semper sit divisibilis, quicunque numeri pro a et b accipiantur, erit vel $a.a^{4n} - b.b^{4n}$, vel $a.a^{4n} + b.b^{4n}$ divisibilis. Jam sumatur $a = cc$ et $b = 2dd$ ut $a.a^{4n}$ fiat quadratum A^2 et $b.b^{4n}$ duplum quadratum, puta $2B^2$, sicque vel forma $A^2 - 2B^2$, vel $A^2 + 2B^2$ divisionem admittet per $8n+1$. At vero demonstratum est, formam $A^2 - 2B^2$ alios divisores non admittere, nisi vel formae $8n+1$, vel formae $8n-1$, unde sequitur alteram formam $A^2 + 2B^2$ divisibilem esse. Ita cum sit $107 = 8.13 + 3$, reperitur esse $107 = 3^2 + 2.7^2$, hocque semper unico modo, quod ita demonstratur:

Sit $P = aa + 2bb$ simulque $P = cc + 2dd$, numerus P necessario est compositus. Cum enim sit

$$aa + 2bb = cc + 2dd, \quad \text{erit} \quad aa - cc = 2(dd - bb),$$

unde sequitur $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2(d-b)}{a-c} = \frac{p}{q}$. Erit ergo $a + c = \alpha p$ et $d + b = \alpha q$, $d - b = \beta p$ et $a - c = 2\beta q$. Hinc $2a = \alpha p + 2\beta q$ et $2b = \alpha q - \beta p$; quare cum $4P = 4aa + 2.4bb$ erit $4P = (\alpha\alpha + 2\beta\beta)(pp + 2qq)$, sicque $4P$ certe duos habet factores, quorum neuter unquam esse potest neque 1 neque 4; sequitur P ad minimum duos habere factores:

$3 = 1^2 + 2.1^2$	$59 = 3^2 + 2.5^2$
$11 = 3^2 + 2.1^2$	$67 = 7^2 + 2.3^2$
$19 = 1^2 + 2.3^2$	$83 = 9^2 + 2.1^2$
$43 = 5^2 + 2.3^2$	$107 = 3^2 + 2.7^2$.

Notandum hic, praeter casum primum, in omnibus reliquis alterum quadratum semper per 9 esse divisibile.

A. m. T. III. p. 180. 181.

6.

Theorema. Propositis numeris quibuscunque a, b, c, d, si numerus formae $abpp + cdqq$ multiplicetur per numerum formae $acrr + bdss$, tum productum semper continebitur in hac forma $bcxx + adyy$.

Demonstratio facile patet. Sumto enim $x = apr + dqs$ et $y = bps - cqr$, postrema forma $bcxx + adyy$ reperitur productum binarum praecedentium. A. m. T. III. p. 182.

(Golovin.)

Theorema. Productum ex duabus hujusmodi formulis $aa + ab + bb$ et $cc + cd + dd$ semper ad similem formam $xx + xy + yy$ reduci potest. Est enim duplici modo

$$\text{vel} \quad x = ac + b(c+d) \quad \text{et} \quad y = ad - bc$$

$$\text{vel etiam} \quad x = ad + b(c+d) \quad \text{et} \quad y = ac - bd.$$

Ita si fuerit $a = 3$ et $b = 2$, tum vero $c = 1$ et $d = 5$, erit $aa + ab + bb = 19$ et $cc + cd + dd = 31$; prior igitur resolutio dat $x = 15$ et $y = 13$, hincque $xx + xy + yy = 589$.

A. m. T. II. p. 204.

(Lexell.)

Theorema. Si formula $\alpha aa + 2\beta ab + \gamma bb$ per aliam sui similem $\alpha pp + 2\beta pq + \gamma qq$ multiplicetur, productum prodit hujus formae

$$\alpha xx + 2\beta xy + \alpha\gamma yy \quad \text{eritque} \quad x = \alpha ap - \gamma bq \quad \text{et} \quad y = aq + bp + \frac{2\beta}{\alpha} bq.$$

Corollarium. Ita si fuerit $\alpha = 1$, $2\beta = 1$ et $\gamma = 1$, erit $(aa + ab + bb)(pp + pq + qq) = xx + xy + yy$ existente $x = ap - bq$ et $y = aq + bp + bq$.

Nota Editorum. Casum specialem, quo $\beta = 0$, vide Comment. arithm. T. II, p. 201.

A. m. T. I. p. 26.

Theorema. Si formula $aapp + b\beta qq$ ducatur in formulam $abrr + \alpha\beta ss$, productum erit:

$$ab(aapprr + \beta\beta qqss) + a\beta(\alpha appss + bbqqrr) = ab(apr \pm \beta qs)^2 + a\beta(aps \pm bqr)^2,$$

hujus ergo producti forma est $abxx + a\beta yy$ existente $x = apr \pm \beta qs$ et $y = aps \pm bqr$.

(Conf. pro casu $a = b = 1$ Comment. arithm. T. II, p. 201.)

Problema. Formulam $aaxx + b\beta yy$ in aliam ejusdem generis transformare.

Solutio. Ponatur $x = bmp + \beta nq$ et $y = anp - \alpha mq$ et prodibit

$$aabbmmpp + aa\beta\beta nnqq + b\beta aannpp + b\beta aammqq = abmm(abpp + \alpha\beta qq) + a\beta nn(\alpha\beta qq + abpp) =$$
$$(abmm + a\beta nn)(abpp + a\beta qq).$$

A. m. T. I. p. 130.

7.

(*N. Fuss I.*)

Theorema. Si numerus formae $xx + nyy$ divisibilis fuerit per numerum $pp + nqq$, quotus semper erit numerus ejusdem formae $A^2 + nB^2$.

Demonstratio. Cum numeri x et y ad $pp + nqq$ debeant esse primi, et p et q quoque sint primi inter se, quicunque fuerint numeri x et y, semper per p et q ita repraesentari possunt, ut sit $x = \alpha p + \beta q$ et $y = \gamma p + \delta q$. Hoc modo formula $xx + nyy$ abit in hanc: $pp(\alpha\alpha + n\gamma\gamma) + qq(\beta\beta + n\delta\delta) + 2pq(\alpha\beta + n\gamma\delta)$, quae per $pp + nqq$ divisa praebeat quotum Δ, ita ut sit

$$pp(\alpha\alpha + n\gamma\gamma) + qq(\beta\beta + n\delta\delta) + 2pq(\alpha\beta + n\gamma\delta) = \Delta pp + n\Delta qq.$$

Hinc igitur patet fore $\Delta = \alpha\alpha + n\gamma\gamma$, $n\Delta = \beta\beta + n\delta\delta$ et $\alpha\beta + n\gamma\delta = 0$, unde jam patet formam ipsius Δ esse $\alpha\alpha + n\gamma\gamma$. Tum etiam erit $n\Delta = \beta\beta + n\delta\delta$ et $\alpha\beta + n\gamma\delta = 0$. Ex ultima fit $\frac{\beta}{\delta} = \frac{-n\gamma}{\alpha}$. Ponatur ergo

$$\delta = \alpha f \quad \text{et} \quad \beta = -n\gamma f, \quad \text{erit} \quad \beta\beta + n\delta\delta = nff(\alpha\alpha + n\gamma\gamma) = n\Delta, \quad \text{unde} \quad \Delta = ff(\alpha\alpha + n\gamma\gamma).$$

Cum igitur sit $\Delta = \alpha\alpha + n\gamma\gamma$, sequitur fore $f = \pm 1$. His valoribus fit

$$x = \alpha p \mp n\gamma q \quad \text{et} \quad y = \gamma p \pm \alpha q.$$

Hinc fit
$$xx + nyy = pp(\alpha\alpha + n\gamma\gamma) + nqq(\alpha\alpha + n\gamma\gamma) = (pp + nqq)(\alpha\alpha + n\gamma\gamma),$$
sicque quotus uti jam vidimus $\Delta = \alpha\alpha + n\gamma\gamma$.

A. m. T. III. p. 184.

8.

Theoremata demonstranda. I. Si fuerit $4na + bb$ numerus primus, erit semper hujus formae $xx - ayy$.

II. Si fuerit $4na - bb$ numerus primus, erit semper hujus formae $ayy - xx$.

A. m. T. II. p. 154.

9.

Theorema. Si numerus $mnff + gg$ divisorem habeat primum $p = \frac{maa + nbb}{\Delta}$, tum etiam quotus q, ex hac divisione ortus, erit quoque ejusdem formae scilicet $q = \frac{mcc + ndd}{\Delta}$.

Explicatio. Quaerantur primo duo numeri λ et μ, ut sit $\lambda a - \mu p = \pm 1$; deinde ut formula $mnff + gg$ divisorem admittat p, alteram litteram f pro lubitu accipere licet, tum vero altera g ita esse debet comparata, ut sit $g = n\lambda bf - \nu p$, quibus notatis cum sit $mnff + gg = pq$ existente $q = \frac{mcc + ndd}{\Delta}$, litterae c et d sequenti modo determinantur

$$c = n\mu bf - \nu a \quad \text{et} \quad d = m\mu af + \nu b - \lambda\Delta f.$$

A. m. T. II. p. 211.

b) *De divisoribus numerorum formae* $fa^n + gb^n$.

10.

(Lexell.)

Problema. Si formula $fa^n + gb^n$ divisorem habeat d, invenire infinitas alias similes formas $fx^n + gy^n$ per eundem numerum d divisibiles.

Solutio. Capiatur $x = ma \pm \mu d$, et $y = mb \pm \nu d$, et quaesito satisfiet; si enim μ et $\nu = 0$, res est manifesta; sin autem multipla ipsius d accedant, omnes termini post primos ex evolutione nati, per se sunt divisibiles per d.

Problema. Invenire omnes divisores primos formulae $x^4 + y^4$. Cum haec formula sit factor hujus $x^8 - y^8$, demonstratum est, omnes ejus divisores contineri in forma $8n + 1$, quod etiam hoc modo ostenditur: Cum formae $a^2 + b^2$ omnes divisores sint formae $4n + 1$, ponamus formulae $aa + bb$ divisorem primum esse $4n + 1 = d$; tum ergo etiam omnes formulae $xx + yy$ per eundem numerum erunt divisibiles sumendo $x^2 = ma \pm \mu d$, $y^2 = mb \pm \nu d$.

Pro nostro ergo casu hi ambo numeri debent esse quadrati. Pro priore sumto $\mu = 0$, hoc fiet si $m = app$, ut fiat $x = ap$. Superest ergo, ut et haec forma $y^2 = abpp \pm \nu d$ fiat quadratum, idque sive positivum sive negativum. Ponatur ergo $abpp \pm \nu d = \pm qq$ et res huc redit, ut $abpp \pm qq$ divisibile fiat per d, et quia statui potest $a^2 + b^2 = d$, quaeritur ergo quibus casibus formula $abpp \pm qq$ divisibilis fieri possit per d. Varios ergo casus evolvamus:

I. Sit $d = 5$, erit $a = 2$ et $b = 1$, unde formula $2pp \pm qq$ divisorem habere deberet 5, id quod fieri nequit, neque vero 5 continetur in forma $8n + 1$; atque hinc vicissim concludere possumus, neque $2pp + qq$, nec $2pp - qq$ unquam divisibile esse per 5.

II. Sit $d = 13$, erit $a = 2$ et $b = 3$, et nunc quaeritur an formula $6pp \pm qq$ divisibilis esse possit per 13, id quod negari debet, quia 13 non est formae $8n + 1$.

III. Sit $d = 17$, erit $a = 1$ et $b = 4$, nunc quaeritur an $4pp \pm qq$ divisibilis esse possit per 17, quod utique affirmandum, verum est etiam $17 = 8n + 1$.

IV. Sit $d = 29$ erit $a = 2$ et $b = 5$, et quaeritur an $10pp \pm qq$ divisibilis esse possit per 29, quod quia 29 non est $8n + 1$, negari debet.

Corollarium 1. Hic ergo distingui oportet duos casus, prouti existente b numero impari, numerus a fuerit vel impariter par, vel pariter par. Priori casu divisor d non erit formae $8n + 1$, sed formae $8n + 5$, ideoque hic casus est excludendus. Sit igitur

$$a = 4\alpha \pm 2 \quad \text{et} \quad b = 4\beta \pm 1, \quad \text{eritque} \quad aa + bb = 16(\alpha^2 + \beta^2) \pm 16\alpha \pm 8\beta + 5.$$

Ergo per talem divisorem nunquam divisibilis erit haec forma $(16\alpha\beta \pm 4(\alpha \pm 2\beta) \pm 2)pp \pm qq$. Per numerum ergo primum $16(\alpha^2 + \beta^2) + 16\alpha + 8\beta + 5$ talis formula $16\alpha\beta + 4(2\beta + \alpha) + 2$ nunquam est divisibilis.

Corollarium 2. Sin autem manente $b = 4\beta + 1$ (ubi β etiam negative capere licet) sit $a = 4\alpha$, erit $aa + bb = 16(\alpha\alpha + \beta\beta) + 8\beta + 1$, et nunc certi sumus, dari formulas $4\alpha(4\beta + 1)pp \pm qq$, quae divisorem habeant $16(\alpha\alpha + \beta\beta) + 8\beta + 1$.

Corollarium 3. Si igitur verum est, omnes numeros primos formae $8n + 1$ divisores esse posse formulae $x^4 + y^4$, sequitur nostram formulam $16(\alpha^2 + \beta^2) + 8\beta + 1$ omnes plane numeros $8n + 1$ in se continere siquidem fuerint primi. Aequemus ergo has formas et reperimus

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2) \pm \beta,$$

ubi n denotat omnes plane numeros saltem eos, qui faciunt $8n + 1$ primos:

0,	2,	8,	18,	32,	50,	72,	98
1,	4,	11,	22,	37,	56,	79,	106
1,	2,	7,	16,	29,	46,	67,	92

sive $2(\alpha^2+\beta^2)\pm\beta =$

0,	1,	3,	6,	10,	15,	21,	38,	36,	45,	55,	66,	78,	91,	105
2,	3,	5,	8,	12,	17,	23,	30,	38,	47,	57,	68,	80,	93,	107
8,	9,	11,	14,	18,	23,	29,	36,	44,	53,	63,	74,	86,	99	
18,	19,	21,	24,	28,	33,	39,	46,	54,	63,	73,	84,	96,	109	
32,	33,	35,	38,	42,	47,	53,	60,	68,	77,	87,	98			
50,	51,	53,	56,	60,	65,	71,	78,	86,	95					
71,	72,	74,	77,	81,	86,	92,	99							
98,	99													

Hic omnes numeri non occurrunt, sed excluduntur 4, 7, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 27, etc. at vero ex his omnibus $8n+1$ non fit primus.

Si igitur A denotet numerum impariter parem $4n+2$ et B numerum pariter parem sive $4n$, et C numerum imparem $2n+1$, tum haec duo habentur theoremata:

I. Per numerum primum A^2+C^2 neutra formula $ACpp\pm qq$ unquam dividi potest; neque etiam summa duorum biquadratorum, unde sequitur, si singula quadrata per A^2+C^2 dividantur, tum in residuis neque $+AC$, neque $-AC$ occurrere, sed certo esse non-residua.

II. Sin autem divisor primus fuerit B^2+C^2, tum semper datur formula $BCpp\pm qq$ per eum divisibilis, ac propterea etiam summa duorum biquadratorum, atque in residuis quadratorum, per eundem numerum primum B^2+C^2 divisorum, tam $+BC$, quam $-BC$ reperientur.

Problema. Invenire omnes divisores primos formulae fx^4+gy^4.

Cum omnes constent divisores formulae $faa+gbb$, qui sive in formula $f\alpha\alpha+g\beta\beta$, sive in hac $\alpha\alpha+fg\beta\beta$ continentur, sit quilibet eorum $=d$, per quem formula $faa+gbb$ sit divisibilis; tum sumto $X=ma\pm\alpha d$ et $Y=mb\pm\beta d$, ut formula fX^2+gY^2 etiam per d fiat divisibilis, jam reddatur primo X quadratum, quod fit si $m=app$; tum vero erit $Y=abpp\pm\beta d$, quod etiam quadratum reddi debet, quod sit $\pm qq$, et nunc oportet, ut $abpp\pm qq$ divisibile fiat per d, eritque $Y=\pm qq$ et $X=aapp$, quare sumto $x=ap$ et $y=q$ fiet fx^4+gy^4 per d divisibile. Huc ergo redit quaestio: quibus casibus formula $abpp\pm qq$ dividi queat per memoratum divisorem d, qui est vel $f\alpha\alpha+g\beta\beta$, vel $\alpha\alpha+fg\beta\beta$.

Exemplum 1. Sit $f=1$ et $g=2$, ideoque $d=\alpha\alpha+2\beta\beta$, qui numeri sunt vel $8n+1$, vel $8n+3$, quos valores percurramus. Sit

I. $d=3$, per quem formula $aa+2bb$ divisibilis fit; si $a=1$ et $b=1$, unde quaeritur an formula $pp\pm qq$ divisibilis fieri queat per 3, quod cum eveniat, etiam 3 erit divisor formulae x^4+2y^4.

II. Sit $d=11$, erit $a=3$ et $b=1$, hinc nostra formula $3pp\pm qq$ divisibilis per 11, at ipsius $3pp+qq$ divisores sunt formae $12n+1$, $12n+7$, formulae autem $3pp-qq$ divisores sunt vel $12n+1$, vel $12n-1$, ideoque postremus casus quaestioni satisfacit, ergo datur formula x^4+2y^4 per 11 divisibilis.

III. Sit $d=17$, $a=3$, $b=2$, ergo formula nostra per 17 divisibilis erit $6pp\pm qq$, at prior $6pp+qq$ non est divisibilis, neque etiam posterior, unde sequitur nullam formam x^4+2y^4 dividi posse per 17.

IV. Sit $d=19$, erit $a=1$ et $b=3$ et formula per 19 divisibilis erit $3pp\pm qq$, id quod fieri potest ponendo ex. causa $p=1$ et $q=4$, hinc $x=1$ et $y=4$, atque formula x^4+2y^4 erit divisibilis per 19.

V. Sit $d=41$, erit $a=3$ et $b=4$, et haec formula nostra per 41 divisibilis reddenda fit $12pp\pm qq$, sive haec $3pp\pm qq$, at 41 in nulla harum formularum $12n\pm1$, $12n+7$ continetur. Ergo non datur x^4+2y^4 per 41 divisibilis.

VI. Sit $d=43$, erit $a=5$ et $b=3$, hinc formula per 43 divisibilis $15pp\pm qq$, sive etiam $5pp\pm3qq$, id quod succedit, cum sit $43=3\cdot4^2-5\cdot1^2$, ergo datur forma x^4+2y^4 per 43 divisibilis. Si $x=ap=20$, $y=5$, sive $x=4$, $y=1$.

VII. Sit $d = 59$, erit $a = 3$ et $b = 5$, hinc formula $15pp \pm qq$, sive $5pp \pm 3qq$, ubi manifesto $15.2^2 - 1$, ergo $x = 6$, $y = 1$, et formula $x^4 + 2y^4$ per 59 divisibilis.

Corollarium 1. Videtur ergo, quoties fuerit $d = 8n + 3$, tum fore divisorem formae $x^4 + 2y^4$, nec non et hujus $abpp \pm qq$, at vero tum fiunt ambo numeri a et b impares; quoties ergo $aa + 2bb$ fuerit numerus primus, semper datur formula $abpp \pm qq$ per eum divisibilis, sive inter residua quadratorum reperietur vel $+ ab$, vel $- ab$.

Corollarium 2. Contra autem non omnes numeri $8n + 1$ excluduntur, quia numerus $113 = 3^4 + 2.2^4$.

VIII. Sit $d = 67$, $a = 7$, $b = 3$, formula $21pp \pm qq$, vel $7pp \pm 3qq$, $p = 5$, $q = 6$, vel $x = 35$, $y = 18$.

Exemplum 2. Sumatur $f = 1$ et $g = 3$, ut quaerantur divisores formulae $x^4 + 3y^4$ et divisor d erit $aa + 3bb$, erit ergo vel formae $12n + 1$, vel $12n + 7$.

I. Sit $d = 7$, erit $a = 2$ et $b = 1$, et formula $\frac{2pp \pm qq}{7}$, quod succedit quia $7 = 2.2^2 - 1$, unde $p = 2$, $q = 1$, $x = 4$, $y = 1$.

II. Sit $d = 13$, erit $a = 1$ et $b = 2$ et formula $\frac{2pp \pm qq}{13}$, quae est impossibilis.

III. Sit $d = 19$, erit $a = 4$ et $b = 1$ et formula $\frac{4pp \pm qq}{19}$, quae succedit: $p = 9$, $q = 1$, $x = 36$ et $y = 1$.

IV. Sit $d = 31$, erit $a = 2$ et $b = 3$ et formula $\frac{6pp \pm qq}{31}$, vel $\frac{3pp \pm 2qq}{31}$, $x = 18$, $y = 5$.

V. Sit $d = 37$, erit $a = 5$ et $b = 2$ et formula $\frac{10pp \pm qq}{37}$, vel $\frac{5pp \pm 2qq}{37}$, $p = 1$, $q = 8$, $x = 5$, $y = 8$.

VI. Sit $d = 43$, erit $a = 4$ et $b = 3$ et formula $\frac{12pp \pm qq}{43}$, vel $\frac{3pp \pm qq}{43}$, $x = 12$, $y = 8$, $x = 3$, $y = 2$.

Hic igitur maxime est mirandum, quod solus numerus 13 hic sit exclusus.

Problema superius de divisoribus $fx^4 + gy^4$ ita concinnius resolvitur:

Sit d divisor hujus formulae, qui necessario erit divisor talis formulae $fa^2 + gb^2$. Cum igitur hae duae formulae $faa + gbb$ et $fx^4 + gy^4$ habere debeant communem divisorem d, multiplicetur prior per x^4 et posterior per aa, horumque productorum differentia, quae est $gbbx^4 - gaay^4 = g(bx^2 - ay^2)(bx^2 + ay^2)$ etiam nunc erit divisibilis per d; unde si d sit numerus primus, per quem neque f, neque g divisibilis esse potest, ob

$$bbx^4 + aay^4 = (bx^2 + ay^2)(bx^2 - ay^2),$$

necesse est, ut horum factorum alter $bx^2 \pm ay^2$ sit divisibilis per d. Quare proposito numero primo d, qui dividat formulam $faa + gbb$, quoties assignari poterit formula $bxx \pm ayy$ per d divisibilis, tunc etiam formula $fx^4 + gy^4$ per eundem numerum d divisibilis erit.

Corollarium. Si datur formula $bxx \pm ayy$ per d divisibilis, etiam haec formula $zz \pm abyy$ divisibilis erit sumto $z = bx$; hoc autem eveniet, si inter residua quadratorum per d divisorum, occurrat numerus $\pm ab$.

Theorema. Quoties divisor primus d fuerit formae $4n - 1$, isque dividat formulam $faa + gbb$, tum semper dabitur formula $fx^4 + gy^4$ per d divisibilis.

Demonstratio. Cum divisor d sit formae $4n - 1$, sive $4n + 3$, si quadrata singula per eum dividantur, inter residua omnes plane numeri occurrent, sive signo plus, sive minus affecti, ergo etiam occurret numerus vel $+ ab$, vel $- ab$, dabitur ergo formula $zz \pm abyy$, ideoque etiam $bxx \pm ayy$ per d divisibilis.

Corollarium. At si d fuerit formae $4n + 1$, quia in residuis quadratorum non omnes numeri occurrunt, sed semissis adeo penitus excludatur, sive positive, sive negative capiantur, utique fieri potest, ut $\pm ab$ inter ea non occurrat et tum nulla dabitur formula $fx^4 + gy^4$ per d divisibilis. Observatum autem est (nondum vero demonstratum) omnes divisores formulae $axx \pm byy$ contineri in tali forma $4abn + kk$.

Hic jam duo occurrunt casus considerandi, prout vel ambo numeri a et b sunt impares, vel unus par et alter impar. Priori casu, semper possibile videtur, ut divisor d in hac forma contineatur; at vero si a fuerit numerus par, puta $2c$, forma divisorum erit $8bcn+kk$, quae reducitur ad formam $8n+1$. Quoties ergo hoc casu divisor d formam habet $8n+5$, tum casus est impossibilis, unde sequitur haec conclusio:

Quoties ergo $d=8n+5$ *fuerit divisor formulae* $faa+gbb$, *insuperque alteruter numerorum* a *et* b *par, tum nulla dabitur formula* fx^4+gy^4 *per* d *divisibilis.*

Theorema. Si numerus primus formae $4n+3$ dividat formulam $faa+gbb$, sive $aa+fgbb$, tum nulla dabitur formula $faa-gbb$, sive $aa-fgbb$ per d divisibilis.

Demonstratio. Si enim formula $aa+fgbb$ divisibilis sit per d, tum inter residua quadratorum reperietur $-fg$, at fg erit non-residuum, unde etiam nulla formula $aa-fgbb$ divisibilis erit per d.

Theorema. Si numerus primus formae $4n+1$ dividat formulam $faa+gbb$, sive $aa+fgbb$, tum etiam semper dabitur formula $faa-gbb$, sive $aa-fgbb$ divisibilis per d.

Demonstratio. Quia d dividit formulam $aa+fgbb$, in residuis quadratorum occurret $-fg$, ideoque ob formam $4n+1$, ibidem quoque occurret $+fg$, ergo dabitur formula $faa-gbb$, sive $aa-fgbb$ itidem per d divisibilis.

Corollarium. Quoties ergo evenit, ut formulae $faa+gbb$ divisor $d=4n+1$, non simul dividat formulam fx^4+gy^4, tum quia idem divisor est quoque formulae $faa-gbb$, forte erit divisor formulae fx^4-gy^4. Hoc autem secus evenit casu $f=1$, $g=2$ et $d=17$. Etsi enim $17=3^2+2.2^2$ et simul $17=2.3^2-1$, tamen neutra harum formularum x^4+2y^4 et x^4-2y^4 per 17 est divisibilis. Quo hoc accuratius scrutemur, consideremus residua ex divisione biquadratorum nata pro divisoribus $4n+1$, quae semper tantum numero n.

Divisor	Residua
5	1
13	1, 3, 9
17	+1, +4
	−1, −4
29	+1, +7, +20
	−4, −5, −6, −13
37	+1, +7, +9, +10, +12, +16
	−3, −4, −11
41	+1, +4, +10, +16, +18
	−1, −4, −10, −16, −18

Hinc ergo discimus, si divisor fuerit formae $8n+5$, tum numerum residuorum esse $2n+1$, ideoque imparem, unde nullum utroque signo occurrit, unde, si formula fx^4+gy^4 fuerit divisibilis, altera fx^4-gy^4 certe non erit divisibilis, quod autem vicissim non valet, quia numerus non-residuorum triplo major est, quam residuorum. Pro tali ergo divisoris forma vel neutra formularum $fx^4\pm gy^4$, vel unica saltem est divisibilis.

At si divisor fuerit formae $8n+1$, quodvis residuum utroque signo affectum occurrit, unde si una harum formularum fuerit divisibilis, etiam altera erit divisibilis, sive vel utraque, vel neutra divisibilis erit. Hinc sequitur *primo* si divisor primus $=8n+5$ dividat formulam $faa+gbb$, quo casu etiam dividet formulam $fa'a'-gb'b'$, illinc autem pro biquadratis formula $axx\pm byy$ per d fuerit divisibilis, tum certe formula $a'x^2\pm b'y^2$ non erit divisibilis. *Deinde* si fuerit $d=8n+1$ et dividat tam formulam $faa+gbb$ quam $fa'a'-gb'b'$, tum si formula $axx\pm byy$ fuerit divisibilis, certe etiam altera $a'xx\pm b'yy$ erit divisibilis, et si illa non erit, etiam haec non erit.

A. m. T. I. p. 218 — 223.

11.

(*N. Fuss 1.*)

Problema. Invenire omnes summas binorum biquadratorum x^4+y^4, quae sint divisibiles per datum numerum primum formae $8m+1=\Delta$.

Solutio. Cum haec formula x^n+y^n alios divisores non admittat nisi formae $2in+1$, sequitur formulam x^4+y^4 alios divisores habere non posse nisi formae $8i+1$. Tales autem numeri sunt

17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, 233, 241, 257, 281, 313, 337, 353, 401, etc.

qui numeri cum omnes sint summae duorum quadratorum, sit $\Delta=aa+bb$. Deinde cum alter numerorum x et y pro lubitu accipi queat, sumatur $x=a$, et pro y inveniendo quaeratur numerus quadratus formae $i\Delta\pm ab$, qui sit pp atque sumi poterit $y=p$, vel in genere $y=\alpha\Delta\pm p$. Cum enim sit $pp=i\Delta\pm ab$, neglecto multiplo ipsius Δ, quippe quod semper adjici potest, erit $y^4=p^4=aabb$, hinc ergo erit $x^4+y^4=aa(aa+bb)=aa\Delta$, ideoque x^4+y^4 divisorem habebit Δ. Idem valor $y=p$ valet quoque pro $x=b$; tum enim erit

$$x^4+y^4=bb(aa+bb)=bb\Delta.$$

Praeter p autem dabitur alius valor q, ut sit $p:q=a:b$, ideoque $q=\frac{bp}{a}$, sive $q=\frac{bp+i\Delta}{a}$; unde valor ipsius q semper erit integer. Sumto enim

$$x=a \text{ et } y=q=\frac{bp}{a}, \text{ erit } x^4+y^4=a^4+\frac{b^4p^4}{a^4} \text{ et ob } p^4=aabb, \text{ erit } x^4+y^4=\frac{a^6+b^6}{aa}.$$

At vero a^6+b^6 semper habet factorem $aa+bb=\Delta$. Eodem modo patet, sumto $x=b$ et $y=q$, etiam x^4+y^4 factorem Δ esse habiturum. Sumto igitur sive a sive b pro x, tum pro y sumi poterit sive p sive q; unde patet, si pro x capiatur vel na vel nb, tum pro y sumi debere vel np vel nq, qui valores, cum semper multiplum ipsius Δ auferre liceat, omnes hos valores infra $\frac{1}{2}\Delta$ deprimere licebit. Praeterea vero ad singulos hos valores quaevis multipla ipsius Δ addi possunt. Hoc modo pro quovis divisore Δ tabula construi poterit duabus constans columnis, quarum prior binos valores ipsius x, altera vero binos ipsius y exhibebit, id quod exemplis illustremus.

I. Sit $\Delta=17=4^2+1^2$, erit $a=1$ et $b=4$. Nunc igitur erit $pp=17n\pm4$, unde statim sumi potest $n=0$ et $p=2$ et ob $1:4=p:q$ erit $q=8$. Hinc

x	y
1, 4	2, 8
2, 8	4, 1
3, 5	6, 7

ubi, quia x et y sunt permutabiles, secundi valores, utpote in primis jam contenti, omitti possunt, ita ut tabula duos tantum casus involvit, scilicet pro x, 1, 4 et 3, 5, et pro y, 2, 8 et 6, 7. Ita v. gr. sumto $x=5$, sumi poterit $y=6$; quia igitur $5^4=625$ et $6^4=1296$, erit $x^4+y^4=1921=17.113$.

II. Sit $\Delta=41=4^2+5^2$, eritque $a=4$ et $b=5$, ideoque $pp=41n\pm20$, ideoque $n=4$ et $p=12$. Jam $4:5=12:q$, ergo $q=15$. Hinc pro divisore 41 nostra tabula erit:

x	y
1, 9	3, 14
2, 18	6, 13
4, 5	12, 15
7, 19	16, 20
8, 10	11, 17

Ita sumto $x=1$ et $y=3$, erit $x^4+y^4=82=41.2$.

Simili modo tabulam construximus pro sequentibus.

$\Delta = 73$

x	y
1, 27	10, 22
5, 11	23, 36
2, 19	20, 29
3, 8	30, 7
4, 35	33, 15
6, 16	13, 14
9, 24	17, 21
12, 32	26, 28
18, 25	34, 31

$\Delta = 89$

x	y
1, 34	12, 37
2, 21	15, 24
3, 13	22, 36
4, 42	30, 41
5, 8	7, 29
6, 26	17, 44
9, 39	19, 23
10, 16	14, 31
11, 18	38, 43
20, 32	27, 28
25, 40	33, 35

$\Delta = 97$

x	y
1, 22	33, 47
2, 44	3, 31
4, 9	6, 35
5, 13	29, 41
7, 40	37, 38
8, 18	12, 27
10, 26	15, 39
11, 48	25, 32
14, 17	21, 23
16, 36	24, 43
19, 30	20, 45
28, 34	42, 46

Sit $\Delta = 89$ sumto $x = 5$ et $y = 7$, erit $x^4 + y^4 = 3026 = 89 . 34$.

Cum hae tabulae facillime ex positione litterarum a, b, et p, q construantur, istam positionem pro singulis divisoribus Δ hic apponamus:

Δ	a, b	p, q	Δ	a, b	p, q	Δ	a, b	p, q	Δ	a, b	p, q
17	1, 4	2, 8	193	7, 12	63, 85	353	8, 17	131, 146	569	13, 20	150, 187
41	4, 5	12, 15	233	8, 13	77, 96	401	1, 20	45, 98	577	1, 24	152, 186
73	3, 8	7, 30	241	4, 15	32, 120	409	3, 20	39, 198	593	8, 23	121, 171
89	5, 8	7, 29	257	1, 16	4, 64	433	12, 17	44, 82	601	5, 24	214, 295
97	4, 9	6, 35	281	5, 16	19, 117	449	7, 20	44, 195	617	16, 19	173, 244
113	7, 8	13, 31	313	12, 13	16, 65	457	4, 21	86, 223	641	4, 25	10, 258
137	4, 11	27, 40	337	9, 16	12, 91	521	11, 20	48, 182	673	12, 23	95, 126

Hic igitur praecipuum negotium in inventione quadrati $pp = n\Delta \pm ab$ consistit, quod autem sequenti modo haud difficulter praestabitur. Cum enim semper dentur numeri p et q, minores quam $\frac{1}{2}\Delta$, eorum complementa etiam erunt $< \Delta$, semper ergo dantur quatuor tales numeri minores quam Δ, quorum duo erunt pares et duo impares, atque cognito uno, reliqui tres facile inveniuntur.

Quaeramus igitur numerum imparem pro p et cum sit $pp = n\Delta \pm ab$, tum vero $pp < \Delta\Delta$, singulos numeros n tentando non ultra $n = \Delta$ progredi opus est. Deinde, quia $\Delta = aa + bb = 8m + 1$, numerorum a et b alter erit pariter par, alter vero impar, unde productum ab habebit vel formam $8i + 4$, vel $8i$. Pro priore casu, quo $ab = 8i + 4$, quia Δ est $8\alpha + 1$, quadrata autem imparia formam habent $8i + 1$, ut talis forma oriatur, sumi debet $n = 5$, vel $n = 8\alpha + 5$, sicque casuum examinandorum numerus octies erit minor. Pro altero casu, quo $ab = 8m$, numeri pro n sumendi erunt $1, 9, 17 \ldots 8i + 1$. Inter hos autem numeri etiam statim excludi possunt ii, qui desinunt in 3 vel 7, tum etiam ii, qui sunt formae $3i - 1$. Praeterea vero etiam ipsam formam $pp = n\Delta \pm ab$ in alias similes transformare licet. Si enim fuerit $ab + \alpha\Delta = ffA$, erit $pp = ff(n\Delta \pm A)$; tum vero si fuerit $\alpha\Delta + A = ggB$, erit etiam $pp = ffgg(n\Delta \pm B)$ et ita porro. Inter quas plurimas formas plerumque casus sponte se produnt, quibus quadrata emergunt. Ex his autem egregia theoremata deduci possunt:

I. Si fuerit $\Delta = aa + bb = 8m + 1$, haec formula $n\Delta \pm ab$ semper quadratum reddi potest.

II. Si fuerit $\Delta = aa + bb = 8m + 5$, tum ista formula $n\Delta \pm ab$ nunquam quadratum fieri potest. Ita si $\Delta = 5$, ob $a = 2$ et $b = 1$, haec forma $5n \pm 2$ nunquam esse potest quadratum, quod per se constat.

Deinde sumto $a=2$, $b=3$ et $\Delta=13$, haec forma $13n\pm6$ nunquam quadratum esse potest. Item si $\Delta=29$, ob $a=2$, $b=5$, haec forma $29m\pm10$ nunquam fit quadratum.

Alia Solutio problematis praecedentis. Sit $8m+1=aa+bb=\Delta$ esseque oportet

$$x^4+y^4=(aa+bb)(pp+qq).$$

Jam sit proxime $\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}$, ita ut sit $a\beta-b\alpha=\pm1$. Sit nunc $x=c$ et sumatur $p=bf\Delta+\beta cc$ et $q=af\Delta+\alpha cc$, et cum sit $xx=ap-bq$ et $yy=aq+bp$, erit $x^4+y^4=(aa+bb)(pp+qq)$, erit itaque $xx=(a\beta-b\alpha)cc=cc$ at $yy=(aa+bb)f\Delta+(a\alpha+b\beta)cc$, quod ergo esse debet quadratum. Sit nunc $cc=n\Delta+d$, fiet $yy=i\Delta\pm(a\alpha+b\beta)d$.

Exemplum 1. Sit $aa+bb=41=\Delta$, erit $a=5$ et $b=4$, hinc $\frac{5}{4}=\frac{\alpha}{\beta}$, proxime hinc $\alpha=1$ et $\beta=1$. Sumatur porro $c=1$, eritque $d=1$, ergo $yy=41i\pm9=\square$, unde sumto $i=0$, erit $y=3$ et $x=1$, eritque $x^4+y^4=82=2.41$.

Exemplum 2. Sit $\Delta=601$, erit $a=24$ et $b=5$, tum vero $\alpha=5$ et $\beta=1$. Sumto ergo $x=1$, erit $d=1$ et $yy=601i\pm125$, hinc sumto $i=6$, erit $y=59$.

Jam x pro lubitu sumi potest, verbi gr. $x=c$, erit $y=59c\pm601i$, unde omnes valores redigi possunt infra 300.

A. m. T. III. p. 171—174.

12.

De divisoribus primis formae a^4+2b^4.

Primo patet hanc formam alios divisores habere non posse, nisi qui dividant formam a^2+2b^2, qui omnes continentur vel in hac forma $8n+1$, vel in hac $8n+3$. Ac primo quidem omnes numeri primi hujus formae $8n+3$ possunt esse divisores cujuspiam numeri formae a^4+2b^4. Longe secus autem res se habet de altera forma $8n+1$. Non enim omnes numeri primi in hac forma contenti divisores esse possunt formae a^4+2b^4, sed tantum sequentes: 73, 89, 113, 233, 257, 281, 337, 353, 577, etc. Hinc ergo excluduntur hi numeri ejusdem formae: 17, 41, 97, 137, 193, 241, 313, 401, 409, 433, 449, 457, 569, etc., neque tamen ulla ratio patet, qua has duas species numerorum formae $8n+1$ a se invicem distinguere liceat.

Ad divisores formae a^4+2b^4 supra allatos et in formula $8n+1$ contentos insuper accedunt 601 et 617. Est enim 601 divisor ipsius $14^4+2.5^4$ et 617 divisor ipsius $16^4+2.7^4$.

A. m. T. III. p. 181. 182.

13.

Problema. Invenire exponentem e, ut formula a^e-b^e per datum numerum Δ fiat divisibilis, si quidem numeri a et b sint primi ad Δ.

Solutio. Sint p, q, r, s numeri primi, et considerentur sequentes casus

si $\Delta=p$,	erit $e=p-1$
» $\Delta=p^2$	» $e=p(p-1)$
» $\Delta=p^3$	» $e=p^2(p-1)$
. . . .	. . . .
» $\Delta=p^n$	» $e=p^{n-1}(p-1)$
» $\Delta=pq$	» $e=(p-1)(q-1)$
» $\Delta=pqr$	» $e=(p-1)(q-1)(r-1)$
» $\Delta=p^\lambda q^\mu r^\nu$	» $e=p^{\lambda-1}(p-1)q^{\mu-1}(q-1)r^{\nu-1}(r-1)$.

Corollarium 1. Hinc si loco a scribatur a^α et b^β loco b, etiam haec formula $a^{\alpha e}-b^{\beta e}$ erit per Δ divisibilis.

Corollarium 2. Hinc si exponens e divisorem habeat n, ut sit $e=dn$, tum semper dari poterit forma x^n-y^n per Δ divisibilis. Cum enim $a^{dn}-b^{dn}$ sit divisibilis, sumatur $x=a^d$ et $y=b^d$, vel etiam $x=a^d\pm\alpha\Delta$ et $y=b^d\pm\beta\Delta$, vel adhuc generalius $x=fa^d\pm\alpha\Delta$ et $y=fb^d\pm\beta\Delta$.

NB. In his formulis, ubi productum $(p-1)(q-1)(r-1)$ occurrit, sufficit ejus loco minimum commune dividuum numerorum $p-1$, $q-1$, $r-1$, scribere.

Quoniam formula x^n-y^n praeter $x-y$ nullos habet divisores, nisi in forma $\lambda n+1$ contentos, sic casu $n=5$ formae x^5-y^5, praeter $x-y$, divisores sunt $5\lambda+1$ hoc est: 11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, etc. Si ergo proponatur formula x^5-1, eaque casu $x=a$ divisorem habeat $5\lambda+1$, eundem divisorem habebit casibus $x=a^2$, $x=a^3$, $x=a^4$, etc., sicque ex uno casu reliqui omnes deduci possunt, cum sit

$$x=a^\mu\pm M(5\lambda+1),$$

unde sequens tabula est confecta:

Div. pr. p.	Valores x	generatim
11	$1-\ 2+\ 4+\ 3+\ 5+$ etc.	$(-2)^\mu\pm 11M$
31	$1+\ 2+\ 4+\ 8+\ 16+$ etc.	$(+2)^\mu\pm 31M$
41	$1-\ 4+\ 16+\ 18+\ 10+$ etc.	$(-4)^\mu\pm 41M$
61	$1-\ 3+\ 9-\ 27+\ 20+$ etc.	$(-3)^\mu\pm 61M$
71	$1+\ 5+\ 25-\ 17-\ 14+$ etc.	$(+5)^\mu\pm 71M$
101	$1-\ 6+\ 36-\ 14-\ 17+$ etc.	$(-6)^\mu\pm 101M$
131	$1+\ 53+\ 58+\ 61-\ 42+$ etc.	$(-42)^\mu\pm 131M$
(11^2) 121	$1+\ 3+\ 9+\ 27+\ 81+$ etc.	$(+3)^\mu\pm 121M$
(11^3) 1331	$1-161+632-596+124+$ etc.	$(+124)^\mu\pm 1331M$

minimus autem valor ipsius x ex proprietate supra allata reperitur. Ita si divisor $=31$, quia $a^{30}-1$ divisorem habet 31, sumatur $x=a^6$, fiet x^5-1. Sumatur $a=2$, erit $x=64\pm 2.31$, unde minimus $=2$. Ita si $p=101$, quia $a^{100}-1$ divisibile per 101, sumatur $x^5=a^{100}$, sive $x=a^{20}\pm 101M$.

Ut formula x^6+y^6 divisibilis fiat per 37, numeri x et y ex sequenti schemate:

$$x\begin{cases}1, & 10, & 11\\ 2, & 17, & 15\\ 3, & 7, & 4\end{cases}\qquad y\begin{cases}8, & 6, & 14\\ 16, & 12, & 9\\ 13, & 18, & 5\end{cases}$$

scilicet ex eadem linea horizontali sumi debent.

At ut x^6+y^6 divisibile fiat per 61, x et y ex sequenti schemate sumuntur

$$x\begin{cases}1, & 13, & 14\\ 2, & 26, & 28\\ 4, & 9, & 5\\ 7, & 30, & 24\\ 8, & 18, & 10\end{cases}\qquad y\begin{cases}11, & 21, & 32\\ 22, & 19, & 3\\ 17, & 23, & 6\\ 16, & 25, & 20\\ 27, & 15, & 12\end{cases}$$

singulis autem his numeris adjici intelligenda est $\pm 61M$. Hinc casus simplicissimus est 2^6+3^6. Singuli autem hi terniones in unica forma comprehendi possunt, quae simplicissima est $4n$, $5n$, $9n$, vel in hac $1n$, $13n$, $14n$.

Problema. Ut formula x^6-1 divisibilis fiat per divisorem idoneum Δ, valores ipsius x definire.

Solutio. Divisor Δ necessario debet contineri in hac formula $\Delta=\frac{a^3\pm 1}{a\pm 1}$, cujus factor quicunque dabit valorem idoneum pro Δ; tum autem tres habebuntur valores principales pro x, qui sunt 1, $\pm a$, $\pm aa$, quibus adjici potest $\pm M\Delta$. Ita si sumatur $a=2$, erit $\Delta=\frac{8\pm 1}{2\pm 1}$, ideoque vel $\Delta=3$, vel $\Delta=7$, et tum erit $x=1, 2, 4$. Si $a=3$, erit $\Delta=\frac{27\pm 1}{3\pm 1}$, ideoque vel $\Delta=7$, vel $\Delta=13$, eritque $x=1, 3, 9$. Si $a=4$, erit $\Delta=\frac{64\pm 1}{4\pm 1}$,

ideoque vel $\Delta = 13$, vel $\Delta = 21 = 3.7$, tum $x = 1, 4, 16$. Si $a = 5$, erit $\Delta = \frac{125 \pm 1}{5 \pm 1}$, ideoque $\Delta = 21$, vel $\Delta = 31$, $x = 1, 5, 25$, etc.

Problema. Ut formula $x^{10} - 1$ divisibilis fiat per Δ, valores ipsius x assignare.

Solutio. Hic debet esse $\Delta = \frac{a^5 \pm 1}{a \pm 1}$, ac tum quinque habentur valores principales pro x, scilicet $1, a, aa, a^3, a^4$, quibus adjici potest $M\Delta$. Sic sumto $a = 2$, erit $\Delta = \frac{32 \pm 1}{2 \pm 1}$, vel $\Delta = 11$, vel $\Delta = 31$, eritque $x = 1, 2, 4, 8, 16$. Si $a = 3$, erit $\Delta = \frac{243 \pm 1}{3 \pm 1}$, ideoque vel $\Delta = 61$, vel $\Delta = 121$, hinc $x = 1, 3, 9, 27, 81$. Si $a = 4$, erit $\Delta = \frac{1024 \pm 1}{4 \pm 1}$, vel $\Delta = 205$, vel $\Delta = 341 = 11.31$ et $x = 1, 4, 16, 64, 256$. Si $a = 5$, erit $\Delta = \frac{3125 \pm 1}{5 \pm 1}$, ideoque vel $\Delta = 521$, vel $\Delta = 781 = 11.71$, $x = 1, 5, 25, 125, 625$, etc.

NB. Omnes divisores primi hic sunt formae $10n + 1$. Dato ergo tali divisore, veluti 131, quaeri debet numerus a, ut $a^5 \pm 1$ divisionem admittat per 131, quod hoc casu non evenit, nisi sumatur vel $a = 42$, vel $a = 53$, vel $a = 58$, vel $a = 70$; tum enim habebitur $x = 1, 42, 70, 58, 53$.

Quando autem divisor Δ datur, in forma $10n + 1$ contentus, valor litterae a hoc modo eruetur. Cum Δ debeat esse divisor formae $a^5 - 1$, capiatur $a = b^n$, erit $a^5 = b^{5n}$, semper autem est $b^{10n} - 1$ divisibile per $10n + 1$, ideoque vel $b^{5n} + 1$, vel $b^{5n} - 1$, quocirca sumi debet $a = b^n$. Ita pro casu $\Delta = 131$ est $n = 13$, ideoque $a = b^{13}$; sumto ergo $b = 2$, erit $b^{13} = 8192$, quod divisum per 131 relinquit 61, et valores ipsius x erunt $1, 61, 61^2, 61^3, 61^4$. Est vero $61^2 = 3721$, quod dat 53, et 61.53 dat 42, et 61.42 dat 58. Sicque $x = 1, 61, 53, 42, 58$. Eodem modo si proponatur $\Delta = 151$, erit $n = 15$ et $a = 19$, $a^2 = 59$, $a^3 = 64$, $a^4 = 8$.

Ut formula $x^8 + y^8$ divisibilis fiat per 97, numeri x et y ex sequenti tabula desumantur

x				y			
1,	33,	22,	47	8,	27,	18,	12
2,	31,	44,	3	16,	43,	36,	24
4,	35,	9,	6	32,	11,	25,	48
5,	29,	13,	41	40,	38,	7,	37
10,	39,	26,	15	17,	21,	14,	23
46,	13,	42,	28	29,	19,	45,	30

ita casus simplicissimus est $5^8 + 7^8$.

Ut formula $x^{10} - 1$ dividi queat per 11^2, valores ipsius x erunt

$$1, \quad 124, \quad 596, \quad 699, \quad 161.$$

Cum enim $3^5 - 1 = 2.11^2$, ponatur $x = 3 + 11^2 y$, eritque $x^5 - 1 = 2.11^2 + 5.3^4.11^2 y +$ etc. quod divisum per 11^2 dat $\frac{x^5 - 1}{11^2} = 2 + 5.3^4 y +$ etc. Tantum ergo y ita sumatur, ut $2 + 5.81y$ divisibile sit per 11, sive $2 - 2y$, vel $1 - y$. Sumatur $y = -10$, erit $x = 1207 = 124$.

A. m. T. II. p. 162—164.

---

c) *De numeris formae* $x^p \pm 1$.

12.

(*Lexell.*)

Problema. Invenire numerum formae $2^n + 1$, qui habeat datum divisorem.

Solutio. Divisor repraesentetur per simplices potestates binarii, et quotus quaeratur sequenti modo per partes; ubi tenendum est, quoniam tandem omnes minores potestates binarii in producto excludi debent, si ex aliquot partibus quoti prodierit productum $1 + 2^\alpha +$ etc. tum sequentem quoti partem esse debere 2^α, deinde tantum notetur esse $2^\alpha + 2^\alpha = 2^{\alpha+1}$.

Exemplum I. Sit divisor $=1+2^7+2^9$, ac prima pars quoti erit 1, et operatio sequenti modo instituetur:

Partes quoti	Productum
1	$1+2^7+2^9$
2^7	$2^7+2^{14}+2^{16}+2^8$
2^8	$2^8+2^{15}+2^{17}+2^{10}$
2^{10}	$2^{10}+2^{17}+2^{19}+2^{11}+2^{15}$
2^{11}	$2^{11}+2^{18}+2^{20}+2^{12}+2^{21}$
2^{12}	$2^{12}+2^{19}+2^{21}+2^{13}+2^{22}$
2^{13}	$2^{13}+2^{20}+2^{22}+2^{17}+2^{23}$
2^{17}	$2^{17}+2^{24}+2^{26}+2^{18}$
2^{18}	$2^{18}+2^{25}+2^{27}+2^{21}$
2^{21}	$2^{21}+2^{28}+2^{30}+2^{22}$
2^{22}	$2^{22}+2^{29}+2^{31}+2^{32}$

ergo forma est $2^{32}+1$, cujus divisor est $1+2^7+2^9=641$ et

quotus $=1+2^7+2^8+2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{13}+2^{17}+2^{18}+2^{21}+2^{22}$.

Exemplum II. Sit divisor $73=1+2^3+2^6$.

Partes quoti	Productum
1	$1+2^3+2^6$
2^3	$2^3+2^6+2^9+2^4+2^7$
2^4	$2^4+2^7+2^{10}+2^5+2^8$
2^5	$2^5+2^8+2^{11}+2^6+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}$
2^6	$2^6+2^9+2^{12}+2^7+2^{13}$
2^7	$2^7+2^{10}+2^{13}+2^8+2^{14}$
2^8	$2^8+2^{11}+2^{14}+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{15}$
2^{12}	$2^{12}+2^{15}+2^{18}+2^{13}+2^{16}$
2^{13}	$2^{13}+2^{16}+2^{19}+2^{14}+2^{17}$
2^{14}	$2^{14}+2^{17}+2^{20}+2^{15}+2^{18}+2^{19}+2^{20}+2^{21}$
2^{15}	$2^{15}+2^{18}+2^{21}+2^{16}+2^{22}$
2^{16}	$2^{16}+2^{19}+2^{22}+2^{17}+2^{23}$
2^{17}	$2^{17}+2^{20}+2^{23}+2^{18}+2^{19}+2^{20}+2^{21}+2^{24}$
2^{21}	$2^{21}+2^{24}+2^{27}+2^{22}+2^{25}$
2^{22}	$2^{22}+2^{25}+2^{28}+2^{23}+2^{26}$
2^{23}	$2^{23}+2^{26}+2^{29}+2^{24}+2^{27}+2^{28}+2^{29}+2^{30}$
2^{24}	$2^{24}+2^{27}+2^{30}+2^{25}+2^{31}$
2^{25}	$2^{25}+2^{28}+2^{31}+2^{26}+2^{32}$
2^{26}	$2^{26}+2^{29}+2^{32}+2^{27}+2^{28}+2^{29}+2^{30}+2^{33}$
2^{30}	$2^{30}+2^{33}+2^{36}+2^{31}+2^{34}$

Plane non datur talis forma per 73 divisibilis.

Exemplum III. Sit divisor $41=1+2^3+2^5$, erunt

partes quoti	productum
1	$1+2^3+2^5$
2^3	$2^3+2^6+2^8+2^4$
2^4	$2^4+2^7+2^9+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$

ergo forma $1+2^{10}$ divisibilis est per 41 et quotus erit $1+2^3+2^4=25$.

Exemplum IV. Sit divisor $11 = 1 + 2^1 + 2^3$, erunt

partes quoti	productum
1	$1 + {}_*2^1 + {}_*2^3$
2^1	${}_*2^1 + {}_*2^2 + {}_*2^4 + {}_*2^2 + {}_*2^3 + {}_*2^4 + 2^5$

unde $1 + 2^5 = 11\,(1 + 2)$.

Exemplum V. Sit divisor $13 = 1 + 2^2 + 2^3$, erunt

partes quoti	productum
1	$1 + {}_*2^2 + {}_*2^3$
2^2	${}_*2^2 + {}_*2^4 + {}_*2^5 + {}_*2^3 + {}_*2^4 + {}_*2^5 + 2^6$

unde $2^6 + 1 = 13\,(1 + 2^2)$.

Exemplum VI. Sit divisor $7 = 1 + 2 + 2^2$, erunt

partes quoti	productum
1	$1 + {}_*2 + {}_*2^2$
2^1	${}_*2 + {}_*2^2 + {}_*2^3 + {}_*2^2 + {}_*2^3 + {}_*2^4$
2^3	${}_*2^2 + {}_*2^3 + {}_*2^4 + {}_*2^3 + {}_*2^4 + {}_*2^5$
2^4	${}_*2^4 + {}_*2^5 + {}_*2^6 + {}_*2^5 + {}_*2^6 + {}_*2^7$
2^5	${}_*2^5 + {}_*2^6 + {}_*2^7 + {}_*2^6 + {}_*2^7 + {}_*2^8$
2^7	${}_*2^7 + {}_*2^8 + {}_*2^9 + {}_*2^8 + {}_*2^9 + {}_*2^{10}$
2^8	${}_*2^8 + {}_*2^9 + {}_*2^{10} + {}_*2^9 + 2^{10} + 2^{11}$
2^{10}	etc.

Pro hoc ergo divisore non datur forma binomialis $1 + 2^n$; dantur autem trinomiales:

$1 + 2 + 2^2$, $1 + 2^2 + 2^4$, $1 + 2^4 + 2^5$, $1 + 2^5 + 2^7$, $1 + 2^7 + 2^8$, $1 + 2^8 + 2^{10}$, $1 + 2^{10} + 2^{11}$.

(*Krafft.*)

Problema. Invenire numerum formae $2^n - 1$, qui habeat datum divisorem.

Solutio. Primo notetur esse

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^{n-1},$$

sicque omnes potestates ab unitate usque ad maximam occurrere debent. Si igitur, ut ante, quotus per partes quaeratur; in producto ex aliquot partibus orto notetur minima potestas, quae adhuc deficit, eaque ipsa erit nova pars quoti.

Exemplum I. Sit divisor $23 = 1 + 2 + 2^2 + 2^4$, erunt

partes quoti	productum
1	$1 + 2 + 2^2 + {}_*2^4$
2^3	$2^3 + {}_*2^4 + {}_*2^5 + {}_*2^7 + {}_*2^5 + {}_*2^6$
2^4	$2^4 + 2^5 + {}_*2^6 + {}_*2^8 + {}_*2^7 + {}_*2^8 + 2^9$
2^6	$2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10}$

unde erit $n = 11$ sicque $2^{11} - 1$ divisibile est per 23 quoto existente

$$1 + 2^3 + 2^4 + 2^6 = 89.$$

Nota. Forma numerorum perfectorum est $2^{n-1}(2^n - 1)$, quoties fuerit factor posterior $2^n - 1$ numerus primus.

Exemplum II. Sit divisor $47 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^5$, erunt

partes quoti	productum
1	$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^5$
2^4	$2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^9 + 2^6 + 2^7 + 2^8$
2^5	$2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10} + 2^9 + 2^{10} + 2^{11}$
2^8	$2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{13} + 2^{12}$
2^{11}	$2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15}$
2^{12}	$2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{17} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18}$
2^{13}	$2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{18} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{19}$
2^{15}	$2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21}$
2^{17}	$2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{22}$

ergo $n = 23$ et $2^{23} - 1$ divisibile est per 47, quoto existente

$$2^{17} + 2^{15} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{11} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 1 = 178481.$$

(*Lexell.*)

Verum haec omnia multo facilius atque adeo multo generalius per sequentem methodum expediri possunt:

Problema. Invenire exponentem x, ut formula $2^x - a$ datum habeat divisorem $= p$.

Solutio. Quaeritur ergo potestas binarii 2^x, quae per numerum p divisa relinquat residuum $= a$; notetur autem pro residuo a in genere scribi posse $a + \lambda p$, loco a igitur sumatur $a \pm p$, qui numerus cum sit par ac fortasse per majorem binarii potestatem divisibilis, ponatur $a \pm p = 2^\alpha b$, atque potestas $2^{x-\alpha}$ dabit residuum b, cujus loco sumatur iterum $b \pm p$, quod sit $= 2^\beta c$, sicque potestas $2^{x-\alpha-\beta}$ residuum dabit c, sive $c \pm p$, quod sit $= 2^\gamma d$, sicque potestas $2^{x-\alpha-\beta-\gamma}$ residuum dabit d, atque hoc modo eo usque procedatur, donec ad residuum perveniatur $= 1$, quod cum sit residuum potestatis 2^0, evidens est ultimum exponentem

$$x - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \text{etc. esse debere} = 0,$$

consequenter habebitur

$$x = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Tota haec operatio sequenti modo commode disponetur: Pro divisore $= p$:

potestates	residua	sive
2^x	a	$a \pm p = 2^\alpha b$
$2^{x-\alpha}$	b	$b \pm p = 2^\beta c$
$2^{x-\alpha-\beta}$	c	$c \pm p = 2^\gamma d$
$2^{x-\alpha-\beta-\gamma}$	d	$d \pm p = 2^\delta e$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$2^{x-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\cdots}$	$+1$	$x = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$

Exemplum I. Quaeratur formula $2^x + 1$, quae divisorem habeat 641. Pro hoc divisore

potestates	residua	sive
2^x	$a = -1$	$640 = 128.5 = 2^7.5$
2^{x-7}	5	$-636 = -2^2.159$
2^{x-9}	-159	$-800 = -2^5.25$
2^{x-14}	-25	$+616 = +2^3.77$
2^{x-17}	$+77$	$-564 = -2^2.141$
2^{x-19}	-141	$+500 = +2^2.125$
2^{x-21}	$+125$	$-516 = -2^2.129$
2^{x-23}	-129	$512 = +2^9.1$
2^{x-32}	1	ergo $x = 32$

Exemplum II. Quaerere formulam 2^x+1, quae divisorem habeat 29. Pro hoc divisore

potestates	residua	sive
2^x	-1	$-1+29=28=2^2.7$
2^{x-2}	7	$+36=2^2.9$
2^{x-4}	9	$-20=-2^2.5$
2^{x-6}	-5	$24=2^3.3$
2^{x-9}	3	$32=2^5.1$
2^{x-14}	1	$x=14.$

Exemplum III. Quaerere formulam 2^x+1, quae divisorem habeat 73. Pro divisore 73

potestates	residua	sive
2^x	-1	$2^3.9$
2^{x-3}	$+9$	$-64=-2^6.1$
2^{x-9}	-1	$72=2^3.9$
2^{x-12}	9	$-64=-2^6.1$
2^{x-18}	-1	

unde apparet hanc quaestionem esse impossibilem.

Exemplum IV. Quaerere formulam 2^x-1, quae habeat divisorem 23:

potestates	residua	sive
2^x	1	$24=2^3.3$
2^{x-3}	3	$-20=-2^2.5$
2^{x-5}	-5	$-28=-2^2.7$
2^{x-7}	-7	$16=2^4.1$
2^{x-11}	1	ergo $x=11.$

Exemplum V. Quaerere formam 2^x-3, quae habeat divisorem 19:

potestates	residua	sive
2^x	3	$-16=-2^4.1$
2^{x-4}	-1	$-20=-2^2.5$
2^{x-6}	-5	$-24=-2^3.3$
2^{x-9}	-3	$16=2^4.1$
2^{x-13}	1	$x=13.$

Problema generalius. Invenire exponentem x, ut formula AK^x-a datum habeat divisorem $=p$.

Solutio. Numerus ergo AK^x residuum dare debet $=a$, cui aequivalet $a\pm\lambda p=K^\alpha b$, unde numerus $AK^{x-\alpha}$ residuum dare debet b, sive $b\pm\lambda p=K^\beta c$, sicque numerus $AK^{x-\alpha-\beta}$ producet numerum c, sicque hoc modo procedendo, donec perveniatur ad numerum A, quod quia nascitur ex AK^0, manifestum est esse debere

$$x=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}$$

Exemplum. Quaerere formulam 5^x-1, quae divisorem habeat 17.

potestates	residua	sive	potestates	residua	sive
5^x	1	$35=5.7$	5^{x-5}	-6	$-40=-5.8$
5^{x-1}	7	$-10=-5.2$	5^{x-6}	-8	$-25=-5^2$
5^{x-2}	-2	$15=5.3$	5^{x-8}	-1	
5^{x-3}	3	$20=5.4$	5^{x-16}	1	$x=16$
5^{x-4}	4	$-30=-5.6$			

Problema. Invenire exponentem x, ut formula $2^{2x}+2^x+1$ datum habeat divisorem p.

Solutio. Cum ergo formula $2^{2x}+2^x$ residuum habere debeat -1, sive $-1+\lambda p$, ponamus potestatem 2^x habere residuum r, atque ejus quadratum 2^{2x} residuum habebit rr, ideoque illius formae residuum erit $rr+r$. Quaeratur ergo r, ut fiat

$$rr+r=-1+\lambda p, \quad \text{sive} \quad 4rr+4r+1=(2r+1)^2=4\lambda p-3, \quad \text{unde} \quad 2r+1=\sqrt{(4\lambda p-3)};$$

λ igitur ita sumi debet, ut $4\lambda p-3$ sit quadratum. Invento autem r quaeratur potestas 2^x residuum habens r, quod est problema superius.

Sit verbi gratia divisor $p=19$ et quadratum esse debet $76\lambda-3$, quod fit si $\lambda=3$, ergo $2r+1=\pm 15$, consequenter vel $r=+7$, vel $r=-8$.

I. Pro $r=+7$	2^x	resid. $+7$	$-12=-2^2.3$
	2^{x-2}	-3	$16=2^4$
	2^{x-6}	1	hinc $x=6$

ideoque $2^{12}+2^6+1$ divisibile per 19.

II. Pro $r=-8$	2^x	resid. -8	$-2^3.1$
	2^{x-3}	-1	$-20=-2^2.5$
	2^{x-5}	-5	$-24=-2^3.3$
	2^{x-8}	-3	$16=2^4$
	2^{x-12}	1	$x=12$

ideoque $2^{24}+2^{12}+1$ divisibile per 19.

A. m. T. I. p. 143—149.

15.

(J. A. Euler.)

Cum sit $a^{2p}-1$ divisibile per $2p+1$, si $2p+1$ fuerit numerus primus, tum vel a^p-1, vel a^p+1 per eum dividi poterit. Duplicis ergo generis sunt potestates a^p, pronti vel formula a^p-1, vel a^p+1 fuerit divisibilis per $2p+1$.

Theorema. Cujus generis fuerit potestas a^p ejusdem generis quoque erunt omnes istae

$$a^{2a+p}, \quad a^{4a+p}, \quad a^{6a+p} \quad \text{et in genere} \quad a^{2na+p},$$

ubi a debet esse primus ad $2p+1$ et n quoque potest esse numerus negativus.

Praeterea vero etiam ejusdem generis erunt hae potestates

$$a^{2a-p-1}, \quad a^{4a-p-1}, \quad a^{6a-p-1} \quad \text{et in genere} \quad a^{2na-p-1}$$

hoc autem posterius tantum valet, si a fuerit numerus positivus; si enim sit negativus, hae posteriores potestates ad alterum genus pertinent. Ratio hujus exceptionis manifesta est: si enim p fuerit numerus par, perinde est sive capiatur $+a$, sive $-a$; sin autem p sit impar, loco a sumendo $-a$, ipsa potestas fit negativa. Sicque si formula $(+a)^p\pm 1$ fuerit per $2p+1$ divisibilis, tum $(-a)^p\mp 1$ divisibilis erit.

Exemplum. Quia 2^1+1 per $2.1+1=3$ est divisibile, ubi $a=2$ et $p=1$, ad idem genus pertinebunt hae potestates

$$2^1, \; 2^5, \; 2^9, \; 2^{13}, \; 2^{17}, \; 2^{21} \ldots 2^{4n+1}$$

deinde etiam istae

$$2^2, \; 2^6, \; 2^{10}, \; 2^{14}, \; 2^{18}, \; 2^{22} \ldots 2^{4n+2}.$$

Examinemus casum 2^{21}, an $2^{21}+1$ divisibile sit per 43, sive an 2^{21} per 43 divisum relinquat -1, quod ope methodi supra expositae ita fiet

divisor: 43	residua
2^{21}	$-1-43=-44=-2^2.11$
2^{21-2}	$-11+43=32=2^5.1$
2^{21-7}	1. Capiatur cubus
$2^{3.21-21}$	1. At
$2^{2.21}$	1. Dividatur
2^{21-21}	1, vel
2^0	1

quod cum sit verum, etiam prima formula est vera.

Examinetur jam potestas 2^{18}, num per 37 divisa relinquat -1. Calculus ita fiet

divisor: 37	residua
2^{18}	$-1+37=2^2.9$
2^{18-2}	$+9-37=-2^2.7$
2^{18-4}	$-7-37=-2^2.11$
2^{18-6}	-11
$2^{2.18}$	$-1331=+1$, quod etiam est verum.

Exemplum. Sit $a=3$ et $p=2$, erit 3^2+1 divisibile per 5; hujus ergo generis erunt omnes hae potestates:

$$3^2,\ 3^8,\ 3^{14},\ 3^{20},\ 3^{26}\ \dots\ 3^{6n+2},\ \text{item hae}$$
$$3^3,\ 3^9,\ 3^{15},\ 3^{21},\ 3^{27}\ \dots\ 3^{6n+3}.$$

Examinetur 3^{26} an per 53 divisa relinquat -1:

divisor: 53	residua
3^{26}	$+1+53=3^3.2$
3^{23}	$+2$
3^{46-26} vel 3^{20}	$+4$
3^{43-26} vel 3^{17}	$+8$
3^{14}	$+16$
3^5	$+128$ vel 22
3^2	44 vel -9

quod cum sit falsum, residuum non erit $+1$ vel -1.

Examinetur 3^{33} an per 67 divisa relinquat $+1$.

divisor: 67	residua
3^{33}	$1+134=3^3.5$
3^{30}	5
3^{27}	25
3^{24}	125 vel -9
3^{18}	-225 vel -24
3^9	$+216$ vel $+15$
3^{33} vel 3^0	-135 vel -1

quod quia est falsum, nostra regula confirmatur.

Exemplum. Sit $a=6$ et fieri nequit $p=1$, quia neque 6^1+1, neque 6^1-1 per 3 est divisibile, ideoque excluduntur exponentes 1, 13, 25, 37, 49, etc., tum etiam

10, 22, 34, 46, 58, etc.

At 6^2-1 est per 5 divisibile, sive 6^2 per 5 divisum dat residuum $+1$, ergo $p=2$, et idem dabunt hae potestates

6^{14}, 6^{26}, 6^{38}, 6^{50}, 6^{62}, etc., tum etiam
6^{9}, 6^{21}, 6^{33}, 6^{45}, 6^{57}, etc.

Examinemus potestatem 6^{50} num per 101 divisa relinquat $+1$:

divisor: 101	residua
6^{50}	$+1+101=102=6.17$
6^{49}	$17-101=-6.14$
6^{48}	$-14-202=-216=-6^3$
6^{45}	-1
6^{5}	$-1-101=-6.17$
6^{4}	-17
6^{3}	$+14$
6^{1}	$-196+202=+6$

quod quia est verum, patet regula.

Examinetur potestas 6^{33} an per 67 divisa relinquat $+1$:

divisor: 67	residua
6^{33}	$+1-67=-6.11$
6^{32}	$-11-67=-6.13$
6^{31}	$-13+67=+6.9$
6^{30}	$+9$
6^{27}	$+81$ vel $+14$
6^{21}	$+196$ vel -5
6^{9}	$+25$
6^{3}	$+350$ vel 15
6^{0}	$+135-134$ vel $+1$

Utra formula $a^p \pm 1$ per numerum primum $2p+1$ sit divisibilis sequens tabella ostendit:

2p+1		2p+1		2p+1		2p+1	
pro a = 2		*pro* a = 3		*pro* a = 5		*pro* a = 6	
$8n \pm 1$	2^p-1	$12n \pm 1$	3^p-1	$20n \pm 1$	5^p-1	$24n \pm 1$	6^p-1
$8n \pm 3$	2^p+1	$12n \pm 5$	3^p+1	$20n \pm 3$	5^p+1	$24n \pm 5$	6^p-1
				$20n \pm 7$	5^p+1	$24n \pm 7$	6^p+1
				$20n \pm 9$	5^p-1	$24n \pm 11$	6^p+1
pro a = 7		*pro* a = 8		*pro* a = 10		*pro* a = 11	
$28n \pm 1$	7^p-1	$32n \pm 1$	8^p-1	$40n \pm 1$	10^p-1	$44n \pm 1$	11^p-1
$28n \pm 3$	7^p-1	$32n \pm 3$	8^p+1	$40n \pm 3$	10^p-1	$44n \pm 3$	11^p+1
$28n \pm 5$	7^p+1	$32n \pm 5$	8^p+1	$40n \pm 7$	10^p+1	$44n \pm 5$	11^p-1
$28n \pm 9$	7^p-1	$32n \pm 7$	8^p-1	$40n \pm 9$	10^p-1	$44n \pm 7$	11^p-1
$28n \pm 11$	7^p+1	$32n \pm 9$	8^p-1	$40n \pm 11$	10^p+1	$44n \pm 9$	11^p-1
$28n \pm 13$	7^p+1	$32n \pm 11$	8^p+1	$40n \pm 13$	10^p-1	$44n \pm 13$	11^p+1
		$32n \pm 13$	8^p+1	$40n \pm 17$	10^p+1	$44n \pm 15$	11^p+1
		$32n \pm 15$	8^p-1	$40n \pm 19$	10^p+1	$44n \pm 17$	11^p+1
						$44n \pm 19$	11^p-1
						$44n \pm 21$	11^p+1

pro a = 12		pro a = 13		pro a = 14		pro a = 15	
$48n \pm 1$	$12^p - 1$	$52n \pm 1$	$13^p - 1$	$56n \pm 1$	$14^p - 1$	$60n \pm 1$	$15^p - 1$
$48n \pm 5$	$12^p + 1$	$52n \pm 3$	$13^p - 1$	$56n \pm 3$	$14^p + 1$	$60n \pm 7$	$15^p - 1$
$48n \pm 7$	$12^p + 1$	$52n \pm 5$	$13^p + 1$	$56n \pm 5$	$14^p - 1$	$60n \pm 11$	$15^p - 1$
$48n \pm 11$	$12^p - 1$	$52n \pm 7$	$13^p + 1$	$56n \pm 9$	$14^p - 1$	$60n \pm 13$	$15^p + 1$
$48n \pm 13$	$12^p - 1$	$52n \pm 9$	$13^p - 1$	$56n \pm 11$	$14^p - 1$	$60n \pm 17$	$15^p - 1$
$48n \pm 17$	$12^p + 1$	$52n \pm 11$	$13^p + 1$	$56n \pm 13$	$14^p - 1$	$60n \pm 19$	$15^p + 1$
$48n \pm 19$	$12^p + 1$	$52n \pm 15$	$13^p + 1$	$56n \pm 15$	$14^p + 1$	$60n \pm 23$	$15^p + 1$
$48n \pm 23$	$12^p - 1$	$52n \pm 17$	$13^p - 1$	$56n \pm 17$	$14^p + 1$	$60n \pm 29$	$15^p + 1$
		$52n \pm 19$	$13^p + 1$	$56n \pm 19$	$14^p + 1$		
		$52n \pm 21$	$13^p + 1$	$56n \pm 23$	$14^p + 1$		
		$52n \pm 23$	$13^p - 1$	$56n \pm 25$	$14^p - 1$		
		$52n \pm 25$	$13^p - 1$	$56n \pm 27$	$14^p + 1$		

A. m. T. I. p. 211—213. 215. 216.

16.

THEOREMA. Si potestas a^p per N divisa relinquat r, at potestas a^q residuum s, tum formula $s^p - r^q$ per N erit divisibilis.

DEMONSTRATIO. Cum $a^p - r$ sit divisibilis per N, tum etiam $a^{np} - r^n$ erit divisibilis, ergo etiam $a^{pq} - r^q$. Simili modo cum $a^q - s$ sit divisibilis per N, etiam $a^{pq} - s^p$ erit divisibilis; unde sequitur etiam $s^p - r^q$ fore divisibile per N. Hinc si $r = 1$, tum $s^p - 1$ erit divisibile.

THEOREMA. Si fuerit $r + \lambda N = a^\alpha s$, tum $a^{p-\alpha} - s$ est divisibile per N. Hic ergo est $r = a^\alpha s - \lambda N$ et $q = p - \alpha$; erit ergo

$$s^p - (a^\alpha s - \lambda N)^{p-\alpha} \text{ per } N \text{ divisibile.}$$

A. m. T. I. p. 214.

17.

(*Krafft.*)

Si fuerit p numerus impar, tum $\frac{2^p+1}{3}$ semper est numerus integer, qui quoties p est numerus primus, videtur etiam esse numerus primus, id quod examinetur.

Ponatur $\frac{2^p+1}{3} = y$; erit sequens $\frac{2^{p+2}+1}{3} = \frac{4.2^p+1}{3}$. At ex priore est $2^p = 3y - 1$; unde sequens erit $\frac{12y-3}{3} = 4y - 1$, unde formetur sequens series

$$\begin{array}{lllllllllll} p \ldots 1, & 3, & 5, & 7, & (9), & 11, & 13, & (15), & 17, & 19, & \text{etc.} \\ y \ldots 1, & 3, & 11, & 43, & (171), & 683, & 2731, & (10923), & 43691, & 174763, & \text{etc.} \end{array}$$

Hinc suspicio confirmatur usque ad ultimum 174763, qui sit $= a$, ita, ut sit $3a = 2^{19} + 1$; at hic numerus continetur in forma $2f^2 + g^2$, quae alios divisores non habet, nisi in eadem forma contentos; necesse ergo est, sit $174763 = 2r^2 + s^2$ idque unico modo. Si ergo hic numerus unico modo in forma $2r^2 + s^2$ contineatur, certo erit primus; sin autem pluribus modis contineatur, tum demum erit compositus; id quod non adeo difficile est explorare. Est autem

$$174763 = 2.295^2 + 713 = 2.294^2 + 1891 = 2.293^2 + 3065 \ldots (= 2.171^2 + 341^2).$$

(*Lexell.*)

At sine tanto calculo demonstrari potest hunc numerum esse primum. Si enim haberet divisorem, is *primo* minor esset, quam radix quadrata hujus numeri, quae est 418, sive < 419. *Secundo* divisor iste continebitur

in forma vel $8n+1$, vel $8n+3$. *Tertio* divisor etiam formam habebit $19\lambda+1$, ubi λ primo esse debet par, erit ergo vel $\lambda=8n$, vel $8n+2$, vel $8n+4$, vel $8n+6$. Prima dat formam $8n+1$, quae congruit cum priore; at $\lambda=8n+2$ dat $8n+39$, ideoque $\lambda=8n+2$ excluditur; similiter $\lambda=8n+4$ dat $8n+5$, unde $\lambda=8n+4$ excluditur; at $\lambda=8n+6$ dat $8n+3$, quae valet. Duae ergo formae relinquuntur pro λ, $8n$ et $8n+6$; ergo ex priori $19\lambda+1$ habentur: 1, 153, 305, 457, et ex posteriori $19\lambda+1$: 115, 267, 419. Hi autem numeri, minores quam 419, omnes sunt compositi.

Neque vero propositio supra memorata est vera, plures enim casus assignari possunt, quibus fallit. Cum enim numerus primus $2p+1$ quoties fuerit formae $8n+3$, sit divisor formulae 2^p+1, ob $p=4n+1$ utique fieri potest, ut p sit numerus primus; iis ergo casibus etiam formula $\frac{2^p+1}{3}$ divisorem habebit $8n+3$, hoc itaque evenit, quoties tam $4n+1$ quam $8n+3$ fuerint numeri primi, cujusmodi casus sunt:

5, 29, 41, 53, 89

11, 59, 83, 107, 179.

A. m. T. I. p. 217.

18.

(*J. A. Euler.*)

Ut formulae x^4+1 divisor sit 17, erit . . . . $x=2$, vel 8, vel 9, vel 15.
Ut ejusdem formulae divisor sit 41, erit . . . . $x=3$, vel 14, vel 27, vel 38,
" " " 73, erit . . . . $x=10$, vel 22, vel 51, vel 63,
" " " 89, erit . . . . $x=12$, vel 37, vel 52, vel 77.

In omnibus scilicet casibus, si fuerit $x=a$, erit etiam

$$x=a^3 \text{ et } =a^5 \text{ et } =a^7 \text{ etc.}$$

A. m. T. I. p. 201.

d) *De divisoribus et residuis numerorum quadratorum.*

19.

Theorema, cujus demonstratio desideratur.

Si pro divisore d inter residua quadratorum occurrat $\pm r$, tum etiam pro divisore $4nr+d$, si fuerit numerus primus, inter residua quadratorum idem quoque residuum $\pm r$ occurret. Ita si sit $d=7$, inter residua quadratorum occurrit 2; ideoque quoties $8n+7$ fuerit numerus primus, (eo divisore) inter residua quadratorum reperiatur 2 necesse est.

Ratio in eo quaerenda videtur, quod si $8n+7$ est numerus primus, tum numerus residuorum semper est $4n+3$, dum si non fuerit primus, multitudo residuorum multo est minor: scilicet pro $8n+7=15$, multitudo residuorum non est 7, sed tantum 5.

A. m. T. I. p. 210.

20.

Theoremata demonstranda.

I. Si per numerum primum $4n+1$ omnia quadrata dividantur, inter residua occurret non solum ipse numerus n, sed etiam omnes ejus divisores et quidem singuli utroque signo affecti.

II. Si per numerum primum $4n-1$ omnia quadrata dividantur, inter residua non solum occurret ipse numerus n, sed etiam omnes ejus divisores signo $+$ affecti; iidem enim signo $-$ affecti erunt non-residua.

Haec duo theoremata ita generalius proponi possunt: Denotante i numerum imparem quemcunque,

I. si per numerum primum $4n+ii$ quadrata dividantur, inter residua occurrent omnes divisores numeri n, tam signo $+$ quam signo $-$ affecti.

Corollarium. Hinc si $4n+ii$ est numerus primus et d aliquis divisor numeri n, semper dari poterit formula $xx\pm dyy$ per illum numerum $4n+ii$ divisibilis.

II. Si per numerum primum $4n-ii$ quadrata dividantur, inter residua occurrent omnes divisores numeri n positive sumti, iidem vero negative sumti erunt non-residua.

Corollarium. Ergo si d fuerit divisor quicunque numeri n, semper dabuntur hujusmodi formulae $xx-dyy$ per numerum primum $4n-ii$ divisibiles: contra vero nulla dabitur talis formula $xx+dyy$ per hunc numerum primum divisibilis. A. m. T. I. p. 224.

21.

(*Krafft.*)

Problema. Invenire omnes numeros primos formae $4n+1$, per quos si quadrata dividantur, inter residua occurrat datus numerus $\pm a$.

Solutio. Ante vidimus, si divisor primus fuerit $4ap+ii$, inter residua certo occurrere $\pm a$. Statuatur ergo $4n+1=4ap+ii$, et quia i est impar, ponatur $i=2c+1$, ut prodeat

$$4n+1=4ap+4c^2+4c+1, \quad \text{seu} \quad n=ap+c^2+c.$$

Quoties ergo fuerit $n=ap+c^2+c$, quicunque numeri pro c et p statuantur, tum numerus $4n+1$ satisfaciet, siquidem fuerit primus.

Corollarium. Simili modo patebit, ut divisori primo $4n-1$ conveniat in residuis numerus $+a$, tum sumi debere $n=ap-c^2-c$.

Formula autem c^2+c hos praebet numeros: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, etc., quibus per a divisis sit quodvis residuum $=r$, quodvis autem non-residuum sit ϱ, atque sequentia theoremata obtinebuntur:

I. Si fuerit $4n+1$ primus et $n=ap+r$, tum in residuis quadratorum per $4n+1$ divisorum occurrunt numeri $+a$ et $-a$, ideoque dabuntur formulae x^2+ay^2 et x^2-ay^2 per $4n+1$ divisibiles; tum vero etiam formula $a^{2n}-1$ quoque erit divisibilis.

II. Existente $4n+1$ numero primo, si fuerit $n=ap+\varrho$, tum in residuis quadratorum neque $+a$ neque $-a$ occurret, et neutra formula x^2+ay^2 et x^2-ay^2, neque etiam haec $a^{2n}-1$ erit divisibilis per $2n+1$; cum ergo $a^{4n}-1$ sit divisibilis, sequitur, formulam $a^{2n}+1$ fore divisibilem per $4n+1$.

III. Si divisor primus $=4n-1$ atque $n=ap-r$, tum in residuis quadratorum occurret $+a$, non vero $-a$, ideoque dabitur formula $xx-ayy$ per $4n-1$ divisibilis, non vero $xx+ayy$; tum vero formula $a^{2n-1}-1$ divisibilis erit per $4n-1$.

IV. Si divisor primus $4n-1$, at $n=ap-\varrho$, inter residua quadratorum non occurret $+a$, sed $-a$, ideoque dabitur formula $xx+ayy$ divisibilis per $4n-1$, et jam formula $(-a)^{2n-1}-1$, sive $a^{2n-1}+1$ divisibilis erit per $4n-1$.

In his autem theorematibus praecedentia fere omnia continentur, id quod sequentibus ostendamus exemplis.

1) Sit $a=2$, erit $r=0$ et $\varrho=1$, unde sequitur

pro I. $n=2p$, ideoque divisor $4n+1=8p+1$; sequentes igitur dabuntur formulae per $8p+1$ divisibiles: x^2+2y^2, x^2-2y^2 et $2^{4p}-1$;

pro II. $n=2p+1$, ergo $4n+1=8p+5$, per quem numerum scilicet primum neutra formularum x^2+2y^2 et x^2-2y^2, at vero $2^{4p+2}+1$ erit divisibilis;

pro III. $n=2p$ et divisor primus $4n-1=8p-1$, per quem divisibilis erit formula x^2-2y^2, tum vero etiam $2^{4p-1}-1$;

pro IV. $n=2p-1$ et divisor $4n-1=8p-5$, sive $8p+3$, per quem divisibiles erunt formulae x^2+2y^2 et $2^{4p-3}+1$, sive $2^{4p+1}+1$.

2) Sit $a = 3$, ubi $r = 0, 2$ et $\varrho = 1$, ergo

pro I. $n = 3p+0$, vel $3p+2$, ideoque $4n+1 = 12p+1$, $12p+9$, ubi casus posterior est rejiciendus, ita, ut sit $4n+1 = 12p+1$, per quem divisibiles sunt $x^2 \pm 3y^2$ et $3^{2n}-1$;

pro II. $n = 3p+1$ et divisor $4n+1 = 12p+5$, per quem divisibilis est formula $3^{2n}+1$;

pro III. $n = 3p+0, 2$, et divisor $4n-1 = 12p-1$, sive $12p-9$, quod sponte excidit, per quem formulae divisibiles x^2-3y^2 et $3^{2n-1}-1$;

pro IV. $n = 3p-1$, hinc $4n-1 = 12p-5$; formulae divisibiles x^2+3y^2 et $3^{2n-1}+1$.

3) Sit $a = 5$, ubi $r = 0, 2, 1$ et $\varrho = 3, 4$, sive $= -1, -2$.

Pro I. $n = 5p+0, 1, 2$; $4n+1 = 20p+1, (5), 9$; formulae divisibiles $x^2 \pm 5y^2$ et $5^{2n}-1$;

pro II. $n = 5p-1, -2$; $4n+1 = 20p-3, -7$; formula divisibilis $5^{2n}+1$;

pro III. $n = 5p+0, 1, 2$; $4n-1 = 20p-1, (-5), -9$; formulae divisibiles x^2-5y^2, $5^{2n-1}-1$;

pro IV. $n = 5p+1, 2$; $4n-1 = 20p+3, 7$, formulae divisibiles x^2+5y^2 et $5^{2n-1}+1$;

4) Sit $a = 6$, $r = 0, 2$ et $\varrho = 1, 3, 4, 5$, sive $= -2, -1$.

Pro I. $n = 6p+0, 2$; $4n+1 = 24p+1$; formulae divisibiles $x^2 \pm 6y^2$ et $6^{2n}-1$;

pro II. $n = 6p+1, 3, -2, -1$; $4n+1 = 24p+5, 13, -7$; formula divisibilis $6^{2n}+1$;

pro III. $n = 6p+0, 2$ et $4n-1 = 24p-1, 9$; formulae divisibiles x^2-6y^2 et $6^{2n-1}-1$;

pro IV. $n = 6p-1, -3, +2, +1$; $4n-1 = 24p-5, -13, +7$; formulae divisib. x^2+6y^2 et $6^{2n-1}+1$.

Ubi notandum est, unitatem hic perperam referri ad ϱ, valores enim literarum r et ϱ inter se aequales esse debent et oporteret 1 ad r referre, ita ut pro 1 sit etiam $4n+1 = 24p+5$, quod etiam confirmatur per residua; si enim $n = 0$, pro divisore 5 utique occurrit residuum 6, utpote $1+5$.

Idem inconveniens occurret, quoties n est numerus par; id vero incongruum ita diluendum videtur: Cum per divisorem 6 dividi debeant numeri 0, 2, 6, 12, 20, etc. utrinque diviso per 2, habebuntur numeri 0, 1, 3, 6, 10, etc. per 3 dividendi; unde manifesto oritur residuum 1 praeter praecedentia, quod ergo ex ϱ expungi debet: Ita si $a = 10$, primo pro r reperimus hos valores 0, 2, 6; per binarium autem dividendo insuper accedunt ad r 1, 3, ita, ut valores ipsius r jam sint 0, 1, 2, 3, 6, ergo ipsius ϱ:

4, 5, 7, 8, 9; $4r+1 = 1, (5), 9, 13, (25)$; $4\varrho+1 = 17, 21, 29, 33, 37$, sive $17, -19, -11, -7, -3$, hic ergo etiam numerus 9 ab ϱ ad r est transferendus.

(*Lexell.*)

Vera autem solutio hujus difficultatis in indole numeri a est quaerenda, qui si fuerit primus, valores pro r et ϱ supra assignati recte se habent; sin autem est compositus, valores quidem pro r oriundi recte se habent, sed non omnes per regulam supra datam reperiuntur, sed aliunde insuper alii accedunt. Ut enim formula $(ab)^x-1$ divisibilis sit per numerum primum $2x+1$, id duplici modo contingere potest: priori quando a^x-1 et b^x-1 divisionem admittunt; si enim a^x-1 est divisibile, erit etiam $(ab)^x-b^x$; addatur formula divisibilis b^x-1, prodit formula divisibilis $(ab)^x-1$, atque hos casus regula nostra suppeditat. Praeterea vero formula $(ab)^x-1$ erit divisibilis, si istae a^x+1 et b^x+1, fuerint divisibiles; cum enim ex priori sequatur $(ab)^x+b^x$ divisibilis, auferendo hinc b^x+1 remanet $(ab)^x-1$ divisibilis. Hinc igitur novi valores ad r accedunt, qui supra ad ϱ perperam erant relati. Totum igitur hoc argumentum accuratius sequenti modo simulque concinnius pertractatur.

Denotet $2m+1$ semper numerum primum, et supra affirmavimus, si fuerit $2m+1 = 4ab+ii$ (denotante i numeros impares), tum in residuis quadratorum tam $+a$ quam $-a$ reperiri; sin autem fuerit $2m+1 = 4ab-ii$, tum tantum $+a$ in residuis occurrere; utroque autem casu, hoc est si $2m+1 = 4ab \pm ii$, formulam a^m-1 divisibilem esse per $2m+1$. Hujus quidem demonstratio nondum perfecta habetur, sed tamen non longe abesse

videmur, cum enim quadrata per numerum $2m+1$ dividi debeant, ut residua eruantur, per $2m+1=4ab+ii$ dividatur ipsum quadratum ii, et residuum erit $-4ab$, ideoque etiam $-ab$, et quia divisor est formae $4n+1$, etiam $+ab$ erit residuum. Superest igitur tantum, ut demonstretur, tam $+a$ quam $+b$ seorsim inter residua occurrere; si enim ambo essent non-residua, nihilominus productum ab foret residuum. Ad hoc dilucidandum, proponatur divisor primus $2m+1=4ab+(2c+1)^2$, ita ut ab certe sit residuum, quoniam hic numerus pluribus aliis modis similiter exhiberi potest. Statuamus $2m+1=4p+(2q+1)^2$, et nunc etiam p certe erit residuum. Aequentur hae duae formulae inter se, et reperiemus $p=ab+cc+c-qq-q$, ubi q pro lubitu assumere licet, sicque plura alia residua prodibunt, inter quae si occurrat alteruter numerus a vel b, etiam alter certe erit residuum. Ut hoc uberius explicetur, notasse juvabit, inter residua primum omnia occurrere quadrata, deinde si occurrant numeri α, β, γ, etc., etiam producta ex binis vel pluribus occurrent. Et si occurrant numeri α et $\alpha\gamma$, etiam γ occurret, et si occurrat $\alpha\gamma^2$, etiam α occurret; hoc igitur exemplis illustremus.

Exemplum I. Sit $a=2$, $b=2$, ideoque $2m+1=16+(2c+1)^2$.

1) Sit $c=0$ eritque $p=4-qq-q=4-(0, 2, 6, 12)$, hinc capiatur $p=4-2=2$, ergo 2 certe est residuum.

2) Sit $2c+1=5$, erit $p=4+6-qq-q=10-(0, 2, 6, 12)$ et sumto $q=1$, erit $p=8=2.4$, ergo 2 residuum.

3) Sit $c=4$ sive $2m+1=97$, unde $p=24-qq-q$; sumatur $q=2$, erit $p=18$, ideoque 2 residuum.

Exemplum II. Sit $a=2$ et $b=3$ et $2m+1=24+(2c+1)^2$. Sit $c=3$, ut fiat $2m+1=73$, ergo $p=6+12-qq-q=18-qq-q$; sumatur $q=0$ fit $p=2.9$, ergo et 2 et 3 residua.

Exemplum III. Sit $a=3$ et $b=3$ et $2m+1=36+(2c+1)^2$. Sit $c=0$, ut fiat $2m+1=37$, ergo $p=9-qq-q=9-(0, 2, 6)$; sumto $q=2$, $p=3$. Sit deinde $c=2$, unde $2m+1=61$, hinc

$$p=9+6-qq-q=15-(0, 2, 6), \text{ ergo } p=15-12=3.$$

Exemplum IV. Sit $ab=2.3.5$, ideoque $2m+1=8.3.5+(2c+1)^2$. Sumto $c=5$, ut sit $2m+1=241$, erit

$$p=2.3.5+30-qq-q=60-(0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56).$$

At $60-6$ dat $54=6.9$, ergo 6 est residuum, ergo et 5, deinde $p=60-12$ dat $48=3.16$, unde 3 est residuum et 2, sicque singuli factores 2, 3, 5 sunt residua.

Exemplum V. Sit $ab=3.5.7=105$, ideoque $2m+1=420+(2c+1)^2$ et sumto $c=0$, $2m+1=421$, unde

$$p=105-q(q+1)=105-(0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110).$$

Hinc $105-30=75=3.25$, ergo 3 est residuum, ideoque et 35. Deinde $p=105-42=63=7.9$, ideoque 7 residuum ut et 5; sicque singuli factores sunt residua.

Hinc ergo tuto concludi posse videtur, quotcunque etiam factores habeat productum ab, singulos semper quoque inter residua occurrere, quod idem simili modo de altera forma $4ab-(2c+1)^2$ ostenditur; posito enim

$$4ab-(2c+1)^2=4p-(2q+1)^2, \text{ erit } p=ab-cc-c+qq+q,$$

ubi p certo est residuum.

Exemplum I. Sit $ab=2.2$, $2m+1=16-(2c+1)^2$, sumto $c=1$, $2m+1=7$, ergo

$$p=4-2+qq+q=2+qq+q,$$

unde si $q=0$, patet 2 esse residuum.

Exemplum II. Sit $ab=2.3=6$, erit $2m+1=24-(2c+1)^2$; posito $c=0$, $2m+1=23$, ergo

$$p=6+qq+q=6+(0, 2, 6, 12, 20), \text{ unde } p=6+2=8=2.4,$$

ergo 2 residuum, ideoque et 3, sive $p=6+6=12=3.4$, ergo 3 residuum.

Exemplum III. Sit $ab=2.2.3.5=60$ et $2m+1=240-(2c+1)^2$; posito

$$c=0, \quad 2m+1=239, \quad \text{unde } p=60+(0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \text{ etc.}).$$

Hinc $p = 60 + 12 = 72 = 2.36$, ergo 2 est residuum. Porro $p = 60 + 20 = 5.16$, ergo 5 residuum, ideoque etiam 3. Sive sumto $p = 60 + 30 = 90 = 10.9$, ergo 10 residuum, hinc etiam 5. Sumto autem $a = 3$ fit $2m+1 = 191$ primus, ergo

$$p = 60 - 12 + qq + q = 48 + qq + q = 48 + (0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42).$$

Hinc statim $p = 48 = 3.16$ dat 3 pro residuo; deinde $p = 50 = 2.25$ dat 2 pro residuo. Porro

$$p = 48 + 42 = 90 = 10.9,\ \text{ergo 10 residuum, ideoque et 5.}$$

Quamquam haec prorsus certa videntur, tamen demonstratio desideratur.

Uberior consideratio formulae $2m + 1 = 4ab \pm ii$,

ubi primo inquirendum, quibusnam casibus a inter residua reperiatur. Quia ii semper est numerus formae $4r+1$, nostra formula ita refertur: $4ab \pm (4r+1)$, at formula $4r+1$ continet primo omnia quadrata imparia, quae quidem cum $4ab$ numeros primos dare possunt, majora autem infra $4a$ deprimi possunt, dum ab iis subtrahitur $4a$ quoties fieri possit, hocque modo pro quovis casu numeri a, formula $4r+1$ certos sortietur valores minores, quam $4a$, ac si a fuerit numerus primus, hoc modo omnes prodeunt idonei valores pro $4r+1$, qui autem numeri hujus formae non occurrunt, eos formula $4\varrho+1$ indicemus, atque his numeris utriusque generis $4r+1$ et $4\varrho+1$ pro quovis numero primo a definitis, sequentia habebimus theoremata.

I. Si fuerit $2m+1 = 4ab \pm (4r+1)$, tum formula $a^m - 1$ semper erit divisibilis per $2m+1$, ac casu signi superioris tam $+a$ quam $-a$ inter residua quadratorum reperientur, casu autem signi inferioris, tantum $+a$ erit residuum, et $-a$ non-residuum.

II. Si fuerit $2m+1 = 4ab \pm (4\varrho+1)$, tum semper formula $a^m + 1$ dividi poterit per $2m+1$, tum vero pro signo superiore $+$ neque a nec $-a$ erit residuum, sive neque $xx + ayy$ nec $xx - ayy$ unquam per $2m+1$ dividi poterit. Pro signo autem inferiore $-$, inter residua erit $-a$, sive formula $xx + ayy$ divisibilis erit per $2m+1$; probe autem hic notetur, haec tantum valere, si a fuerit numerus primus, numeri enim compositi aliam requirunt evolutionem. Nunc igitur pro singulis numeris primis a exhibeamus numeros illos duplicis generis in formulis $4r+1$ et $4\varrho+1$ contentos.

$$a = 2\begin{cases} 4r+1 = 1, \mid 9,\ 17,\ 25,\ 33,\ 41,\ 49,\ 57,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5, \mid 13,\ 21,\ 29,\ 37,\ 45,\ 53,\ 61,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 3\begin{cases} 4r+1 = 1, \mid 13,\ 25,\ 37,\ 49,\ 61,\ 73,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5, \mid 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65,\ 77,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 5\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 9, \mid 21,\ 29,\ 41,\ 49,\ 61,\ 69,\ 81,\ 89,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 13,\ 17, \mid 33,\ 37,\ 53,\ 57,\ 73,\ 77,\ 93,\ 97,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 7\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 9,\ 25, \mid 29,\ 37,\ 53,\ 57,\ 65,\ 81,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5,\ 13,\ 17, \mid 33,\ 41,\ 45,\ 61,\ 69,\ 73,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 11\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 5,\ 9,\ 25,\ 37, \mid 45,\ 49,\ 53,\ 69,\ 81, \mid 89,\ 93,\ 97,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 13,\ 17,\ 21,\ 29,\ 41, \mid 57,\ 61,\ 65,\ 73,\ 85, \mid 101,\ 105,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 13\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 9,\ 17,\ 25,\ 29,\ 49, \mid 53,\ 61,\ 69,\ 77,\ 81,\ 101,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5,\ 21,\ 33,\ 37,\ 41,\ 45, \mid 57,\ 73,\ 85,\ 89,\ 93,\ 97,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 17\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 9,\ 13,\ 21,\ 25,\ 33,\ 49,\ 53, \mid 69,\ 77,\ 81,\ 89,\ 93,\ 101,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5,\ 29,\ 37,\ 41,\ 45,\ 57,\ 61,\ 65, \mid 73,\ 97,\ 105,\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 19\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 25,\ 45,\ 49,\ 61,\ 73, \mid 77,\ 81,\ 85,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 13,\ 21,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 53,\ 65,\ 69, \mid \text{etc.} \end{cases}$$

$$a = 23\begin{cases} 4r+1 = 1,\ 9,\ 13,\ 25,\ 29,\ 41,\ 49,\ 73,\ 77,\ 81,\ 85,\ \text{etc.} \\ 4\varrho+1 = 5,\ 17,\ 21,\ 33,\ 37,\ 45,\ 53,\ 57,\ 61,\ 65,\ 89,\ \text{etc.} \end{cases}$$

Geminas has series pro quovis numero primo a facile in infinitum continuare licet, eas autem in periodos distinximus, quarum prima continet numeros formae $4n+1$, minores quam $4a$, secunda periodus continet eosdem numeros $+4a$. Tertia continet numeros secundae periodi $+4a$ et ita porro.

Hinc igitur pro casibus, quibus a est primus, judicare licet, utrum formula a^m-1 an a^m+1 per numerum primum $2m+1$ sit divisibilis; prius scilicet evenit, quoties fuerit $2m+1=4ab\pm(4r+1)$, posterius vero quoties fuerit $2m+1=4ab\pm(4\varrho+1)$. Circa has series notari oportet, in qualibet periodo contineri $\frac{a-1}{2}$ terminos, ita ut in ordine $4\varrho+1$ totidem sint termini quot in $4r+1$; deinde omnes termini ordinis $4r+1$ vel ipsi sunt quadrata, vel tales, ut $4r+1+4an$ fieri possit quadratum. Contra vero numeri $4\varrho+1$ omnes ita sunt comparati, ut formula $4\varrho+1+4an$ nunquam fieri possit quadratum, quicunque numerus pro n capiatur.

Problema. Nunc videamus, quomodo judicium institui debeat, quando numerus a habet factores, scilicet tum etiam investigemus tam terminos $4r+1$ quam $4\varrho+1$ tali numero a convenientes.

Solutio. Sit $a=fg$ et f et g numeri primi. Quaerantur primo pro f numeri tam formae $4r+1$ quam $4\varrho+1$, qui ita designentur ${}^f(4r+1)$ et ${}^f(4\varrho+1)$, eodemque modo pro numero g habeantur formulae ${}^g(4r+1)$ et ${}^g(4\varrho+1)$, quo facto excerpantur omnes numeri binis formulis ${}^f(4r+1)$ et ${}^g(4r+1)$ communes, cujusmodi sit P, et ex praecedentibus patet, si divisor fuerit $4fp\pm P=2m+1$, tum formulam f^m-1 fore divisibilem per $2m+1$. Simili modo pro divisore $2m+1=4gq\pm P$ formulam g^m-1 esse divisibilem. Fiat nunc $p=gn$ et $q=fn$, ut prodeat communis divisor $4fgn\pm P$, per quem ambae formulae f^m-1 et g^m-1 erunt divisibiles, unde sequitur, quoque formulam $(fg)^m-1=a^m-1$ fore divisibilem. Praeterea cum a^m-1 quoque sit divisibile, si tam f^m+1 quam g^m+1 dividi queant, id quod evenit, si ex ordinibus ${}^f(4\varrho+1)$ et ${}^g(4\varrho+1)$ termini communes excerpantur, quam ob rem pro numero proposito $a=fg$ ordo $4r+1$ primo continebit omnes terminos communes ordinum ${}^f(4r+1)$ et ${}^g(4r+1)$, praeterea vero etiam terminos communes ordinibus ${}^f(4\varrho+1)$ et ${}^g(4\varrho+1)$. Reliqui vero numeri formae $4n+1$ hic non occurrentes ad ordinem $4\varrho+1$ sunt referendi, ubi ergo occurrent primo termini communes ordinibus ${}^f(4r+1)$ et ${}^g(4\varrho+1)$, tum vero etiam communes ordinibus ${}^g(4r+1)$ et ${}^f(4\varrho+1)$, hoc igitur modo pro numero $a=fg$ facile colligentur numeri ordinis $4r+1$ et $4\varrho+1$.

Corollarium 1. Si fuerit $g=f$, ita ut a fiat quadratum $=ff$, tum pro ordine $4r+1$ omnes plane numeri ordinis $4n+1$ occurrent, alter vero ordo $4\varrho+1$ plane manebit vacuus, id quod etiam inde manifestum est, quod si a fuerit quadratum $=ff$, semper formulam $a^m-1=f^{2m}-1$ esse divisibilem per numerum $2m+1$.

Corollarium 2. Sin autem factores f et g fuerint dispares, ex praecedentibus ordinibus serierum facile pro quovis numero $a=fg$ termini utriusque ordinis colligentur, quemadmodum ex sequentibus exemplis patebit.

Exemplum I. Sit $a=2.3$, ideoque $4a=24$, et terminus communis ordinum ${}^2(4r+1)$ et ${}^3(4r+1)$ est 1 cum sequentibus 25, 49, 73, 97; at vero terminus ordinibus ${}^2(4\varrho+1)$ et ${}^3(4\varrho+1)$ communis est 5, unde in primo ordine tantum occurrunt 1, 5, at pro ordine $(4\varrho+1)$ terminus communis ordinibus ${}^2(4r+1)$ et ${}^3(4\varrho+1)$ est 17, ordinibus autem ${}^3(4r+1)$ et ${}^2(4\varrho+1)$ communis est 13. Qui ordines ita referantur

$$a=6,\quad 4a=24\begin{cases}4r+1=\ 1,\ \ 5, \\ 4\varrho+1=13,\ 17,\end{cases}\left|\begin{matrix}25,\ 29,\ 49,\ 53,\ 73,\ 77,\ 97,\ 101\\ 37,\ 41,\ 61,\ 65,\ 85,\ 89\end{matrix}\right.$$

Exemplum 2. Sit $a=2.5=10$ et $4a=40$. Hic termini communes ordinum ${}^2(4r+1)$ et ${}^5(4r+1)$ sunt 1, 9, at termini communes ordinum ${}^2(4\varrho+1)$ et ${}^5(4\varrho+1)$ sunt 13, 37. At pro ordine $4\varrho+1$ sunt termini communes ${}^2(4r+1)$ et ${}^5(4\varrho+1)$, 17, 33, at ordines ${}^5(4r+1)$ et ${}^2(4\varrho+1)$ communes habent 21, 29, unde fit

$$a=10,\quad 4a=40\begin{cases}4r+1=\ 1,\ \ 9,\ 13,\ 37, \\ 4\varrho+1=17,\ 21,\ 29,\ 33,\end{cases}\left|\begin{matrix}41,\ 49,\ 53,\ 77,\ 81,\ 89,\ 93\\ 57,\ 61,\ 69,\ 73,\ 97,\end{matrix}\right.$$

EXEMPLUM 3. Si $a = 2.7 = 14$ et $4a = 56$

$$\begin{array}{l|l} 4r+1 = 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 25,\ 45, & 57,\ 61,\ 65,\ 69,\ 81,\ 101 \\ 4\varrho+1 = 17,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 53, & 73,\ 85,\ 89,\ 93,\ 97,\ 109 \end{array}$$

EXEMPLUM 4. Sit $a = 3.5 = 15$ et $4a = 60$

$$\begin{array}{l|l} 4r+1 = 1,\ 17,\ 49,\ 53, & 61,\ 77,\ 109 \\ 4\varrho+1 = 13,\ 29,\ 37,\ 41, & 73,\ 89,\ 97 \end{array}$$

COROLLARIUM. Si fuerit $a = ffg$, quia factor ff in ordine r continet numeros, in ordine ϱ autem nullos, termini communes ordinibus r sunt omnes, qui pro g habentur, at termini ordinibus ϱ communes sunt nulli, ergo pro hoc casu ordo $4r+1$ congruit cum numero g, similique modo congruit ordo $4\varrho+1$. Id quod his casibus apparet

$$a = 8,\quad 4a = 32\left\{\begin{array}{l|l|l} 4r+1 = 1,\ 9,\ 17,\ 25, & 33,\ 41,\ 49,\ 57, & 65,\ 73,\ 81,\ 89 \\ 4\varrho+1 = 5,\ 13,\ 21,\ 29, & 37,\ 45,\ 53,\ 61, & 69,\ 77,\ 85,\ 93 \end{array}\right.$$

$$a = 4.3 = 12,\quad 4a = 48\left\{\begin{array}{l|l|l} 4r+1 = 1,\ 13,\ 25,\ 37, & 49,\ 61,\ 73,\ 85, & 97 \\ 4\varrho+1 = 5,\ 17,\ 29,\ 41, & 53,\ 65,\ 77,\ 89, & \end{array}\right.$$

A. m. T. I. p. 226—235.

22.

(*Krafft.*)

Si fuerit $4n+1$ numerus primus, in residuis quadratorum non solum hi numeri $n - qq - q$, sed etiam omnes eorum divisores occurrent.

Quia numerus residuorum diversorum est $= 2n$, omnia prodibunt, si loco q substituantur numeri

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (2n-1),$$

ergo haec residua erunt, ut sequens tabella indicat, ubi ultima columna ostendit ea quadrata, unde haec residua nascuntur:

$n - 0$	$4n^2$
$n - 2$	$(2n-1)^2$
$n - 6$	$(2n-2)^2$
$n - 12$	$(2n-3)^2$
$n - 20$	$(2n-4)^2$
$\vdots$	$\vdots$
$-4n^2+3n$	1

Nunc autem demonstrandum restat, etiam omnes factores horum residuorum esse residua, quod eo magis est mirandum, quod cum etiam hae formulae

$$\lambda(4n+1) + n - qq - q$$

pariter residua exhibeant, tamen non omnes factores etiam futuri sint residua.

A. m. T. I. p. 255.

23.

(*N. Fuss I.*)

OBSERVATIO. Formula $xx+1$ divisibilis erit per sequentes numeros quadratos:

I.	per	5^2	si fuerit	$x = 5^2t \pm 7$
II.	»	13^2	»	$x = 13^2t \pm 70$
III.	»	17^2	»	$x = 17^2t \pm 38$

IV.	per	25^2	si fuerit	$x = 25^2 t \pm 57$
V.	»	29^2	»	$x = 29^2 t \pm 41$
VI.	»	37^2	»	$x = 37^2 t \pm 117$
VII.	»	41^2	»	$x = 41^2 t \pm 378$
VIII.	»	53^2	»	$x = 53^2 t \pm 500$
IX.	»	61^2	»	$x = 61^2 t \pm 682$
X.	»	65^2	»	$x = 65^2 t \pm 268$
XI.	»	73^2	»	$x = 73^2 t \pm 74$

Hinc etiam valores ipsius x assignari poterunt, ut haec formula $xx + aa$ per eosdem numeros fiat divisibilis; sicque $xx + aa$ divisibilis erit per 41^2, si fuerit $x = 41^2 t + 378a$; ita hoc problema resolvi potest, quo quaeruntur valores ipsius x, ut haec formula $xx + aa$ divisibilis fiat per $(ff + gg)^2$.

Problema. Invenire numerum x, ut $xx + 1$ dividi queat per $aa + bb$.

Solutio. Primo patet, si satisfaciat $x = \alpha$, etiam satisfacturum esse $x = m(a^2 + b^2) \pm \alpha$. Deinde sumto $x = \frac{a}{b}$ satisfacit, quia fit $xx + 1 = \frac{aa + bb}{bb}$. Ponatur ergo $x = \frac{m(aa + bb) \pm a}{b}$, qui ergo numerus debet esse integer. Quia vero est $x = mb + \frac{a(ma \pm 1)}{b}$, debet esse $ma \pm 1$ divisibile per b. Quaeratur fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ fractioni $\frac{a}{b}$ proxime aequalis, quod fit si $ab - \beta a = \pm 1$. Sumatur ergo $m = \beta$ eritque $x = \beta b + \frac{a(\beta a \pm 1)}{b}$. Cum igitur sit $\beta a \pm 1 = \alpha b$, erit $x = \beta b + \alpha a$. In genere ergo $x = m(aa + bb) \pm (\alpha a + \beta b)$.

Problema. Invenire numerum x, ut formula $x^4 + 1$ divisibilis fiat per $a^4 + b^4$.

Solutio. Primo patet hoc fieri, si $x = \frac{a}{b}$. Ponatur ergo $x = \frac{m(a^4 + b^4) \pm a}{b} = mb^3 + \frac{a(ma^3 \pm 1)}{b}$. Quaeratur nunc fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ proxime aequalis huic $\frac{a^3}{b}$, ita ut sit $\beta a^3 - \alpha b = \pm 1$, et sumatur $m = \beta$ eritque $x = \beta b^3 + \alpha a$, generaliter ergo

$$x = m(a^4 + b^4) \pm (\beta b^3 + \alpha a).$$

Potuissemus etiam ponere

$$x = \frac{aa}{bb}, \quad \text{fiat igitur} \quad x = \frac{m(a^4 + b^4) \pm aa}{bb} = mb^2 + \frac{a^2(ma^2 \pm 1)}{bb}.$$

Quaeratur nunc fractio $\frac{\gamma}{\delta}$ proxime aequalis ipsi $\frac{aa}{bb}$, ut sit $\gamma bb - \delta aa = \pm 1$, sumaturque $m = \delta$ eritque

$$x = \delta bb + \gamma aa \quad \text{et generaliter} \quad x = m(a^4 + b^4) \pm (\delta bb + \gamma aa),$$

quod ergo debet esse quadratum, cujus radix jam ante est assignata, unde patet hanc formulam

$$m(a^4 + b^4) \pm (\gamma aa + \delta bb)$$

semper ad quadratum reduci posse, sive si omnia quadrata dividantur per divisorem $a^4 + b^4$, inter residua certe occurret tam $\gamma aa + \delta bb$ quam $-\gamma aa - \delta bb$. Sit $a = 3$ et $b = 2$ et quaeratur fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ proxime aequalis ipsi $\frac{27}{2}$, erit $\alpha = 13$ et $\beta = 1$, hinc ergo erit $x = 97m \pm 47$. Potuissemus quoque facere $a = 2$ et $b = 3$, et fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ proxime $= \frac{8}{3}$, quod fit sumendo $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, tum erit $x = 97m \pm 33$. Patet ergo tam $47^4 + 1$ quam $33^4 + 1$ divisibile esse per 97. A. m. T. II. p. 147.

---

e) *Diversa.*

24.

(*Krafft.*)

Formulae in producendis numeris primis foecundae:

I. $x^2 + x + 17$ dat: 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257, 289.

II. $x^2 + x + 41$ dat: 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281.

Jam autem demonstratum est, nullam dari hujusmodi formulam algebraicam, cujus omnes plane termini sint numeri primi. A. m. T. I. p. 234.

25.

(*N. Fuss. I.*)

Theorema. Haec formula $x^{2n}+x^n+1$ semper est divisibilis per $xx+x+1$, dummodo n non sit multiplum ternarii.

Demonstratio. Si enim illa formula multiplicetur per x^n-1, productum $x^{3n}-1$ semper est divisibile per x^3-1, ideoque etiam per $xx+x+1$; quia ergo multiplicator x^n-1 non est divisibilis, necesse est ipsam formulam esse divisibilem. Q. e. d.

Theorema. Haec formula $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ semper est divisibilis per $x^4+x^3+x^2+x+1$, dummodo exponens n non fuerit multiplum ipsius 5.

Demonstratio similis praecedenti.

Theorema. Si capiatur angulus $=\left(\frac{m}{n\pm 1}\right)360^0$, haec formula $x^{2n}-2x^n\cos\vartheta+1$ semper est divisibilis per hanc $xx-2x\cos\vartheta+1$. A. m. T. I. p. 285.

26.

Theorema, cujus demonstratio etiamnunc desideratur. Si haec formula $4mnk+maa+nbb$ fuerit numerus primus, puta P, tum semper assignari possunt numeri x et y, ut fiat $mxx+nyy=P$.

Sit $m=3$, $n=2$, $a=1$ et $b=1$, erit $maa+nbb=5$ et $4mnk+5=24k+5$. Sumatur $k=2$, erit $P=53$ et esse debebit $3xx+2yy=53$, sit $x=1$ et $y=5$. Plerumque quidem tales numeri pro x et y dantur integri, interdum tamen non nisi fractos assignare licet, veluti si fuerit $m=7$ et $n=2$, praeterea vero $a=1$ et $b=1$, ita ut sit $P=56k+9$, unde sumto $k=4$ fit $P=233$, qui numerus in integris esse nequit $=7xx+2yy$. At si capiatur $x=\frac{5}{3}$, erit $233=\frac{175}{9}+2yy$, ergo $2yy=\frac{1922}{9}$, ergo $y^2=\frac{961}{9}$ et $y=\frac{31}{3}$.

A. m. T. I. p. 300.

27.

Theorema. Non dantur tria biquadrata, quorum summa esset divisibilis vel per 5, vel per 29, quae sola excipiuntur. A. m. T. II. p. 161.

28.

Observatio. Proposito quocunque numero primo $p=2n+1$, omnes numeri eo minores, qui sunt $1, 2, 3, 4 \ldots 2n$, semper tali ordine disponi possunt, ut certis multiplis ipsius p aucti, progressionem geometricam constituant, sive tales assignari possunt numeri x, ut progressionis geometricae $1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots x^{2n}$ si singuli termini per p divisi deprimantur, omnes numeri ipso p minores prodeant, uti ex sequentibus exemplis patebit. Notetur autem potestatem x^{2n} hoc modo semper dare unitatem, propterea quod $x^{2n}-1$ semper per p dividi potest, unde sequentes potestates x^{2n+1}, x^{2n+2}, x^{2n+3}, etc. eosdem reproducunt numeros, uti ab initio.

I. Sit $p=3$ et $n=1$ et progressio geometrica erit $1, x, xx$. Sumto ergo $x=2$, progressio geometrica erit 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, etc.

II. Sit $p=5$ et $n=2$ et progressio geometrica $1, x, x^2, x^3$, etc. Hinc sumto $x=2$ habetur

1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, etc.

sumto autem $x=3$, erit ea 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, etc.

III. Sit $p=7$ et $n=3$, erit progressio $1, x, x^2, x^3, x^4$, etc. Hinc sumto $x=2$, erit ea 1, 2, 4, 1, unde patet hinc tantum terminos pares oriri, unde x ita sumi debet, ut fiat $xx-2=7m$, ideoque $x=3$, et progressio geometrica erit 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, etc. Loco x autem etiam sumi posset alia potestas x^2,

si modo λ ad 6 fuerit primus, ita sumto $\lambda=5$, capi poterit $x=5$, unde oritur 1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, quae est prioris retrograda. Semper autem series retrograda aeque satisfacit.

IV. Sit $p=11$ et $n=5$, at sumto $x=2$ erit progressio

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 4, & 8, & 5, & 10, & 9, & 7, & 3, & 6, & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \end{matrix}$$

Hic autem primo etiam retrograda valet:

$$1,\ 6,\ 3,\ 7,\ 9,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

Praeterea posito $x=x^3, x^7, x^9$, qui numeri sunt 8, 7 et 6, tum erit progressio:

$$1,\ 8,\ 9,\ 6,\ 4,\ 10,\ 3,\ 2,\ 5,\ 7,\ 1,$$

cujus retrograda oritur sumto $x=7$.

V. Sit $p=13$ et $n=6$, at sumto $x=2$, erit progressio

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 4, & 8, & 3, & 6, & 12, & 11, & 9, & 5, & 10, & 7, & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \end{matrix}$$

Dein pro x sumi possunt numeri 6, 11, 7. Sumto igitur $x=6$, ea erit

$$1,\ 6,\ 10,\ 8,\ 9,\ 2,\ 12,\ 7,\ 3,\ 5,\ 4,\ 11,\ 1.$$

Reflexiones generales. 1. Perpetuo hic potestati x^n conveniet numerus $2n$. Cum enim ejus quadratum x^{2n} det 1, erit $x^n=\sqrt{1}$, ergo $x^n=-1=p-1=2n$.

2. Si potestati x^λ respondeat numerus a, tum potestati $x^{n+\lambda}$ respondebit numerus $p-a=2n+1-a$. Cum enim sit

$$x^\lambda=+a \text{ et } x^n=-1, \text{ erit } x^{\lambda+n}=-a=p-a=2n+1-a.$$

Sufficit ergo seriem usque ad medium $2n$ continuare, quia sequentes sunt complementa priorum.

3. Posito $x=a$, ejus reciprocum vocemus $\frac{1}{a}$, sive $\frac{mp+1}{a}$, ut prodeat numerus integer, quem designemus per α, ut sit $\alpha=\frac{1}{a}$, eodemque modo $\beta=\frac{1}{b}$, $\gamma=\frac{1}{c}$ etc. Ita casu $p=13$, si fuerit

$$a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \text{ etc.}$$
$$\text{erit } \alpha=7,\ 9,\ 10,\ 8,\ 11,\ 2.$$

Notetur enim complementorum reciproca etiam esse complementa.

4. Constitutis his reciprocis, si fuerit $x^\lambda=a$, tum erit $x^{2n-\lambda}=\alpha$, propterea, quod productum potestatum est $x^{2n}=1$, ideoque $a\alpha=1$. Deinde vidimus esse $x^{n+\lambda}=p-a$, erit igitur $x^{n-\lambda}=p-\alpha$; ita ut cognito uno termino, simul quatuor innotescant, quod exemplis illustretur.

Sit $p=19$, $n=9$

potestates	numeri	potestates	numeri
1	1	x^9	18
x^1	a	x^{10}	$19-a$
x^2	b	x^{11}	$19-b$
x^3	c	x^{12}	$19-c$
x^4	d	x^{13}	$19-d$
x^5	$p-\delta$	x^{14}	δ
x^6	$p-\gamma$	x^{15}	γ
x^7	$p-\beta$	x^{16}	β
x^8	$p-\alpha$	x^{17}	α

Hic igitur notetur esse debere $b=a^2$, $c=a^3$, $d=a^4$, etc. Si ergo sumatur $a=2$, erit $b=4$, $c=8$, $d=16$, tum vero $\alpha=10$, $\beta=5$, $\gamma=12$, $\delta=6$, unde formatur haec progressio geometrica

1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

Loco x autem quoque sumi possunt numeri potestati x^{λ} respondentes, si modo λ ad 18 fuerit primus. Cum autem $18=2.3^2$, multitudo numerorum ad 18 primorum est 6 et valores pro λ sunt 1, 5, 7, 11, 13, 17, unde pro x sumi possunt hi numeri 2, 13, 14,| 10, 3, 15, unde sex progressiones geometricas formare licet, quarum tres erunt priorum retrogradae.

Exemplum. Sit $p=41$ et $n=20$, et sumatur $x=2$, unde progressio geometrica oritur

1, 2, 4, 8, 16, 32, 23, 5, 10, 20, 40
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

unde pro x^{20} prodit $+1$, ita ut sit $2^{20}=+1$, unde patet esse $xx=2$, ideoque $x=\sqrt{(2+41m)}=17$ (posito $m=7$). Factum hinc est sequens schema:

41)

0	1							
1	17	11	11	21	23	31	30
2	2	12	23	22	39	32	18
3	34	13	22	23	7	33	19
4	4	14	5	24	37	34	36
5	27	15	3	25	14	35	38
6	8	16	10	26	33	36	31
7	13	17	6	27	28	37	35
8	16	18	20	28	25	38	21
9	26	19	12	29	15	39	29
10	32	20	40	30	9	40	1

Jam ad 40 valores ipsius λ primi sunt 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, unde pro x accipi poterunt sequentes numeri: 17, 34, 13, 26, 11, 22, 6, 12, 24, 7, 28, 15, 30, 19, 35, 29. Si sumsissemus $x=3$, prodiisset progressio

1, 3, 9, 27, 40,
1 2 3 4

sequeretur $3^4=x^{20}$, ergo $3=x^5$. Supra autem invenimus esse $2=x^2$, ergo $4=x^4$, unde oritur $x=\frac{3}{4}$, sive $x=\frac{3+41m}{4}=11$. Cum igitur formula $a^{40}-1$ semper dividi queat per 41 h. e. si fuerit $a=x^{\lambda}$, denotante λ numero quocunque, ista formula $b^{20}-1$ dividi poterit per 41, si fuerit $b=aa$, h. e. si fuerit $b=x^{2\lambda}$. Quoniam igitur $a^{40}-1=(a^{20}-1)(a^{20}+1)$, prior vero factor $a^{20}-1$ divisibilis sit casibus $a=x^{2\lambda}$, sequitur, reliquis casibus, h. e. casibus $a=x^{2\lambda+1}$, formulam $a^{20}+1$ divisibilem esse per 41, h. e. si fuerit

$a=$ 17, 34, 27, 13, 26, 11, 22, 3, 6, 12, 24, 7, 14, 28, 15, 30, 19, 38, 35, 29.

Porro quia $a^{20}-1$ divisibile per 41 si $a=x^{2\lambda}$, erit $b^{10}-1$ divisibile per 41 si $b=x^{4\lambda}$; hinc sequitur formulam $b^{10}+1$ divisibilem esse per 41 si $b=x^{4\lambda+2}$. Porro a^8-1 divisibile per 41 si $a=x^{5\lambda}$. At a^4-1 divisibile per 41 si $a=x^{10\lambda}$, ergo a^4+1 divisibile per 41 si $a=x^5$, x^{15}, x^{25}, x^{35}, etc. h. e. si $a=x^{10\lambda+5}$. Consequenter formula a^4+1 divisibilis per 41 his casibus: $a=27$, 3, 14, 38. Porro quia a^4-1 divisibile per 41, si $a=x^{10\lambda}$, et a^2-1 per 41, si $a=x^{20\lambda}$, sequitur fore a^2+1 divisibile per 41, si a fuerit $x^{20\lambda+10}$, qui casus sunt $a=32$ et 9, hoc est in genere si $a=41m\pm9$. A. m. T. II. p. 170. 171.

29.

Regula facilis explorandi numeros formae $4m+1$, qui desinunt vel in 3, vel in 7, utrum sint primi, nec ne?

Sit N talis numerus, et a $2N$ subtrahatur quadratum proxime minus, desinens in 5, cujus radix sit $5n$, sitque residuum $=R$. Ad hoc continuo addantur numeri $100(n-1)$, $100(n-3)$, $100(n-5)$, $100(n-7)$, etc.,

ut prodeant sequentes numeri: R, $R+100(n-1)$, $R+200(n-2)$, $R+300(n-3)$, etc. Quodsi jam inter hos numeros unicus occurrat quadratus, tum numerus propositus N certo est primus, vel per hoc quadratum divisibilis; sin autem vel nullus occurrat quadratus, vel duo pluresve, tum numerus N non est primus. Sit $N=637$, erit $2N=1274$. Proximum quadratum in 5 desinens erit $1225=5^2.7^2$, ideoque $n=7$ et numeri addendi numero $R=49$ erunt 600, 400, 200, unde prodit 649, 1049, 1249, inter quos numeros unicum occurrit quadratum 49, unde numerus propositus vel erit primus, vel per 49 divisibilis.

Sit $N=1073$, erit $2N=2146$, proximum quadratum in 5 desinens $=2025=5^2.9^2$, unde $n=9$ et $R=121$. Numeri addendi sunt 800, 600, 400, 200 eritque 921, 1521, 1921, 2121, inter quos sunt quadrata 121 et 1521, ideoque numerus non est primus.

Sit $N=697$, $2N=1394$, proximum quadratum in 5 desinens $1225=5^2.7^2$, $R=169$ et numeri addendi 600, 400, 200; inde prodeunt 769, 1169, 1369. Hic duo occurrunt quadrata $169=13^2$ et $1369=37^2$, unde numerus ille non est primus, est enim $697=17.41$.

Sit $N=1697$, erit $2N=3394$, proximum quadratum $3025=5^2.11^2$, hinc $R=369$ et numeri addendi 1000, 800, 600, 400, 200; hinc prodeunt 1369, 2169, 2769, 3169, 3369, inter quos unicum est quadratum $1369=37^2$, unde numerus est primus, quandoquidem per 1369 non est divisibilis.

A. m. T. II. p. 188.

30.

(*Golovin.*)

Tabula exhibens per intervallum 420 omnes numeros, qui restant, deletis numeris sequentium formarum:

$3n+2$, $4n+3$, $5n+1$, $5n+4$, $7n+3$, $7n+5$ et $7n+6$.

0	78	148	232	310	373
18	85	162	238	312	378
22	88	165	240	322	382
25	93	168	252	330	385
28	100	172	253	333	393
30	102	177	268	337	400
37	105	190	270	340	403
42	112	193	273	345	408
57	120	205	277	350	417
58	130	210	280	352	420
60	133	217	282	357	
70	142	225	288	358	
72	145	228	298	372	

A. m. T. II. p. 195.

31.

(*N. Fuss I.*)

Theoremata numerica.

NB. Denotet hoc signum :: divisibile, ita ut $a :: p$ denotet, numerum a per p esse divisibilem.

Theorema fundamentale, a me olim demonstratum. Proposito numero quocunque P, atque ab 1 usque ad P reperiantur π numeri ad P primi, qui scilicet cum eo praeter unitatem nullum habeant factorem communem: tum semper $(a^\pi - 1) :: P$. Hinc fluunt sequentia theoremata:

I. Si fuerit p numerus primus, cum semper sit $(a^p - a) :: p$, si fuerit $a = b^p$ erit $(a^p - a) :: p^2$. At si fuerit $a = b^{pp}$, erit $(a^p - a) :: p^3$. Et in genere si $a = b^{p^n}$ erit $(a^p - a) :: p^{n+1}$.

II. Si p, q, r, s, etc. fuerint primi inter se diversi, fueritque $a = b^{q-1}$ erit $(a^p - a) :: pq$. Porro si $a = b^{(q-1)(r-1)}$ erit $(a^p - a) :: pqr$ et ita porro.

III. Si fuerit tam $(x^m - y^m) :: P$ quam $(x^n - y^n) :: P$; sitque $m > n$, erit quoque $(x^{m-n} - y^{m-n}) :: P$, ubi quidem x et y sint numeri inter se primi.

Demonstratio. Posterior formula ducta in x^{m-n} a priore subtrahatur, erit residuum

$$x^{m-n} y^n - y^m = y^n (x^{m-n} - y^{m-n}),$$

quod ergo etiam est divisibile per P, et quia y^n non est divisibile, necesse est ut $(x^{m-n} - y^{m-n}) :: P$.

IV. Si ut ante tam $(x^m - y^m) :: P$ quam $(x^n - y^n) :: P$ atque inter numeros m et n maximus communis divisor fuerit Δ. tum etiam $(x^\Delta - y^\Delta) :: P$.

Demonstratio. Ponatur $m = \mu\Delta$ et $n = \nu\Delta$, et quia Δ est maximus communis divisor, erunt μ et ν primi inter se. Dari igitur poterunt numeri α et β, ut sit $\alpha\mu - \beta\nu = 1$. Hinc igitur quoque erit $(x^{\alpha m} - y^{\alpha m}) :: P$ similique modo $(x^{\beta n} - y^{\beta n}) :: P$, unde per praecedens theorema erit $(x^{\alpha m - \beta n} - y^{\alpha m - \beta n}) :: P$. Est vero exponens $\alpha m - \beta n = \alpha\mu\Delta - \beta\nu\Delta = \Delta$, consequenter erit $(x^\Delta - y^\Delta) :: P$.

A. m. T. III. p. 174. 175.

B. Partitio numerorum in summas polygonalium.

32.

(*Léonard Euler.*)

Caractère général pour juger, si un nombre entier quelconque N *est somme de trois triangles, tous les nombres plus petits étant tels.*

Soit $N - A$ un nombre moindre quelconque qui soit égal à ces trois triangles: $\Delta p + \Delta q + \Delta r$; ensuite, prenant pour a et b des nombres quelconques et posant $A = ab$, s'il arrive que $p - q$, ou $p - r$, ou $q - r$ soit égal à $a - b$, alors le nombre proposé N sera somme de trois triangles, et un seul cas de a et b suffit pour cela.

(*Lexell.*)

Demonstration. Ayant posé $N - ab = \Delta p + \Delta q + \Delta r$; soit $p - q = a - b$, et pour cet effet mettons $p = x + a$ et $q = x + b$, de sorte que
$$N - ab = \Delta(x + a) + \Delta(x + b) + \Delta r.$$
Alors je dis qu'on aura
$$N = \Delta(x + a + b) + \Delta x + \Delta r;$$
car puisque
$$\Delta(x + a + b) = \frac{xx + 2(a + b)x + (a + b)^2 + x + a + b}{2},$$
on aura
$$N = \frac{1}{2}(xx + 2(a + b)x + (a + b)^2 + x + a + b) + \frac{xx + x}{2} + \Delta r.$$
Mais la première formule donne
$$N - ab = \frac{x^2 + 2ax + a^2 + x + a}{2} + \frac{x^2 + 2bx + b^2 + x + b}{2} + \Delta r$$
ce qui étant ôté de celle-là donne $ab = ab$, ce qu'il fallait démontrer.

Coroll. 1. Puisque $p - q = a - b$ et $p = x + a$ et $q = x + b$, on aura
$$x = p - a = q - b, \text{ donc } x + a + b = p + b = q + a;$$
par conséquent, dès qu'on aura
$$N - ab = \Delta p + \Delta(p - a + b) + \Delta r, \text{ il s'en suit } N = \Delta(p + b) + \Delta(p - a) + \Delta r.$$

Coroll. 2. Qu'on prenne $b = a$, et dès lors il arrive, que $N - aa = \Delta p + \Delta p + \Delta r$, c'est à dire que si deux de ces triangles sont égaux entre eux, on en déduira
$$N = \Delta(p + a) + \Delta(p - a) + \Delta r.$$

Exemple. Prenons $N = 17$ et successivement $a = 1, 2, 3, 4$, etc. nous aurons

1. $a=1$ donc $17-1=10+3+3$ ou $17=10+6+1$
2. $a=2$, on aura $17-4=13=1+6+6$ donc $17=1+1+15$
3. $a=3$, on aura $17-9=8=6+1+1$ donc $17=6+10+1$
4. $a=4$, on aura $17-16=1=1+0+0$ donc $17=1+1+15$

Caractères semblables pour la résolution des nombres en quatre carrés.

Soit le nombre proposé $=N$ et un nombre plus petit quelconque $N-2ab$ qui soit $=pp+qq+rr+ss$. S'il arrive que $p-q=a-b$, ou bien $p=q+a-b$, $q=p-a+b$, alors on aura $N=(p+b)^2+(q-a)^2+rr+ss$; car celle-là

$$N=2ab+pp+pp-2p(a-b)+(a-b)^2+rr+ss$$

et celle-ci

$$N=pp+pp+2pb-2ap+bb+aa+rr+ss$$

sont évidemment égales.

Coroll. Prenant $b=a$, si parmi les quatre carrés dont la somme donne $N-2aa$, deux se trouvent égaux entre eux, de sorte que $N-2aa=2pp+rr+ss$, alors on aura

$$N=(p+a)^2+(p-a)^2+rr+ss.$$

Exemples. Soit proposé le nombre $N=71$ et soit

1. $a=1$, on aura $71-2=69=4+4+36+25$ d'où l'on conclut $71=9+1+36+25$.
2. Prenant $a=2$, on aura $71-8=63=9+9+9+36$, et partant $71=36+9+1+25$.
3. Soit $a=3$ et puisque $71-18=53=49+4+0+0$, il s'en suit $71=49+4+9+9$.
4. Soit $a=4$; puisque $71-32=39=36+1+1+1$, il y aura $71=36+1+25+9$.
5. Soit $a=5$; puisque $71-50=21=4+4+4+9$, donc $71=9+4+49+9$.

A. m. T. I. p. 92. 93.

33.

(N. Fuss 1.)

Problema. Si omnes numeri minores quam N sint resolubiles in tres numeros trigonales, ipsum numerum N etiam in tres trigonales resolvere.

Solutio. Sint x, y et z radices numerorum trigonalium, quorum summa aequetur numero N, ita ut sit

$$N=\frac{xx+x}{2}+\frac{yy+y}{2}+\frac{zz+z}{2}.$$

Jam consideretur numerus minor quicunque $N-p$, pro quo radices trigonalium sint a, b, c, ut sit

$$N-p=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}.$$

Sumamus autem hic esse $b=a+d$; tum vero statuatur $z=c$, ita ut esse debeat

$$\frac{xx+x}{2}+\frac{yy+y}{2}=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+p.$$

Fiat nunc $x=a-n$ et $y=b+n$ eritque

$$xx+x=aa-(2n-1)a+n(n-1) \quad \text{et} \quad yy+y=bb+(2n+1)b+n(n+1),$$

quibus valoribus substitutis prodit

$$2p=2bn-2an+2nn, \quad \text{sive} \quad p=(b-a)n+nn.$$

Cum igitur sit $b=a+d$ ideoque $b-a=d$, erit $p=dn+nn$. Hinc pro variis valoribus litterarum d et n littera p sequentes accipiet valores. Sit primo $n=1$ erit $p=d+1$

existente $n=2$ fiet $p=2d+4$
$n=3$ $p=3d+9$
$n=4$ $p=4d+16$
$n=5$ $p=5d+25$.

Inde pro p sequentes oriuntur valores $d=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$n=1$:	$p=$		0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
$n=2$:	$p=$		2,	4,	6,	8,	10,	12,	14
$n=3$:	$p=$	3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24
$n=4$:	$p=$	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,	36
etc.	etc.								

Unde pro diversis valoribus ipsius p resolutio numeri N in tres trigonales succedet, si fuerit pro numeris minoribus

		tum erit	et
$N-1$:	$b=a$	$x=a-1$	$y=b+1$
$N-2$	$b=a+1$	$x=a-1$	$y=b+1$
	$b=a-1$	$x=a-2$	$y=b+2$
$N-3$	$b=a+2$	$x=a-1$	$y=b+1$
	$b=a-2$	$x=a-3$	$y=b+3$
$N-4$	$b=a+3$	$x=a-1$	$y=b+1$
	$b=a$	$x=a-2$	$y=b+2$
	$b=a-3$	$x=a-4$	$y=b+4$

His positis ambarum x et y inventio succedet, si inter ternas radices a, b, c, primo pro numero $N-1$ fuerit $b=a$, sive si duae fuerint aequales. Secundo si pro numero $N-2$ fuerit vel $b=a+1$, vel $b=a-1$, hoc est si differentia fuerit inter binas $=1$, tum vero duplex solutio locum habebit. Tertio si pro $N-3$ fuerit vel $b=a+2$, vel $b=a-2$, hoc est si binae radices binario discrepent. Quarto si pro numero $N-4$ fuerit vel $b=a+3$, vel $b=a$, vel $b=a-3$, hoc est si differentia inter binas radices fuerint vel $=0$, vel $=3$. Quinto si pro numero $N-5$ fuerit $b=a\pm4$ h. e. si differentia inter binas radices fuerit $=\pm4$. Sexto si pro numero $N-6$ fuerit vel $b=a\pm5$, vel $b=a\pm1$, hoc est si inter radices binas occurrat differentia vel 1, vel 5. Quamobrem si demonstrari posset, semper unum saltem horum casuum locum habere debere, tum demonstratum foret, omnes numeros esse summas trium trigonalium. Quod cum de minoribus numeris certum per se sit, pro majoribus autem continuo plures casus examinandi occurrant, eo minus dubitari potest, quin resolutio semper sit locum habitura, idque plerumque pluribus modis, quo accedit, quod pro majoribus numeris fere omnes numeri $N-p$ pluribus modis in tres trigonales resolvi possint. Quod quo clarius pateat has resolutiones ab ipso initio numerorum secundum ternas radices contemplemur:

numeri	radices $a,\ b,\ c$	vel radices	vel radices
1	0, 0, 1		
2	0, 1, 1		
3	1, 1, 1	0, 0, 2	
4	0, 1, 2		
5	1, 1, 2		
6	0, 2, 2	0, 0, 3	
7	1, 2, 2	0, 1, 3	
8	1, 1, 3		
9	2, 2, 2	0, 2, 3	
10	0, 0, 4	1, 2, 3	
11	0, 1, 4		
12	0, 3, 3	1, 1, 4	2, 2, 3

Hinc ergo examinemus numerum $N=13$ et habebimus

	$a,$	$b,$	c
pro $N-1=12$:	0,	3,	3
	1,	1,	4
	2,	2,	3
pro $N-2=11$:	0,	1,	4
pro $N-3=10$:	0,	0,	4
	1,	2,	3
pro $N-4=\ 9$:	2,	2,	2
	0,	2,	3
pro $N-5=\ 8$:	1,	1,	3
etc.		etc.	

Problema. Si omnes numeri minores quam N fuerint summae quatuor quadratorum, ipsum numerum N in quatuor quadrata resolvere.

Solutio. Sint pro numero quocunque minore $N-p$ quadratorum radices a, b, f, g, unde pro numero N statuantur radices x, y et f, g, ac ponatur $x=a+\alpha$ et $y=b+\beta$, eritque ab hoc $N-p$ subtracto

$$p=2a\alpha+\alpha\alpha+2b\beta+\beta\beta.$$

Jam sumatur $\alpha=-n$ et $\beta=+n$, ut fiat $p=2n(b-a)+2nn$; quare si fuerit $b=a+d$, habebitur $p=2(nd+nn)$, qui numerus duplo major est quam casu praecedente, pro numeris trigonalibus; unde eadem criteria locum habebunt, quae ante, si modo numerus p duplo major capiatur. Ita resolutio numeri $N-p$ succedet

si pro numero $N-2$	fuerit $b=a$	tum erit $x=a-1$,	$y=b+1$
$N-4$	$b=a+1$	$x=a-1$,	$y=b+1$
$N-6$	$b=a+2$	$x=a-1$,	$y=b+1$
$N-8$	$b=a+3$	$x=a-1$,	$y=b+1$
	$b=a$	$x=a-2$,	$y=b+2$
$N-10$	$b=a+4$	etc.	etc.
etc.	etc.		

Hic ergo patet, pro hoc casu numerum criteriorum esse duplo majorem quam casu praecedente: Verum quia hic quatuor occurrunt radices, etiam hic multo probabilius est, inter quaternas radices occurrere duas, quarum differentia sit vel 0, vel 1, vel 2, vel 3, vel etc. Quin etiam plerique numeri pluribus modis in quatuor quadrata resolvi poterunt, unde hoc judicium aeque certum esse potest ac praecedens.

Problema. Si omnes numeri minores quam N fuerint resolubiles in quinque numeros pentagonales, ipsum numerum N in tales partes resolvere.

Solutio. Sint pro numero $N-p$ radices quinque pentagonalium a, b, f, g, h, unde pro ipso numero N statuantur quinque radices x, y, f, g, h, ac ponatur $x=a+\alpha$ et $y=b+\beta$, eritque

$$\frac{3xx-x}{2}-\left(\frac{3aa-a}{2}\right)=\frac{6a\alpha+3\alpha\alpha-\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3yy-y}{2}-\left(\frac{3bb-a}{2}\right)=\frac{6b\beta+3\beta\beta-\beta}{2},$$

$$\text{unde fiet} \quad p=3a\alpha+\frac{3\alpha\alpha-\alpha}{2}+3b\beta+\frac{3\beta\beta-\beta}{2}.$$

Sumatur nunc $\alpha=-n$ et $\beta=+n$ eritque $p=3n(b-a)+3nn$; quare si fuerit $b=a+d$, fiet $p=3(nd+nn)$, ita ut hoc casu p sit triplo majus quam pro trigonalibus, unde eadem criteria locum habebunt, si modo ipso p valor triplo major tribuatur; hinc igitur resolutio semper succedet

si pro numero $N-3$	fuerit $b=a$
$N-6$	$b=a+1$
$N-9$	$b=a+2$
$N-12$	$\begin{cases} b=a+3 \\ b=a \end{cases}$

ex quibus criteriis, si unicum tantum locum habuerit, resolutio numeri N certe succedit. Hic quidem triplo pauciora habentur criteria. Verum inter quinque radices reperientur binae, quarum differentia sit vel 0, vel 1, vel 2, vel 3, etc. Praeterea vero etiam plerique numeri multo pluribus modis in quinque pentagonales resolvi possunt.

Problema generale circa numeros polygonales quoscunque, quorum laterum numerus sit $=\pi$.

Si omnes numeri minores quam N *resolvi queant in* π *numeros polygonales, etiam ipsum numerum* N *in tales resolvere.*

Solutio. Sint pro numero quocunque minore, $N-p$, radices polygonalium a, b, f, g, h, i, k, etc. Tum vero pro ipso numero N radices x, y, f, g, h, i, k, etc. Sit autem in genere $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, et quia radicis x numerus polygonalis est

$$\frac{1}{2}(\pi-2)xx-\frac{1}{2}(\pi-4)x,$$

posito $x=a+\alpha$, iste numerus polygonalis erit

$$\frac{1}{2}(\pi-2)aa+(\pi-2)a\alpha+\frac{1}{2}(\pi-2)\alpha\alpha-\frac{1}{2}(\pi-4)a-\frac{1}{2}(\pi-4)\alpha.$$

unde si subtrahatur polygonalis ipsius a, remanet

$$(\pi-2)a\alpha+\frac{1}{2}(\pi-2)\alpha\alpha-\frac{1}{2}(\pi-4)\alpha;$$

hinc ergo si $N-p$ ab N subtrahatur, relinquetur

$$(\pi-2)a\alpha+\frac{1}{2}(\pi-2)\alpha\alpha-\frac{1}{2}(\pi-4)\alpha+(\pi-2)b\beta+\frac{1}{2}(\pi-2)\beta\beta-\frac{1}{2}(\pi-4)\beta.$$

Sumatur nunc $\alpha=-n$ et $\beta=+n$ fietque $p=n(\pi-2)(b-a)+(\pi-2)nn$; quamobrem si fuerit $b=a+d$, erit

$$p=n(\pi-2)d+(\pi-2)nn=(\pi-2)(nd+nn),$$

ideoque $\pi-2$ vicibus major quam pro numeris trigonalibus; quocirca criteria ita se habebunt:

Si pro numero $N-(\pi-2)$,	fuerit $b=a$
$N-2(\pi-2)$,	$b=a+1$
$N-3(\pi-2)$,	$b=a+2$
$N-4(\pi-2)$,	$\begin{cases} b=a+3 \\ b=a \end{cases}$
etc.	etc.

Nisi ergo omnia haec criteria fallant, numerus N certe in π numeros polygonales resolvi potest. Pro theoremate igitur Fermatii demonstrando requiritur, ut demonstretur, fieri omnino non posse, ut omnia plane haec criteria simul fallant.

Scholion. Quemadmodum haec criteria deducta sunt ex consideratione binarum radicum x et y, cum binis datis a et b collatarum, ita etiam simpliciora criteria exhiberi possunt, si unica radix x cum a comparetur, manente $y=b$. Tum igitur erit

$$p=(\pi-2)a\alpha+\frac{1}{2}(\pi-2)\alpha\alpha-\frac{1}{2}(\pi-4)\alpha;$$

quare si capiamus $a=0$, fiet

$$p=\frac{1}{2}(\pi-2)\alpha\alpha-\frac{1}{2}(\pi-4)\alpha.$$

Quod si ergo pro numero unico $N-p$ occurrat unica radix $=0$, resolutio etiam certe succedet. Quocirca dispiciendum erit, num pro aliquo horum numerorum ipso N minorum:

$$N-1,\ N-\pi,\ N-(3\pi-3),\ N-(6\pi-8),\ N-(10\pi-15)\text{ etc.}$$

inter ejus radices una occurrat $=0$. Quod si semel tantum evenerit, numerus N certe resolutionem admittet. Sin autem hoc criterium nunquam succedat, tum demum superiora criteria examinari poterunt.

Scholion. Talia criteria possunt etiam derivari ex comparatione ternarum radicum x, y, z, ponendo $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$ et $z=c+\gamma$, tum enim erit

$$p=(\pi-2)(a\alpha+b\beta+c\gamma)+\frac{1}{2}(\pi-2)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)-\frac{1}{2}(\pi-4)(\alpha+\beta+\gamma),$$

unde si sumatur $\alpha+\beta+\gamma=0$ simulque fuerit $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$, obtinebitur

$$p=\frac{1}{2}(\pi-2)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma).$$

Cum autem sit $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, erit $a\alpha + b\beta - c\alpha - c\beta = 0$, unde fit

$$c = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}; \text{ tum igitur erit } p = (\pi - 2)(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta);$$

quam ob rem, si pro numero $N - p$ inter ejus radices, quarum numerus est π, tres reperiantur a, b, c, ita comparatae, ut sit $c = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}$, tum resolutio certe succedet. Sumatur ex. gr. $\alpha = n$ et $\beta = n$, eritque $c = \frac{a+b}{2}$, sive $a + b = 2c$, vel $a = 2c - b$, ex qua conditione sequitur, numeros b, c, a esse in progressione arithmetica, quia hinc fiet $c - b = a - c$. Quare si pro numero $N - p = N - 3nn(\pi - 2)$ inter ejus radices ternae sint in progressione arithmetica, numerus N semper erit resolubilis. Similique modo multitudo criteriorum pro lubitu augeri poterit, quorum si unicum successerit, resolutio numeri N locum habebit. Totum ergo negotium huc est reductum, ut demonstretur, nunquam fieri posse, ut omnia ista criteria simul fallant. In quo negotio imprimis erit perpendendum: in omnibus numeris minoribus $N - p$ omnes plane combinationes radicum 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., quarum quidem numeri polygonales simul sumti numerum N non superant, occurrere; unde demonstrandum erit: fieri non posse, ut in omnibus his combinationibus omnia nostra criteria simul fallant. Tum vero etiam hoc erit perpendendum, in numeris minoribus pro N assumtis resolutionem semper locum habere, ita, ut demonstratio tantum pro majoribus numeris sit suscipienda; ubi non solum numerus criteriorum major evadet, sed etiam numerus omnium combinationum. Quodsi enim nostra criteria unquam fallerent, id maxime metuendum foret in numeris minoribus.

Aliud tentamen in theorema Fermatianum inquirendi.

Sit series numerorum polygonalium 0, 1, A, B, C, D, etc., ac posito numero laterum $= n + 2$, erit

$$A = n+2, \quad B = 3n+3, \quad C = 6n+4, \quad D = 10n+5, \quad E = 15n+6, \quad F = 21n+7, \quad G = 28n+8, \text{ etc.}$$

et in genere pro radice x numerus polygonalis

$$= \frac{1}{2}nxx - \frac{1}{2}(n-2)x.$$

Quibus positis videamus, quot numeris hujus seriei opus sit ad singulos numeros producendos. Ac primo quidem ab 1 usque ad A quilibet numerus N, minor quam A, componitur ex N unitatibus, unde pro numeris ab 1 ad A ad summum opus est A. Nunc ad intervallum ab A ad B progrediamur, et quia $A+1$ constat ex duobus, $A+2$ ex tribus, $A+3$ ex quatuor, usque ad $A+n+1$ qui est primus qui postulat $n+2$ partes, praecedentes vero omnes ex paucioribus constant; est vero $A+n+1 = 2n+3$, unde videtur sequentem numerum $2n+4$ requirere $n+3$, quia autem est $2n+4 = 2A$, hic numerus tantum duos postulat; sequens igitur $2n+5$ postulat 3, $2n+6$ postulat 4, $2n+7$ postulat 5 etc. et $2A+n$ postulat $n+2$. Est vero $2A+n = 3n+4$; at vero hic numerus est $B+1$, ideoque tantum postulat duos; unde patet usque ad B unicum esse numerum scilicet $2n+3$, qui $n+2$ partes postulat, omnes reliqui pauciores. Nunc a B ad C progrediamur, ac manifestum est, hinc omnes numeros minores quam $B+2n+3$ ad summum requirere $n+2$, numerus autem $B+2n+3 = 5n+6$ videtur $n+3$ partes requirere; est vero $5n+6 = 3A+2n = 4A+n-2$, ubi $4A$ constat quatuor partibus et $n-2$ ex $n-2$ partibus, unde ipse numerus $4A+n-2$ constat ex $n+2$. Verum hic excipiendus est casus, ubi $n<2$, quia $n<2$ foret negativum: hoc autem casu numerus noster $B+2n+3$ fiet $= C - n + 2$, unde casu $n=1$ erit $C+1$, ideoque duabus tantum constat partibus. Casu autem $n=2$ fit $5n+6 = C$, ideoque ipse est numerus polygonalis; reliquis vero casibus, ubi $n>2$, iste numerus $5n+6$ secundus est, qui $n+2$ partes postulat, dum minores omnes praeter $2n+3$ paucioribus constant. Sequens autem numerus $5n+7 = 2A+B$, ideoque tribus tantum constat partibus. Hunc sequens, $5n+8$, constabit quatuor, ac tandem $5n+7+n-1$ constabit ex $n+2$; est vero $5n+7+n-1 = C+2$, ideoque constat tantum tribus. Nunc a C ad D progrediamur usque, ubi primum occurrit $C+2n+3$, qui dubius videri potest. Est vero

$$C+2n+3 = 8n+7 = 2B+2n+1 = 2B+A+n-1,$$

quarum partium numerus est $n+2$, qui ergo est tertius numerus $n+2$ partes postulans. Quia deinde ab $2n+3$ usque ad $5n+6$ omnes numeri postulant partes pauciores quam $n+2$, numerus sequens dubius erit $C+5n+6=11n+10$, qui autem jam superat D et ad sequens intervallum pertinet. Simili modo progredientes a D versus E, ubi primum numerum dubium reperimus $D+2n+3=12n+8=2C$, qui ergo duabus tantum constat partibus, unde ulterius progredi licet, usque ad $2C+n$, qui constabit ex $n+2$. Sequens est

$$2C+n+1=13n+9,$$

qui videtur $n+3$ partes requirere: est vero $13n+9=D+B+1$, qui ergo in tres partes resolvitur. Hinc progrediemur usque ad $14n+9=2C+2n+1=2C+A+n-1$, sicque partium numerus reducitur ad $n+2$, sequens vero numerus $4n+10=D+4n+5=D+B+A$ sicque tribus constat partibus, unde progredi licet usque ad $14n+10+n-1=15n+9$ quod jam superat . . . .

A. m. T. I. p. 336 – 340.

34.

(*Lexell.*)

Demonstratio sequens ardua Viro Celeb. la Grange *debetur:*

Si fuerit $Aa=pp+qq+rr+ss$, ubi sumere licet $pp+qq$, ut cum a communem non habeat divisorem. Ponatur $pp+qq=t$ et $rr+ss=u$, ut sit $Aa=t+u$, et per t multiplicando $Aat=tt+tu$. Cum nunc sit $tu=(pp+qq)(rr+ss)$, erit summa duorum quadratorum; ergo ponatur $=xx+yy$, eritque $x=pr\pm qs$ et $y=ps\mp qr$, ita ut sit $Aat=tt+xx+yy$. Jam quaerantur numeri α, β, γ, δ, ut fiat

$$x=t\alpha+a\gamma \quad \text{et} \quad y=t\beta+a\delta,$$

quod cum infinitis modis fieri possit, casu simplicissimo α et β capere licebit minores quam $\frac{1}{2}a$, eritque

$$Aat=tt(1+\alpha\alpha+\beta\beta)+2at(\alpha\gamma+\beta\delta)+aa(\gamma\gamma+\delta\delta).$$

Debet ergo primum membrum $1+\alpha\alpha+\beta\beta$ factorem habere a, quia autem t ad a est primus, necesse est, ut $1+\alpha\alpha+\beta\beta$ divisibile sit per a; ponatur ergo $1+\alpha\alpha+\beta\beta=aa'$, ita ut nunc habeamus

$$At=a'tt+2t(\alpha\gamma+\beta\delta)+a(\gamma\gamma+\delta\delta),$$

quae per a' multiplicata fit $\qquad Aa't=a'a'tt+2a't(\alpha\gamma+\beta\delta)+aa'(\gamma\gamma+\delta\delta),$

formula per t divisibilis. In ultimo membro loco aa' restituatur $1+\alpha\alpha+\beta\beta$, ut habeamus

$$Aa't=a'a'tt+2a't(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\alpha+\beta\beta)(\gamma\gamma+\delta\delta)+\gamma\gamma+\delta\delta,$$

cujus formulae ad dextram tria priora membra manifesto reducuntur ad

$$(a't+\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\beta\gamma-\alpha\delta)^2$$

ita ut nunc habeamus $\qquad Aa't=(a't+\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\beta\gamma-\alpha\delta)^2+\gamma\gamma+\delta\delta.$

Supra autem vidimus $\gamma\gamma+\delta\delta$ per t esse divisibile, unde etiam summam duorum priorum quadratorum

$$(a't+\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\beta\gamma-\alpha\delta)^2$$

per t divisibilem esse oportet, ita ut uterque quotus fiat summa duorum quadratorum, quare si faciamus

$$\frac{(a't+\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}{t}=p'p'+q'q' \quad \text{et} \quad \frac{\gamma\gamma+\delta\delta}{t}=r'r'+s's'$$

habebimus $Aa'=p'p'+q'q'+r'r'+s's'$ scilicet summae quatuor quadratorum. Hic vero imprimis notandum est fore $a'<a$. Cum enim sit $a'=\frac{1+\alpha\alpha+\beta\beta}{a}$, ac ut vidimus

$$\alpha<\frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad \beta<\frac{1}{2}a, \quad \text{erit} \quad 1+\alpha\alpha+\beta\beta<1+\frac{1}{2}aa,$$

unde sequitur fore $a'<\frac{1}{2}a+\frac{1}{a}$, ideoque certe minor quam a, vel $a'<\frac{1}{2}a+1$. Consequenter si productum

Aa fuerit summa quatuor quadratorum, etiam hoc minus productum Aa' erit talis summa, hocque modo continuo ad minora hujusmodi producta Aa'', Aa''' etc. progredi licet, sicque tandem necessario pervenietur ad productum $A.1$, ideoque A summa quatuor quadratorum. Quae est demonstratio insignis illius et demonstratu difficillimi theorematis, quod si quispiam numerus A fuerit divisor summae quatuor quadratorum, quae quidem inter se factorem non habeant communem, tum ipsum numerum A fore quoque summam quatuor quadratorum, seu, quod eodem redit, summam quatuor quadratorum alios non admittere divisores nisi qui ipsi sint summae quatuor quadratorum.

(*Krafft.*)

Ejusdem theorematis demonstratio mea (*scil.* Euleri).

Lemma I. Si N et n fuerint numeri inter se primi, tum quicunque numerus A ita potest repraesentari, ut sit $A = Nx + ny$, et quia hoc infinitis modis fieri potest, dabitur casus, quo $x < \frac{1}{2}n$. Sit enim

$$A = Nf + ng, \quad \text{erit etiam} \quad A = N(f - \lambda n) + n(g + \lambda N),$$

unde, quantumvis magnus fuerit numerus f, ita accipere licebit λ, ut fiat $f - \lambda n < n$; tum vero si f etiamnunc fuerit $> \frac{1}{2}n$, tum $f - n$ certe minus erit, quam $\frac{1}{2}n$: hic enim ipsi numeri spectantur, et perinde est, sive sint positivi, sive negativi.

Lemma II. Productum ex binis numeris, quorum uterque est summa quatuor quadratorum, in quatuor quadrata resolvere.

Sit hujusmodi productum $\quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$,

ac sumatur

$$A = + a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta, \quad B = + a\beta - b\alpha - c\delta + d\gamma$$
$$C = + a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta, \quad D = + a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha,$$

quorum quadrata si invicem addantur, omnia duplicia producta ex binis se mutuo tollent, et quodvis quadratum latinarum literarum multiplicatur per omnia quadrata litterarum graecarum, atque hinc manifesto fiet

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Theorema. Si numerus primus N fuerit divisor summae quatuor quadratorum $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, tum ille ipse numerus N erit summa quatuor quadratorum.

Demonstratio. Quantumvis magni fuerint numeri P, Q, R, S, eos semper deprimere licebit infra $\frac{1}{2}N$; nam si loco P scribatur $P - \lambda N$, summa illa etiamnunc erit per N divisibilis; quod etiam de reliquis Q, R et S valet, sicque singulae radices infra N deprimentur, ac si P adhuc major fuerit quam $\frac{1}{2}N$, ejus loco scribatur $N - P$, quod certo erit minus quam $\frac{1}{2}N$. Sit ergo $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ ista quatuor quadratorum summa per N divisibilis, ita, ut singulae radices minores sint quam $\frac{1}{2}N$, ac denotet n quotum resultantem, ut sit

$$Nn = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

et haec summa minor erit quam N^2, sicque certo erit $n < N$. Jam sequenti modo istae quatuor radices exhibeantur secundum lemma I:

$$p = Na + n\alpha, \quad q = Nb + n\beta, \quad r = Nc + n\gamma, \quad s = Nd + n\delta,$$

ubi litteras a, b, c, d ita assumere licebit, ut sint minores quam $\frac{1}{2}n$, sive hoc fiat negative, sive positive. His jam valoribus substitutis habebimus

$$Nn = N^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2Nn(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) + n^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

ubi notetur esse, per lemma II, $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = A$. Duo posteriora membra sponte sunt divisibilia per n; ergo necesse est, ut etiam primum per n sit divisibile. At N^2 dividi nequit per n, ergo necesse est, ut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sit per n divisibile. Ponatur ergo

$$a^2+b^2+c^2+d^2=nn', \quad \text{et quia} \quad a<\tfrac{1}{2}n, \quad b<\tfrac{1}{2}n, \quad c<\tfrac{1}{2}n, \quad d<\tfrac{1}{2}n,$$

erit summa $a^2+b^2+c^2+d^2<n^2$, ideoque $nn'<n^2$, ergo $n'<n$, nisi forte sit $n=1$. Divisa ergo per n illa aequatione, prodit

$$N=N^2n'+2NA+n(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2),$$

quae per n' multiplicetur, ut habeamus

$$Nn'=N^2n'^2+2Nn'A+nn'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2);$$

quia autem $nn'=a^2+b^2+c^2+d^2$, ultimum illud membrum abit in

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=A^2+B^2+C^2+D^2$$

per lemma II; consequenter

$$Nn'=N^2n'^2+2Nn'A+A^2+B^2+C^2+D^2=(Nn'+A)^2+B^2+C^2+D^2.$$

Sicque formula Nn' etiam erit summa quatuor quadratorum, existente $n'<n$. Eodem modo pervenire licebit ad formas ulteriores Nn'', Nn''' etc. ita, ut sit $n''<n'$, $n'''<n''$ etc. sicque tandem perveniri necesse est ad formam $N.1$, quae ergo etiam est summa quatuor quadratorum. Q. E. D.

Hinc etiam sequens Theorema facilius demonstrari potest, quam hactenus est factum:

Summa duorum quadratorum inter se primorum alios non admittit divisores, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum.

Lemma. Productum ex duabus summis duorum quadratorum ipsum in duo quadrata resolvere.

Sit productum $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$, et sumtis $A=a\alpha+b\beta$ et $B=a\beta-b\alpha$, erit

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=A^2+B^2.$$

Si nunc N fuerit divisor formae p^2+q^2, posito quoto $=n$, habetur $Nn=p^2+q^2$. Nunc igitur p et q ita exhibeantur, ut sit $p=Na+n\alpha$ et $q=Nb+n\beta$, ita, ut a et b sint minores quam $\frac{1}{2}n$; hincque $a^2+b^2<\frac{1}{2}n^2$, quo substituto fit

$$Nn=N^2(a^2+b^2)+2Nn(a\alpha+b\beta)+n^2(\alpha^2+\beta^2),$$

quae cum per n divisibilis esse debeat, statuatur $a^2+b^2=nn'$, et diviso per n erit

$$N=N^2n'+2NA+n(\alpha^2+\beta^2).$$

Multiplicetur per n', erit

$$Nn'=N^2n'^2+2Nn'A+nn'(\alpha^2+\beta^2)$$

at $nn'(\alpha^2+\beta^2)=A^2+B^2$, ergo

$$Nn'=N^2n'^2+2Nn'A+A^2+B^2=(Nn'+A)^2+B^2,$$

sicque Nn' est etiam summa duorum quadratorum, ubi $n'<\frac{1}{2}n$. Hocque modo ulterius progrediendo mox pervenietur ad $N.1$. Consequenter N certo erit summa duorum quadratorum.

Alia demonstratio simplicior ejusdem theorematis.

Si numerus quicunque N fuerit divisor summae quatuor quadratorum $P^2+Q^2+R^2+S^2$, quae singula seorsim per eum non sint divisibilia, ille ipse numerus quoque erit summa quatuor quadratorum.

Demonstratio. I. Illa quadrata semper ad alia reduci possunt minora quam $\frac{1}{4}N^2$. Ponatur enim

$$P=\mathfrak{A}N\mp p, \quad Q=\mathfrak{B}N\mp q, \quad R=\mathfrak{C}N\mp r, \quad S=\mathfrak{D}N\mp s,$$

ubi literae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ita assumi possunt, ut numeri p, q, r, s infra semissem numeri N deprimantur, quibus substitutis evidens est, formulam $p^2+q^2+r^2+s^2$, quae utique minor erit quam N^2, divisibilem fore per N et quotum fore minorem quam N.

II. Sit ergo iste quotus $=n$, ut sit $Nn=p^2+q^2+r^2+s^2$, et ratione hujus numeri n radices istorum quadratorum ita exhiberi poterunt

$$p=a+\alpha n, \quad q=b+\beta n, \quad r=c+\gamma n \quad \text{et} \quad s=d+\delta n,$$

ubi si pro a, b, c et d etiam valores negativi admittantur, hos numeros itidem infra $\frac{1}{2}n$ deprimere licebit, ut sit $a^2+b^2+c^2+d^2<n^2$.

III. His autem valoribus substitutis fiet

$$Nn = a^2+b^2+c^2+d^2+2n(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)+n^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2),$$

quae formula per lemma praemissum abit in hanc

$$Nn = a^2+b^2+c^2+d^2+2nA+n^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2),$$

quae cum sit divisibilis per n et bina posteriora membra jam in se sint per n divisibilia, necesse est, ut etiam pars prima $a^2+b^2+c^2+d^2$ factorem habeat n. Quare ponatur $a^2+b^2+c^2+d^2=nn'$ et dividendo per n habebimus

$$N = n'+2A+n(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

IV. Multiplicemus nunc in n', et in postremo membro loco nn' substituamus valorem $a^2+b^2+c^2+d^2$, ut prodeat

$$Nn' = n'^2+2n'A+(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$$

At per lemma praemissum hoc postremum membrum transformatur in $A^2+B^2+C^2+D^2$, ita, ut nunc habeamus

$$Nn' = n'^2+2n'A+A^2+B^2+C^2+D^2,$$

sive $Nn' = (n'+A)^2+B^2+C^2+D^2 =$ summae quatuor quadratorum.

V. Cum autem sit $nn' = a^2+b^2+c^2+d^2<n^2$, utique erit $n'<n$. Quemadmodum igitur ex forma Nn, quae erat summa quatuor quadratorum, pervenimus ad hanc minorem Nn', etiam aequalem summae quatuor quadratorum; ita ulterius pervenire licebit ad formulas Nn'', Nn''' etc. itidem quatuor quadratis aequales, ita, ut numeri n', n'', n''', etc. continuo diminuantur. Tandem ergo haec diminutio usque ad unitatem deducetur; ita, ut tum futurum sit $N.1$, hoc est ipse numerus propositus N aequalis summae quatuor quadratorum. Q. E. D.

Corollarium 1. Haec adeo demonstratio locum habet, etiamsi N non fuerit numerus primus; dummodo ergo numerus quicunque N fuerit factor vel divisor summae cujuspiam quatuor quadratorum, tum certe is ipse numerus quoque erit summa quatuor quadratorum.

Corollarium 2. Quodsi ergo demonstrari posset, proposito quocunque numero N, semper exhiberi posse summam quatuor quadratorum per eum divisibilem, tum utique completa haberetur demonstratio theorematis illius Fermatiani, quod omnis numerus sit summa quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum.

Theorema. Proposito quocunque numero primo N, semper exhiberi possunt quatuor quadrata, singula minora quam $\frac{1}{4}N^2$, quorum summa per illum numerum sit divisibilis.

Demonstratio. I. Ratione numeri propositi N omnes plane numeri in aliqua sequentium formularum erunt contenti

$$\lambda N,\ \lambda N+1,\ \lambda N+2,\ \lambda N+3,\ \lambda N+4, \ldots \lambda N+(N-1),$$

quarum numerus est $=N$. Singulae autem hae formae non omnes continent numeros quadratos; dantur scilicet inter illas ejusmodi formulae, quae numeros quadratos involvunt, reliquae vero quadrata prorsus excludunt. Seposita enim prima forma λN, quae ipsa multipla numeri N continet, reliquarum primae $\lambda N+1$ et ultimae $\lambda N+N-1$, vel $(\lambda+1)N-1$ quadrata in eadem formula continebuntur, nempe $\lambda N+1$. Eodem modo quadrata secundae et penultimae formulae continentur in formula $\lambda N+4$. Simili modo quadrata tertiae et antepenultimae continebuntur in formula $\lambda N+9$, quarum formularum multitudo est $\frac{1}{2}(N-1)$, quae scilicet in se complectuntur quadrata. Reliquae formulae omnes ab his diversae quadrata penitus excludunt, quarum numerus itidem est $\frac{1}{2}(N-1)$.

II. Sint formulae illae quadrata admittentes: $\lambda N+a$, $\lambda N+b$, $\lambda N+c$, $\lambda N+d$, etc., quarum numerus est $\frac{1}{2}(N-1)$ et modo vidimus, inter hos numeros a, b, c, d, etc. reperiri quadratos 1, 4, 9, 16, etc. quamdiu scilicet sunt minores, quam N. Majorum enim residua ex divisione per N relicta sumuntur. Formulae autem quadrata penitus excludentes sint: $\lambda N+\alpha$, $\lambda N+\beta$, $\lambda N+\gamma$, $\lambda N+\delta$, etc., quorum numerus itidem est $\frac{1}{2}(N-1)$.

III. Facile autem demonstrari potest, binas formulas prioris classis in se multiplicatas etiamnunc ad priorem classem pertinere, scilicet cum prior classis contineat formas a, b, c, d, etiam continebit producta ex binis vel quotcunque horum numerorum. Scilicet producta ex binis numeris prioris classis etiam in priore classe occurrent, cujusmodi sunt aa, bb, cc, etc. Tum vero productum ex numero prioris classis in numerum posterioris classis cadet in classem posteriorem. Denique productum ex binis numeris posterioris classis etiam cadet in classem priorem.

IV. Jam si in prima classe occurreret formula $\lambda N - a$, sive quod eodem redit, $\lambda N + N - a$, darentur quadrata formae $\lambda N + a$ et $\lambda N - a$, quorum ergo summa foret per N divisibilis. Quare si quis neget, dari summam quatuor quadratorum per N divisibilem, multo magis negare debebit, dari adeo summam duorum quadratorum divisibilem.

V. Quo igitur nostrum theorema demonstremus, sumamus tantisper, non dari summam quatuor vel pauciorum quadratorum, quae non esset divisibilis per numerum propositum N, atque ostendemus hinc maxima absurda esse secutura.

VI. Ista igitur opinione quasi adoptata, quia numerus $-a$ vel $N-a$ in priore classe non occurrit, certe occurret in posteriore classe inter numeros α, β, γ, δ; ergo inter numeros α, β, γ, δ occurrent numeri $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, ideoque etiam negativa quadrata -1, -4, -9, -16.

VII. Eodem modo ostendi potest, numerum $-a-b$ certe non in priori classe contineri; si enim ibi contineretur, darentur tres numeri quadrati formarum $\lambda N + a$, $\lambda N + b$ et $\lambda N - a - b$, quorum summa esset per N divisibilis; quod cum hypothesi repugnet, hic numerus $-a-b$ in posteriori classe reperiatur necesse est.

VIII. Quia autem in posteriori classe reperitur -1, productum ex -1 in $-a-b$, id est $+a+b$ in prima classe continetur; sicque in priori classe jam occurrerent numeri $1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13$; eorundem autem negativa occurrent in classe posteriori.

IX. Cum ergo formulae $\lambda N + 1$ et $\lambda N + 2$ sint prioris classis, ibidem non continebitur formula $\lambda N - 3$, quia alioquin haberemus tria quadrata harum formularum, quorum summa foret per N divisibilis. Quia ergo -3 non in priori classe continetur, continebitur in posteriori; ejus vero productum in -1, hoc est $+3$, continebitur in priori.

X. Sit autem generalius f numerus quicunque primae classis, atque dico, in priori classe formulam $\lambda N - f - 1$ non contineri, quia darentur tria quadrata, scilicet $\lambda N + 1$, $\lambda N + f$, et $\lambda N - 1 - f$, quorum summa foret divisibilis per N; unde numerus $-f-1$ in classe posteriori reperiatur necesse est; ejus vero negativum $+f+1$ in priorem classem cadet.

XI. Admissa ergo illa hypothesi, si formula quaecunque $\lambda N + f$ in prima classe contineatur, ibidem quoque occurret formula $\lambda N + f + 1$; quocirca in prima classe occurrerent omnes istae formulae:

$$\lambda N + 1, \quad \lambda N + 2, \quad \lambda N + 3, \quad \lambda N + 4, \quad \text{etc.}$$

hoc est omnes plane formulae forent prioris classis, simul vero in classem posteriorem ingrederentur omnes istae formulae:

$$\lambda N - 1, \quad \lambda N - 2, \quad \lambda N - 3, \quad \lambda N - 4, \quad \text{etc.}$$

hoc est omnes plane formulae tam in priore quam in posteriore classe occurrerent. Quare cum ante sit ostensum, in priore classe tantum occurrere $\frac{1}{2}(N-1)$ formulas et totidem in posteriore, absurdum est manifestum, quod inde ortum est, quod falso supposuimus, non dari summam trium quadratorum per N divisibilem; quamobrem verum erit, dari summas trium quadratorum per N divisibiles. Multo magis ergo dantur summae quatuor quadratorum per N divisibiles. Q. E. D.

Corollarium. Cum ergo, proposito numero primo quocunque N, dentur summae non solum quatuor sed etiam trium quadratorum per illum divisibiles, ipse ille numerus N erit quoque summa quatuor quadratorum, vel et pauciorum, et eum producta ex binis vel pluribus numeris, quorum singuli sunt summae quatuor

quadratorum, sint etiam summae quatuor quadratorum, jam rigorosissime demonstratum est, omnes plane numeros esse summas quatuor quadratorum.

Observatio singularis. Cum productum ex binis numeris, quorum uterque est summa duorum quadratorum, etiam sit summa duorum quadratorum, tum vero etiam productum ex duobus numeris, quorum uterque est summa quatuor quadratorum, quoque sit summa quatuor quadratorum. Hinc concludendum videtur, idem etiam de summis trium quadratorum valere, quod autem longe secus se habet, neque etiam eo modo, quo in lemmate superiore sumus usi, talis forma $(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ ad tria quadrata revocari potest. Fieri enim saepe potest, ut productum ex binis summis trium quadratorum non in pauciora quam quatuor quadrata resolvi possit, veluti $3=1+1+1$ et $21=1+4+16$; horum tamen productum 63 nullo modo in pauciora quam quatuor quadrata potest resolvi, quandoquidem est numerus formae $8n-1$ sive $8n+7$.

A. m. T. I. p. 177—186.

35.

(N. Fuss I.)

Theorema. Nulli numeri in sequentibus formulis contenti in duos numeros trigonales resolvi possunt:

I. $9n+5$, 8
II. $49n+5$, 19, 26, 33, 40, 47
III. $81n+47$, 74
IV. $121n+8$, 19, 41, 52, 63, 74, 85, 96, 107, 118
V. $361n+14$, 33, 52, 71, 109, 128, 147, 166, 185, 204, 223, 242, 261, 280, 299, 318, 337, 356.

Specimen Demonstrationis pro formula $49n+19$:

Sit $49n+19=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}$, erit multiplicando per 8

$$392n+152=4aa+4a+4bb+4b,$$

ergo $392n+154=(2a+1)^2+(2b+1)^2$, ideoque summa duorum quadratorum. At numerus $392n+154$ factorem habet 7, ideoque duorum quadratorum summa esse nequit.

Problema. Numeros in hac forma contentos $xx+7$ in quatuor quadrata resolvere.

Solutio. Formula $xx+7$ transformatur in has:

$$(x-1)^2+2x+6, \quad \text{vel} \quad (x-2)^2+4x+3, \quad \text{vel} \quad (x-3)^2+6x-2, \quad \text{vel} \quad (x-4)^2+8x-9,$$

vel in genere
$$(x-n)^2+2nx-nn+7,$$

unde si $2nx-nn+7$ in tria vel pauciora quadrata resolvi potest, quaesito satisfiet. Plerumque statim una harum formularum priorum negotium conficit. Verum dantur etiam casus, quibus longe progredi oportet. Veluti si x fuerit 75, usque ad $n=11$ progredi oportet, tum enim fiet

$$75^2+7=64^2+1650-121+7=64^2+1536.$$

Est vero
$$1536=16.96=16^2.6, \quad \text{at} \quad 6=4+1+1,$$

unde quatuor quadrata erunt
$$64^2+16^2+32^2+16^2.$$

Aliud exemplum multo notabilius est, quo $x=181$; tum enim formulae supra datae frustra tentantur, donec perveniatur ad $n=53$, tum autem fiet

$$181^2+7=128^2+19186-2802=128^2+16384=128^2+128^2.,$$

Sicque hic numerus ad duo quadrata est reductus, neque ullo alio modo vel in tria, vel in plura adhuc quadrata resolvi potest.

Hac occasione sequens theorema omnem attentionem meretur.

Theorema. Omnis potestas binarii 2^n semper est numerus in hac formula contentus: $xx+7yy$.

Demonstratio. Sumto enim $x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{1}{2}$ prodit $xx+7yy=2$. Notum autem est omnes potestates formulae $xx+7yy$ in eadem formula contineri, quandoquidem est

$$(aa+7bb)(cc+7dd)=(ac\pm 7bd)^2+7(ad\mp bc)^2.$$

Hinc igitur per factores imaginarios erit

$$2=\frac{1+7}{4}=\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{-7}}{2},\quad \text{erit ergo}\quad 2^n=\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)^n.$$

Binomii autem $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ potestates sequenti modo progrediuntur

$$\frac{-3+\sqrt{-7}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^2$$

$$\frac{-5-\sqrt{-7}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^3$$

$$\frac{1-3\sqrt{-7}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^4$$

etc. etc.

Harum formularum ambae partes seriem recurrentem constituunt, cujus scala relationis est $1,\ -2$, unde si ex. gr. ponatur $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}=A$, et quia omnes hae formulae per 2 dividuntur, istae formulae sequenti modo continuantur:

$2A=1+\sqrt{-7}$	$2A^8=-31-3\sqrt{-7}$
$2A^2=-3+\sqrt{-7}$	$2A^9=-5-17\sqrt{-7}$
$2A^3=-5-\sqrt{-7}$	$2A^{10}=57-11\sqrt{-7}$
$2A^4=1-3\sqrt{-7}$	$2A^{11}=67+23\sqrt{-7}$
$2A^5=11-\sqrt{-7}$	$2A^{12}=-47+45\sqrt{-7}$
$2A^6=9+5\sqrt{-7}$	$2A^{13}=-181-\sqrt{-7}$
$2A^7=-13+7\sqrt{-7}$	etc.

Cum igitur sit

$$\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^{13}=\frac{-181-\sqrt{-7}}{2},\ \text{erit}\ \left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)^{13}=\frac{-181+\sqrt{-7}}{2},\ \text{indeque}\ 2^{13}=\frac{181^2+7}{4},$$

$$\text{ergo}\quad 2^{15}=181^2+7.$$

Ratio autem scalae relationis in hoc sita est, quod si ponatur

$$z=\frac{1+\sqrt{-7}}{2},\quad \text{fit}\quad z-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{-7}}{2}$$

et sumtis quadratis erit $zz=z-2$, unde nascitur scala relationis $1,\ -2$. In superiori progressione, ubi omnes termini in forma $a+b\sqrt{-7}$ continentur, ii casus maxime sunt notatu digni, quibus b est vel $+1$, vel -1, quibus casibus pars rationalis fit maxima. Hincque sequens problema omnino peculiarem postulat solutionem.

Problema. Cum sit uti vidimus $\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^n=\frac{a+b\sqrt{-7}}{2}$, investigare eos exponentes n, pro quibus fit $b=\pm 1$, id quod fieri observavimus casibus $n=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 13$. Quaerantur igitur casus sequentes.

Solutio. Cum esse debeat $b=\pm 1$, reducatur formula $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ ad hanc formam $p(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)$ eritque

$p\cos\varphi=\frac{1}{2}$ et $p\sin\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{7}$, unde fit $\tang\varphi=\sqrt{7}$, hincque $\sin\varphi=\sqrt{\frac{7}{8}}$ et $\cos\varphi=\sqrt{\frac{1}{8}}$, sicque erit $p=\sqrt{2}$.

Invento igitur angulo φ, ut sit $\tang\varphi=\sqrt{7}$ erit primo

$$\frac{1+\sqrt{-7}}{2}=\sqrt{2}(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)\ \text{ideoque}\ \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}.(\cos n\varphi+\sqrt{-1}.\sin n\varphi).$$

Quaestio igitur huc redit, ut membrum imaginarium fiat quam minimum, id quod evenit, quando angulus $n\varphi$ quam minime differt ab π, vel 2π, vel etc. vel $i\pi$. Quod si ergo statuamus $n\varphi = i\pi$ erit $\frac{n}{i} = \frac{\pi}{\varphi}$, quamobrem quaerantur fractiones proxime aequales ipsi $\frac{\pi}{\varphi}$, earumque numeratores dabunt valores pro n. Cum igitur sit

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{7} \quad \text{erit} \quad l.\operatorname{tang}\varphi = 0{,}4225490, \quad \text{unde} \quad \varphi = 69^0\ 17'\ 43'' = 249463''.$$

At vero $$\pi = 180^0 = 648000'', \quad \text{unde} \quad \frac{\pi}{\varphi} = \frac{648000}{249463} = \frac{n}{i}.$$

Evolvatur ergo haec fractio per continuam divisionem, eruntque quotientes 2, 1, 1, 2, 16, 7. Ex his quotis formentur sequentes fractiones

$$\frac{1}{0},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{3}{1},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{13}{5},\quad \frac{213}{82},$$

ex quarum numeratoribus statim patet, quaesito satisfieri casibus 1, 2, 3, 5, 13, unde tuto affirmare licet idem evenire casu $n = 213$. Consideremus casum $n = 13$, eritque

$$13\varphi = 900^0\ 50'\ 19'' = 180^0\ 50'\ 19''.$$

Nunc vero est $$l2^{\frac{13}{2}} = 1{,}9566950,$$

unde fiet

$$\begin{array}{rlrl} l2^{\frac{13}{2}} &= 1{,}9566950 & \qquad l2^{\frac{13}{2}} &= 1{,}9566950 \\ l\cos 13\varphi &= \underline{9{,}9999534} & l\sin 13\varphi &= \underline{8{,}1654040} \\ & \;\;\, 1{,}9566484 & & \;\;\, 0{,}1220990 \end{array}$$

$$2^{\frac{13}{2}}\cos 13\varphi = -90{,}5 = -\frac{181}{2}, \qquad 2^{\frac{13}{2}}\sin 13\varphi = -1{,}32 = -\frac{1}{2}\sqrt{7},$$

eritque $$2^{\frac{13}{2}}\sin 13\varphi\sqrt{-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{-7}, \quad \text{unde patet esse} \quad \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^{13} = \frac{-181-\sqrt{-7}}{2}.$$

Cum sit $181^2 + 7 = 2(2^7)^2$, erit $181^2 = 2\square - 7$. Consideretur formula $2xx - 7yy$ reddaturque quadratum. Ponatur $x = 2y + z$ eritque $yy + 8yz + 2zz$, cujus radix statuatur

$$y + \frac{p}{q}z, \quad \text{eritque} \quad 8y + 2z = \frac{2p}{q}y + \frac{pp}{qq}z, \quad \text{unde fit} \quad \frac{y}{z} = \frac{pp-2qq}{8qq-2pq}.$$

Statuatur ergo $y = pp - 2qq$ et $z = 8qq - 2pq$, eritque radix illa quadrata $8pq - pp - 2qq$, in qua ergo forma contineri debet 181, quod fit si $q = 5$ et $p - 4q = 13$, ideoque $p = 33$, vel $p = 7$, ergo $y = -1$ et $z = 130$ et $x = 128$. Eritque ergo $181^2 = 2.128^2 - 7$, uti habuimus $181^2 + 7 = 2(2^7)^2$.

A. m. T. II. p. 110—113.

36.

(*J. A. Euler.*)

Hujus seriei: 1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, etc. ad minimum duodecim termini conjungi debent, ut omnes numeri prodeant. At seriei

$$1^n,\quad 2^n,\quad 3^n,\quad 4^n,\quad 5^n,\quad 6^n,\quad \text{etc.}$$

ad minimum tot termini jungi debent quot indicat haec formula

$$\frac{3^n}{2^n} + 2^n - 2 = T,$$

ubi pro $\frac{3^n}{2^n}$ numerus integer proxime minor capi debet

$$\begin{array}{llllllllll} \text{si} & n = 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ \text{fit} & T = 1, & 4, & 9, & 19, & 37, & 73, & 143, & 279. \end{array}$$

Pro numeris figuratis litera T ita se habet:

	T		T		T
1. 2. 3. 4. 5. 6	1	1. 3. 5. 7. 9	2	1. 1+a. 1+2a. 1+ 3a	a
1. 3. 6. 10. 15. 21	3	1. 4. 9. 16. 25	4	1. 2+a. 3+3a. 4+ 6a	a+2
1. 4. 10. 20. 35. 56	5	1. 5. 14. 30. 55	6	1. 3+a. 6+4a. 10+10a	a+4
1. 5. 15. 35. 70	7	1. 6. 20. 50. 105	8	1. 4+a. 10+5a. 20+15a	a+6
				1. 5+a. 15+6a. 35+21a	a+8

(*Krafft.*)

Omnes illae superiores series numerorum figuratorum sequenti forma generali comprehendi possunt

$$1\,;\quad \frac{n+a}{1}\,;\quad \frac{(n+1)(n+2a)}{1.2}\,;\quad \frac{(n+1)(n+2)(n+3a)}{1.2.3}\,;\quad \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4a)}{1.2.3.4}\quad \text{etc.}$$

pro qua superior littera T fit $= a + 2n - 2$.

A. m. T. I. p. 234. 235.

C. Analysis Diophantea.

a) *Quaestiones ad resolutionem unius aequationis ducentes.*

37.

(*J. A. Euler.*)

Problema. Si fuerit $x^2 = m$, et proposita sit formula $axx + bx + c$, invenire multiplicatorem $pxx + qx + r$, ut productum

$$(axx + bx + c)(pxx + qx + r)$$

fiat numerus absolutus non amplius involvens x, posito scilicet $x^2 = m$.

Solutio. Productum ergo erit

$$mapx + (aq + bp)m + (ar + bq + cp)xx$$
$$+ (br + cq)x + cr.$$

Debet ergo poni $br + cq + map = 0$ et $ar + bq + cp = 0$, tum enim productum erit

$$m(aq + bp) + cr.$$

Fit autem

$$p = \frac{-br - cq}{ma} = \frac{-ar - bq}{c},$$

unde fit $bcr + ccq = maar + mabq$; hinc $mabq - ccq = bcr - maar$,

consequenter $$\frac{q}{r} = \frac{bc - maa}{mab - cc}.$$

Capiatur ergo $q = bc - maa$, $r = mab - cc$, erit $p = ac - bb$; ita ut multiplicator quaesitus sit

$$(ac - bb)xx + (bc - maa)x + mab - cc;$$

ac tum productum erit $$3mabc - m^2a^3 - mb^3 - c^3.$$

A. m. T. I. p. 50. 51.

38.

Problema. Invenire numeros x et y, ut fiat $xy(xx - yy) = ann$, existente a numero primo: ubi hi casus sunt notandi:

I. Si $a = 7$, sumatur $x = 16$ et $y = 9$, tum enim fit $xy(xx - yy) = 7.\ 16.\ 9.\ 25$.

II. Si $a = 13$, sumatur $x = 325$ et $y = 36$, erit $xy(xx - yy) = 13.\ 25.\ 36.\ 361.\ 289$.

III. Si $\alpha = 23$, sumatur $x = 156^2$ et $y = 133^2$, erit $xy(xx - yy) = 23.\ 156^2.\ 133^2.\ 289.\ 42025$.

IV. Ut $\alpha = 41$, capiatur $x = 21^2$ et $y = 20^2$, erit $xy(xx - yy) = 41.\ 21^2.\ 20^2.\ 29^2$.

V. Ut fiat $\alpha = 31$, sumatur $x = 40^2$ et $y = 9^2$, fit enim

$$xy(xx - yy) = 31.\ 9^2.\ 40^2.\ 7^2.\ 41^2.$$

VI. In genere si capiatur $x = 4ppqq$ et $y = (pp - qq)^2$, fiet

$$xy(xx - yy) = (pp - qq + 2pq)(2pq - pp + qq).\square.$$

Unde si sit $2pq + pp - qq = aa$, fit $\alpha = 2pq - pp + qq$, at illa formula $2pq + pp - qq$ fit quadratum sumendo $q = 2rs$ et $p = 2rr + ss - 2rs$.

VII. Deinde vero si sumatur $x = (2pp + qq)^2$ et $y = (2pp - qq)^2$, fiet

$$xy(xx - yy) = 8pp.qq(8p^4 + 2q^4)\ \square = (4p^4 + q^4)\ \square$$

unde fit

$$\alpha\ \square = 4p^4 + q^4 = (2pp + 2pq + qq)(2pp - 2pq + qq).$$

Unde si fuerit $2pp + 2pq + qq = \square$, tunc erit $\alpha = 2pp - 2pq + qq$. At illud evenit

$$\text{si } p = 2rs \text{ et } q = rr - ss - 2rs, \text{ unde fit } \alpha = pp + (p - q)^2.$$

VIII. Ex casu VII, si $p = 5$ et $q = 7$, capiatur $x = 99^2$ et $y = 1$, erit $\alpha = 29$ et $xy(xx - yy) = 29\,\square$; vel si capiatur $x = 29.13^2$ et $y = 70^2$.

A. m. T. I. p. 21. 22.

39.

(Lexell.)

Problema. Invenire numeros x, y, z, ut fiat $\alpha xx + \beta yy = \gamma zz$, siquidem cognitus fuerit casus

$$\alpha ff + \beta gg = \gamma hh.$$

Solutio. Statuatur $\alpha xx + \beta yy = (\alpha ff + \beta gg)(\alpha pp + \beta qq)^2$, tum enim erit

$$\alpha xx + \beta yy = \gamma hh(\alpha pp + \beta qq)^2, \quad \text{sicque erit} \quad z = h(\alpha pp + \beta qq);$$

illud autem hoc modo per factores praestetur. Sit $x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{-\beta} = (f\sqrt{\alpha} + g\sqrt{-\beta})(p\sqrt{\alpha} + q\sqrt{-\beta})^2$, tum enim sponte fit $x\sqrt{\alpha} - y\sqrt{-\beta} = (f\sqrt{\alpha} - g\sqrt{-\beta})(p\sqrt{\alpha} - q\sqrt{-\beta})^2$, quarum formularum productum ipsa est aequatio supposita. Prior autem evoluta dat

$$\begin{aligned} x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{-\beta} = {} & \alpha fpp\sqrt{\alpha} - \beta fqq\sqrt{\alpha} \mp 2\beta gpq\sqrt{\alpha} \\ & + \alpha gpp\sqrt{-\beta} - \beta gqq\sqrt{-\beta} + 2\alpha fpq\sqrt{-\beta} \end{aligned}$$

$$x = f(\alpha pp - \beta qq) - 2\beta gpq$$

$$y = g(\alpha pp - \beta qq) + 2\alpha fpq$$

ac tum erit

$$z = h(\alpha pp + \beta qq).$$

Verum haec solutio nondum est generalis, eodem modo enim ponere potuissemus

$$\alpha xx + \beta yy = (\alpha ff + \beta gg)(pp + \alpha\beta qq)^2,$$

unde fit $z = h(pp + \alpha\beta qq)$. Pro hoc ergo casu statuatur

$$x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{-\beta} = (f\sqrt{\alpha} + g\sqrt{-\beta})(p + q\sqrt{-\alpha\beta})^2,$$

cujus evolutio praebet

$$x = f(pp - \alpha\beta qq) - 2g\beta pq$$

$$y = g(pp - \alpha\beta qq) + 2f\alpha pq.$$

Verum ne hi ambo quidem casus solutionem praebent generalem, cum sine dubio ejusmodi casus dentur, quibus z non per h fit divisibile, quare pro solutione generali statuatur

$$\alpha xx + \beta yy = (\alpha ff + \beta gg)(\alpha npp + \beta nqq)^2, \quad \text{unde fit} \quad z = hn(\alpha pp + \beta qq),$$

ubi forte n potest esse fractio denominatoris h. Statuatur igitur

$$x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{-\beta} = (f\sqrt{\alpha} + g\sqrt{-\beta})(p\sqrt{\alpha n} + q\sqrt{-\beta n})^2,$$

cujus evolutio praebet

$$x = f(anpp - \beta nqq) - 2\beta ngpq, \quad y = g(anpp - \beta nqq) + 2\alpha nfpq.$$

Videamus igitur an esse possit $n = \frac{1}{h}$, manentibus x et y integris. Cum igitur sit

$$x = \frac{f(\alpha pp - \beta qq) - 2\beta gpq}{h}, \quad y = \frac{g(\alpha pp - \beta qq) + 2\alpha fpq}{h},$$

quod evenit si p et q ita sumantur, ut $fq + gp$ fiat per h divisibile.

(*W. L. Krafft.*)

Problematis supra propositi solutio facillime sequenti modo absolvetur, siquidem constet unus casus, quo sit $\alpha ff + \beta gg = \gamma hh$, ubi scilicet $x = f$, $y = g$ et $z = h$. Statuamus $x = fp + \beta gq$ et $y = gp - \alpha fq$, tum enim erit

$$\alpha xx + \beta yy = pp(\alpha ff + \beta gg) + \alpha\beta qq(\alpha ff + \beta gg) = \gamma hh(pp + \alpha\beta qq).$$

Sicque aequatio adhuc resolvenda erit $hh(pp + \alpha\beta qq) = zz$, ita ut $pp + \alpha\beta qq$ debeat reddi quadratum, quod fit capiendo $p = rr - \alpha\beta ss$ et $q = 2rs$, tum enim fit

$$pp + \alpha\beta qq = (rr + \alpha\beta ss)^2.$$

Ideoque $z = h(rr + \alpha\beta ss)$. Ipsarum vero x et y valores erunt

$$x = f(rr - \alpha\beta ss) + 2\beta grs, \quad y = g(rr - \alpha\beta ss) - 2\alpha frs,$$

ubi numeri r et s pro lubitu assumi possunt. (Conf. Comment. arithm. T. I. p. 556.)

A. m. T. I. p. 95. 96. 98. 99.

40.

(*J. A. Euler.*)

Theorema. Si fuerint $naa + pbb = \square = cc$ et $nff + qgg = \square = hh$, tum semper assignare licet x et y, ut sit $nxx + pqyy = \square = zz$.

Demonstratio. Cum sit $pbb = cc - naa$ et $qgg = hh - nff$, erit productum

$$pqbbgg = (cc - naa)(hh - nff) = (ch + naf)^2 - n(ah + fc)^2,$$

unde manifestum est fore $n(ah + fc)^2 + pqbbgg = (ch + naf)^2$, sicque erit

$$x = ah + fc, \quad y = bg \quad \text{et} \quad z = ch + naf.$$

A. m. T. I. p. 130

41.

(*N. Fuss I.*)

Problema. Resolvere aequationem $\lambda zz = \mu xx + \nu yy$, ex cognito casu $\lambda cc = \mu aa + \nu bb$.

Solutio. A priore aequatione in cc ducta subtrahatur posterior in zz ducta, eritque

$$0 = \mu(ccxx - aazz) + \nu(ccyy - bbzz),$$

$$\text{sive} \quad \mu(ccxx - aazz) = \nu(bbzz - ccyy), \quad \text{hinc} \quad \frac{\mu(cx + az)}{bz - cy} = \frac{\nu(bz + cy)}{cx - az}.$$

Utraque haec fractio statuatur $= \frac{p}{q}$ et ex priore elicitur

$$z = \frac{\mu cqx + pcy}{bp - \mu aq} \quad \text{et ex altera} \quad z = \frac{cpx - \nu cqy}{\nu bq + ap},$$

qui duo valores inter se aequati dant

$$\frac{y}{x} = \frac{\mu\nu bcqq + 2\mu acpq - bcpp}{\mu\nu acqq - 2\nu bcpq - acpp}.$$

$$\text{Statuatur ergo} \quad x = \mu\nu aqq - 2\nu bpq - app \quad \text{et} \quad y = \mu\nu bqq + 2\mu apq - bpp,$$

$$\text{sive} \quad x = a(\mu\nu qq - pp) - 2\nu bpq \quad \text{et} \quad y = b(\mu\nu qq - pp) + 2\mu apq.$$

Cum autem sit $\frac{z}{c}(bp-\mu aq)=\mu qx+py=\mu\mu\nu aq^2-\mu\nu bpqq+\mu appq-bp^2$

$$=\mu aq(\mu\nu qq+pp)-bp(\mu\nu qq+pp)=(\mu\nu qq+pp)(\mu aq-bp)$$

hinc $\frac{z}{c}=-(\mu\nu qq+pp)$ et $z=-c(\mu\nu qq+pp)$.

Alia Solutio. Quia semper f, g, h invenire licet, ut sit $hh=ff+\mu\nu gg$, per hanc aequationem multiplicetur cognita $\lambda cc=\mu aa+\nu bb$ eritque

$$\lambda cchh=\mu aaff+\mu\nu\nu bbgg+\nu bbff+\mu\mu\nu aagg=\mu(af+\nu bg)^2+\nu(bf-\mu ag)^2.$$

Cum igitur esse debeat $\lambda zz=\mu xx+\nu yy$, capi poterit $z=ch$ deinde $x=af+\nu bg$ et $y=bf-\mu ag$, at vero ut fiat $hh=ff+\mu\nu gg$, debet esse

$$f=\mu\nu qq-pp \quad \text{et} \quad g=2pq, \quad \text{eritque} \quad h=\mu\nu qq+pp,$$

consequenter formula proposita ita resolvetur

$$x=a(\mu\nu qq-pp)+2\nu bpq \quad \text{et} \quad y=b(\mu\nu qq-pp)-2\mu apq \quad \text{et} \quad z=c(\mu\nu qq+pp).$$

Corollarium. Haec solutio duobus modis variari potest, prouti aequationes propositae aliter disponuntur, scil. primo $\mu xx=\lambda zz-\nu yy$ et $\mu aa=\lambda cc-\nu bb$. Ad quem casum solutio praecedens revocabitur

si loco	λ,	μ,	ν,	z,	x,	y,	c,	a,	b
ponatur	μ,	λ,	$-\nu$,	x,	z,	y,	a,	c,	b.

Unde si loco p et q scribamus r et s obtinebimus

$$z=c(-\lambda\nu ss-rr)-2\nu brs, \quad y=b(-\lambda\nu ss-rr)-2\lambda crs, \quad x=a(-\lambda\nu ss+rr).$$

Eodem modo si formulae datae ita disponantur $\nu yy=\lambda zz-\mu xx$ et $\nu bb=\lambda cc-\mu aa$, unde

si loco	λ,	μ,	ν,	z,	x,	y,	c,	a,	b
ponatur	ν,	λ,	$-\mu$,	y,	z,	x,	b,	c,	a

tum loco p et q, t et u, obtinebitur

$$z=c(-\lambda\mu uu-tt)-2\mu atu, \quad x=a(-\lambda\mu uu-tt)-2\lambda ctu, \quad y=b(-\lambda\mu uu+tt).$$

Has igitur tres solutiones ita aspectui opponamus:

Solutiones	x	y	z
I	$a(\mu\nu qq-pp)+2\nu bpq$,	$b(\mu\nu qq-pp)-2\mu apq$,	$c(\mu\nu qq+pp)$
II	$a(rr-\lambda\nu ss)$	$b(rr+\lambda\nu ss)+2\lambda crs$,	$c(rr+\lambda\nu ss)+2\nu brs$
III	$a(tt+\lambda\mu uu)+2\lambda ctu$,	$b(tt-\lambda\mu uu)$,	$c(tt+\lambda\mu uu)+2\mu atu$
I	$6qq-pp+6pq$,	$6qq-pp-4pq$,	$6qq+pp$
II	$rr-15ss$,	$rr+15ss+10rs$,	$rr+15ss+6rs$
III	$tt+10uu+10tu$,	$tt-10uu$,	$tt+10uu+4tu$.

Ubi notatu dignum, quod ternae formulae in qualibet columna eosdem numeros praebere queant, dummodo fuerit $\lambda cc=\mu aa+\nu bb$.

Exemplum. Sit proposita haec formula $5zz=2xx+3yy$, ut sit $\lambda=5$, $\mu=2$ et $\nu=3$, tum vero quia $5.1^2=2.1^2+3.1^2$, erit $c=1$, $a=1$ et $b=1$, unde ternae nostrae solutiones in tabella hic supra apponamus. Hinc si $p=1$ et $q=1$, erit $x=11$, $y=1$ et $z=7$; si $p=1$ et $q=-1$, erit $x=\pm1$, $y=9$ et $z=7$, qui valores satisfaciunt. Sit porro pro secunda solutione $r=1$ et $s=1$ eritque $x=\pm14$ seu ±7, $y=26$ seu 13 et $z=22$ seu 11. Unde fit $5zz=2xx+3yy$ sive $605=98+507$. Sit $r=1$ et $s=-1$, ut sit $x=14$ seu 7, $y=6$ seu 3 et $z=10$ seu 5. Pro tertia sit $t=1$ et $u=1$ et erit $x=21$ seu 7, $y=\pm9$ seu 3 et $z=15$ seu 5. Sit $t=1$ et $u=-1$ fietque $x=1$, $y=\pm9$ et $z=7$.

A. m. T. I. p. 299. 300.

42.

(*J. A. Euler.*)

Criterium ad dignoscendum, utrum hujusmodi aequatio $fxx+gyy=hzz$ *sit possibilis, nec ne?*

Si est possibilis, casu $h=a$, tunc etiam erit possibilis casu $h=\frac{a(pp+fg)}{qq}$: hic scilicet pro p ejusmodi numerus sumi debet, ut $pp+fg$ divisorem habeat a, fuerit nempe $pp+fg=ab$ et sumto $q=a$ etiam casu $h=b$ erit possibilis. Tum vero pro b eodem modo operatio instituatur, sicque continuo ad minores numeros pervenietur, donec tandem judicium fiat facile.

Exemplum. I. Sit $7xx+113yy=114zz$, quae aequatio an sit possibilis, quaeritur. Hic est $f=7$, $g=113$, et quaeritur an sit possibilis casu $h=114=2.3.19$? Statuatur ergo

$$h=\frac{114(pp+791)}{qq} \text{ et sumto } p=3 \text{ et } q=40, \text{ prodit casus } h=\frac{114.800}{1600}=57.$$

II. Nunc iterum fiet $h=\frac{57(pp+791)}{qq}$ et fiat $pp+791$ divisibile per 19, quod si fieri potest, dabitur casus quo $p<19$. Ut, ex. gr. $pp+12$ fiat divisibile per 19, debet esse $p=8$, unde $h=\frac{855}{3.19}=15$.

III. Quaestio ergo huc est reducta, an aequatio $7xx+113yy=15zz$ sit possibilis? quae hoc modo repraesentetur $15zz-7xx=113yy$, ubi $f=15$, $g=-7$, $fg=-105$ et $h=113$. Nunc fiat $h=\frac{113(pp-105)}{qq}$ et reddatur $pp-105$ divisibile per 113, quod fit sumendo $p=52$, tum autem fiat $h=\frac{113.2599}{\square}=\frac{113.113.23}{\square}$, ergo quadrato sublato fit $h=23$ et quaestio huc est reducta, an aequatio $15zz-7xx=23yy$ sit possibilis.

IV. Fiat ergo $h=\frac{23(pp-105)}{\square}$ sitque $pp-13$ per 23 divisibile, sive $pp=23n+13$, quod fit si $n=1$ et $p=6$, ergo $h=\frac{-23.69}{\square}=-3$. Habetur igitur haec aequatio

$$15zz-7xx=-3yy, \quad \text{sive} \quad 7xx-3yy=15zz,$$

ubi $f=7$, $g=-3$ et $fg=-21$, $h=15$.

V. Fiat nunc $h=\frac{15(pp-21)}{\square}$. Sumatur $p=4$, erit $h=\frac{-15.5}{\square}=-3$, ergo aequatio $7xx-3yy=-3zz$, quod actu evenit si $x=0$ et $y=z$, atque hinc sequitur ipsam aequationem propositam esse possibilem.

Nota. Revera autem est possibilis: si enim capiatur $x=2$ et $y=1$, fit

$$7xx+113=456 \text{ sive } 7xx=343 \text{ et } xx=49=\square.$$

Ita semper aequatio si fuerit possibilis, ad talem formam reduci poterit $axx+byy=azz$, cui manifesto satisfit sumendo $y=0$ et $z=x$.

(*Kraft.*)

Judicium hoc reddi potest adhuc facilius hoc modo:

Cum sit $h=\frac{2.3.19(p^2+791)}{q^2}$, capiatur p ita, ut p^2+791 divisibile fiat per $2.3.19$. Primo autem fit divisibile per 2, si $p=2n+1$; at vero per 3 fit divisibile, si $p=3n\mp 1$. Utrumque igitur obtinetur, si $p=6n\mp 1$. Restat, ut p^2+791 sit per 19 divisibile; quod fit, si p^2 per 19 divisum relinquat 7; sive debet esse $p^2=19n+7$, ergo $19n+7$ debet esse quadratum, quod fit, si $n=3$, eritque $p=8$. In genere ergo hoc fiet si $p=19n\mp 8$, hoc est casibus $p=8$, $p=11$, $p=27$, $p=30$, $p=46$, $p=49$, $p=65$, etc. inter quos numeros reperitur statim 11, qui est formae $6n\mp 1$. Sumatur ergo $p=11$, eritque $p^2+791=912=114.8$, ergo $h=\frac{114^2.8}{\square}$ et sublatis quadratis $h=2$. Res ergo eo redit, an sit $7x^2+113y^2=2z^2$. Quia hic est $h=2$, sumatur iterum $h=\frac{2(p^2+791)}{q^2}$. Ponatur $p=7$, erit $h=\frac{2.840}{q^2}=105$. Si sumsissemus $p=3$, prodiisset

$h=\frac{2.800}{qq}=1$, et jam quaeritur, utrum possit esse $7x^2+113y^2=z^2$. Sumatur ergo $h=\frac{1(p^2+791)}{qq}$ et sumatur $p=0$, erit $h=\frac{7.113}{qq}$, et cum quaestio sit de forma $7x^2+113y^2=7.113z^2$, debet esse $x=113\nu$, ideoque $7.113\nu^2+y^2=7z^2$. Felicissime succedit, si in aequatione $h=p^2+791$ capiatur $p=7.4$. Tum erit

$$h=\frac{7^2.16+7.113}{qq}=\frac{7.225}{qq}=7,$$

ergo ventum est ad $7x^2+113y^2=7z^2$, quod fit si $y=0$ et $x=z$, ergo proposita aequatio est possibilis.

Haec solutio isti innititur principio: si fuerit $fx^2+gy^2=hz^2$, multiplicetur utrinque per p^2+fgq^2 fietque

$$h(p^2+fgq^2)z^2=fp^2x^2+gp^2y^2+f^2gq^2x^2+fg^2q^2y^2=f(px+gqy)^2+g(py-fqx)^2.$$

Ergo si ponatur $x'=px+gqy$ et $y'=py-fqx$, erit $fx'^2+gy'^2=h(p^2+fgq^2)z^2$; adeoque si aequatio proposita fuerit possibilis, etiam haec erit possibilis et vicissim.

Jam sumto $q=1$, habebitur praecedens forma $h(p^2+fg)$. Si nunc p ita sumi potest, ut p^2+fg divisorem habeat h, quod semper eveniet valore $p<\frac{1}{2}h$, et ponatur $p^2+fg=hh'$, ita ut loco h habeatur h^2h', sive omisso quadrato simpliciter h'. Sicque loco h prodiit novus valor h' illo multo minor; cum enim sit $p<\frac{1}{2}h$, erit $hh'<\frac{1}{4}h^2+fg$, ideoque $h'<\frac{1}{4}h+\frac{fg}{h}$. Sin autem pro p talis valor non detur, indicio id erit, aequationem propositam esse impossibilem; non autem hoc judicium inverti potest; dantur enim casus, quibus aequatio nihilominus est impossibilis; veluti evenit in hoc exemplo $2x^2+3y^2=7z^2$, ubi $f=2$, $g=3$ et $h=7$. Hinc novus valor orietur $h=7(p^2+6)$ et sumto $p=1$ fit $h=1$, unde novus valor erit $h=1(p^2+6)$, qui dat valores 7, 10, 15, etc., qui autem omnes nullo modo satisfaciunt; nam facile ostendi potest, aequationem $2x^2+3y^2=z^2$ esse impossibilem, sive $2x^2+3y^2$ quadratum esse non posse, vel enim x est divisibile per 3, vel non. Priori casu y non erit divisibile per 3, quia alioquin tota aequatio per 9 dividi posset, et posito $x=3\nu$, formula erit $18\nu^2+3y^2$, quae divisibilis est per 3, non vero per 9, ideoque quadratum esse nequit. At si $x=3\nu\mp1$, erit x^2 numerus formae $3n+1$, ideoque $2x^2=3n+2$ et ipsa formula $2x^2+3y^2$ erit numerus formae $3n+2$, quae forma quadratum esse nequit.

Simili modo judicari poterit, utrum hujusmodi aequatio generalior $fx^2+gxy+hy^2=kz^2$ possibilis sit nec ne. Multiplicetur enim utrinque per $p^2+gpq+fhq^2$, ut habeatur

$$(p^2+gpq+fhq^2)(fx^2+gxy+hy^2)=k(p^2+gpq+fhq^2)z^2,$$

ubi notandum, prius productum semper reduci posse ad formam $fX^2+gXY+hY^2$, quod cum non tam facile adpareat, per factores irrationales sequenti modo ostendetur:

Quaerantur factores formulae $fx^2+gxy+hy^2$, quod fit ponendo hanc formulam $=0$ et radicem extrahendo, unde fit $x=\frac{-gy\mp y\sqrt{(g^2-4fh)}}{2f}$, unde factores erunt

$$\frac{1}{4f}(2fx+gy+y\sqrt{(g^2-4fh)})(2fx+gy-y\sqrt{(g^2-4fh)})$$

sive $$\frac{1}{f}(fx+\tfrac{1}{2}gy+y\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2-fh)})(fx+\tfrac{1}{2}gy-y\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2-fh)}),$$

et posito brevitatis gratia $\frac{1}{4}g^2-fh=l$, ut fiat

$$fx^2+gxy+hy^2=\frac{1}{f}(fx+\tfrac{1}{2}gy+y\sqrt{l})(fx+\tfrac{1}{2}gy-y\sqrt{l}).$$

Simili modo erit $$p^2+gpq+fhq^2=(p+\tfrac{1}{2}gq+q\sqrt{l})(p+\tfrac{1}{2}gq-q\sqrt{l})$$ et

$$fX^2+gXY+hY^2=\frac{1}{f}(fX+\tfrac{1}{2}gY+Y\sqrt{l})(fX+\tfrac{1}{2}gY-Y\sqrt{l});$$

haec ergo forma aequalis esse debet producto ex binis praecedentibus, quod fiet aequando alterutrum factorem producto ex binis praecedentibus, scilicet

$$fX+\frac{1}{2}gY+Y\sqrt{l}=(fx+\frac{1}{2}gy+y\sqrt{l})(p+\frac{1}{2}gq+q\sqrt{l});$$

sic enim sumto $\sqrt{l}$ negative, sponte fiet

$$fX+\frac{1}{2}gY-Y\sqrt{l}=(fx+\frac{1}{2}gy-y\sqrt{l})(p+\frac{1}{2}gq-q\sqrt{l});$$

sufficiet ergo alterutram ita evolvisse, ut membra rationalia et irrationalia seorsim inter se aequentur. Tum igitur fiet

$$fX+\frac{1}{2}gY=(fx+\frac{1}{2}gy)(p+\frac{1}{2}gq)+lqy$$

$$=pfx+\frac{1}{2}gpy+\frac{1}{2}fgqx+\frac{1}{2}g^2qy-fhqy$$

$$Y=fqx+gqy+py,$$

qui posterior valor in priore substitutus praebet

$$fX=pfx-fhqy, \quad \text{hinc} \quad X=px-hqy \quad \text{et} \quad Y=fqx+gqy+py.$$

Hoc igitur demonstrato ex dato valore k alius investigetur k', ut sit $k'=k(p^2+gpq+fhq^2)$, omissis factoribus quadratis, capiatur autem $q=1$, ut fiat $k'=k(p^2+gp+fh)$, et si aequatio est possibilis, loco p semper ejusmodi valorem reperire licet, ut formula $p^2+gp+fh$ factorem habeat k, quae posita $=kk'$ dabit novum valorem k'; quod si succedit, talis valor ipsius p semper dabitur minor, quam $\frac{1}{2}k$, dum scilicet p tam negative quam positive accipiatur, et sic valor k' multo minor erit quam k, unde continuo ad minores valores pervenietur, donec judicium facile reddatur.

Res exemplo illustretur: $5x^2+16xy+7y^2$, ubi $f=5$, $g=16$, $h=7$. Quaeramus casum possibilem, quo $k=7$, quippe qui oritur, si $x=1$ et $y=1$, ita ut sit $5x^2+16xy+7y^2=7z^2$, qui autem maxime est obvius, sumendo $x=0$ et $y=z$. Ergo alium eligamus sitque $5x^2+16xy+7y^2=59z^2$ ut sit $k=59$. Jam quaeratur $k'=k(p^2\mp16p+35)$ et capiatur p ita, ut factor 59 tollatur, quod fit si $p=10$, $k'=59.295=5.59^2$, unde $k'=5$ qui casus est obvius sumendo $y=0$ et $z=x$.

Problema. Invenire numeros f et g, ut fiat $fx^2+gy^2=p^2+fg$.

Solutio. Erit ergo $fg-fx^2-gy^2=-p^2$; addatur x^2y^2 eritque $(f-y^2)(g-x^2)=x^2y^2-p^2$. Fiat $f-y^2=xy-p$, erit $g-x^2=xy+p$, ideoque $f=y^2+xy-p$ et $g=x^2+xy+p$, unde si f detur, ob $p=y^2+xy-f$, erit $g=x^2+y^2+2xy-f$, sive $f+g=(x+y)^2=\square$. Quoties ergo $f+g$ fuerit quadratum, problemati satisfit; satisfiet ergo quoque, dummodo fuerit $fm^2+gn^2=\square$.

Theorema. Si fuerit $fx^2+gy^2=sz^2$ casu, quo $s=h$; tum etiam aequatio subsistere potest, quoties fuerit $s=h\mp4nfg$, dummodo hic numerus fuerit primus.

Hujus theorematis demonstratio etiamnum desideratur.

Exemplum. Sit $2x^2+3y^2=sz^2$ quod fieri potest si $s=5$. Idem ergo praestari potest si fuerit $s=5+24n$, unde hi numeri primi oriuntur: 5, 29, 53, 101, 149, 173, 197, 269, etc. Cum ergo sit $2x^2+3y^2=101z^2$, ita, ut in superiori calculo sit $h=101$; erit $s=101(p^2+6)$. Fiat p^2+6 per 101 divisibile, sive $p^2=101n-6$, unde nascetur haec progressio arithmetica

0	1	2	3	4	5	6	
−6	95	196	297	398	499	600	etc.

ex qua vero illi numeri n valores excluduntur, qui habent sequentes formas

$$3\alpha+1, \quad 4\alpha, \quad 4\alpha+1, \quad 5\alpha+1, \quad 5\alpha+2.$$

Casui nostro satisfit si $p=14$, unde fit $s=2$; qui vero casus $2x^2+3y^2=2z^2$ est obvius; fit enim $y=0$. Pro

eodem casu fit $s=149$; unde alius $149(p^2+6)$, ideoque $149n-6$ debet esse quadratum; unde excluduntur:

$$3\alpha+1,\ 4\alpha,\ 4\alpha+1,\ 5\alpha+1,\ 5\alpha+2,$$

remanent pro n ergo 3α, $3\alpha+2$, etc. et in numeris 3, 14, 15, 23, ubi $p=21$ satisfacit, seu $n=3$; $s=149.3.149=3$, unde iterum nascitur casus obvius. Omnes autem numeri primi pro s, quibus formula $2x^2+3y^2=sz^2$ subsistere potest, continentur in his duabus formulis $24n+5$ et $24n+11$, quibus adjungi debent 2 et 3 et praeterea nulli alii satisfaciunt, ita, ut satisfacientes ordine sint:

2, 3, 5, 11, 29, 53, 59, 83, 101, 107, 131, 149, 173, 179, 197.

Aliud judicium, utrum talis aequatio $fx^2+gy^2=hz^2$ *sit possibilis.*

Dividantur omnia quadrata per numerum h et notentur residua, quae sint 1, a, b, c, d, etc. et quadratum x^2 det residuum a, y^2 vero det b, sicque formula fx^2+gy^2 dabit residuum $af+bg$, quod cum per h debeat esse divisibile, fieri poterit $af+bg=0$, ideoque $b=\frac{-af}{g}$; ergo quodvis residuum si per $\frac{-f}{g}$ multiplicetur, iterum erit residuum. Quia autem $\frac{-f}{g}$ est fractus, ejus loco scribatur $\frac{nh-f}{g}$, ubi n ita sumatur, ut $nh-f$ fiat divisibile per g et quotus sit k, qui si inter residua reperiatur, aequatio erit possibilis; sin secus, impossibilis. Sic proposita aequatione $2x^2+3y^2=29z^2$, ubi $f=2$, $g=3$ et $h=29$, quaerantur residua quadratorum per 29 divisorum, quae sunt numero 14, nempe:

1, 4, 9, 16, 25, 7, 20, 6, 23, 13, 5, 28, 24, 22.

Quaeratur ergo $\frac{29n-2}{3}=9$ posito $n=1$. Quia ergo 9 inter residua occurrit, haec forma est possibilis. Sin autem proponatur $2x^2+3y^2=17z^2$, quadrata per 17 divisa dant residua

1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13.

Nunc debet esse $\frac{17n-2}{3}=$ numero integro 5, qui cum non sit inter residua, indicat aequationem esse impossibilem.

Hoc vero judicium non certum videtur, nam si aequatio hac forma exhibeatur $17z^2-2x^2=3y^2$, ubi $f=17$, $g=-2$ et $h=3$, residuum quadratorum est unicum 1; at vero $\frac{3n-17}{-2}=7$, si $n=1$, et denuo per 3 dividendo prodit 1, quod est residuum, et tamen aequatio est impossibilis.

Notari meretur aequatio $7x^2+2y^2=23z^2$, quia ipse numerus 23 non in forma $7a^2+2b^2$ continetur, siquidem a et b sint integri; at si $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{10}{3}$, fit utique $\frac{207}{9}=23$. Per regulam primam autem ex 23 prodit alius $23(p^2+14)$. Sumatur $p=3$ proditque unitas.

(*J. A. Euler.*)

Ut dubium circa criterium postremum tollatur, observandum est primum, criterium eo redire, num inter residua quadratorum per h divisorum occurrat numerus $-fg$, sive $nh-fg$, qui si non occurrat, aequatio $fxx+gyy=hzz$ certe est impossibilis; sin autem occurrat, plus inde non sequitur, quam vel hanc ipsam aequationem $fxx+gyy=hzz$, vel istam $xx+fgyy=hzz$ esse possibilem; unde fieri potest, ut prior non sit possibilis, tum autem certo posterior fit possibilis.

A. m. T. I. p. 201—207.

43.

(*W. L. Krafft.*)

PROBLEMA. Formulam mx^3+n quadratum reddere ex casu cognito $ma^3+n=bb$.

SOLUTIO. Ponatur $x=a+y$ et formula proposita fiet

$$bb+3maay+3mayy+my^3=\square,$$

cujus radix ponatur $b+\frac{3maa}{2b}y$; hujus quadratum

$$bb+3maay+\frac{9mma^4}{4bb}yy \quad \text{praebet}$$

$$3a+y=\frac{9ma^4}{4bb}=\frac{9a(bb-n)}{4bb}$$

unde $y=-\frac{3a}{4}-\frac{9an}{4bb}$, ergo $x=\frac{a}{4}-\frac{9an}{4bb}$. Sin autem radix ponatur $b+\frac{3maa}{2b}y+pyy$, erit

$$3mayy+my^3=2bpyy+\frac{9mma^4}{4bb}yy+\frac{3mpaay^3}{b}+ppy^4.$$

Jam fiat $3ma=2bp+\frac{9mma^4}{4bb}=2bp+\frac{9am(bb-n)}{4bb}$, ergo

$$2bp=3ma-\frac{9am(bb-n)}{4bb}=\frac{3ma}{4}+\frac{9amn}{4bb}, \quad \text{ergo}$$

$$p=\frac{3ma}{8b}+\frac{9amn}{8b^3}=\frac{3ma}{8b}\left(1+\frac{3n}{bb}\right).$$

Superest haec aequatio $1=\frac{3paa}{b}+\frac{ppy}{m}$, ergo

$$\frac{ppy}{m}=1-\frac{3paa}{b}=1-\frac{9ma^3}{8bb}-\frac{27a^3mn}{8b^4}=-\frac{1}{8}+\frac{9n}{8bb}-\frac{27n}{8bb}+\frac{27nn}{8b^4}$$

$$=-\frac{1}{8}-\frac{9n}{4bb}+\frac{27nn}{8b^4}, \quad \text{ergo} \quad y=\frac{m}{8pp}\left(-1-\frac{18n}{bb}+\frac{27nn}{b^4}\right).$$

(*Lexell.*)

Annotatio ad superiorem formulam $mx^2+n=\square$, *ubi ex dato casu* $ma^2+n=bb$ *ope transformationis elicuimus novum casum.*

Omni attentione dignum videtur, quod si n fuerit numerus quadratus $=kk$, ex casu cognito $ma^2+kk=bb$ immediate duo alii elici queant hoc modo: Ponatur $x=az$, ut habeatur $ma^2z^2+kk=\square$, hoc est

$$(bb-kk)z^2+kk=\square=yy, \quad \text{ita ut sit} \quad (bb-kk)z^2=yy-kk=(y+k)(y-k).$$

Resolvetur ergo formula $(bb-kk)z^2$ etiam in duos factores, quod duplici modo fieri potest:

I. Sit unus factor $(b+k)zz=y+k$, eritque alter $(b-k)z=y-k$, haec aequatio ab illa subtracta relinquit $(b+k)zz-(b-k)z=2k$, cujus una radix manifesto est $z=1$, unde pro altera fit

$$z=\frac{-2k}{b+k}, \quad \text{ergo} \quad x=\frac{-2ak}{b+k}.$$

II. Sit jam prior factor $(b-k)zz=y-k$, et alter dabit $(b+k)z=y+k$, unde fit differentia

$$(b-k)zz-(b+k)z=-2k,$$

cujus una radix est $z=1$, et altera $\quad z=\frac{2k}{b-k}$ et $x=\frac{2ak}{b-k}$.

Unde conficimus istud egregium THEOREMA:

Si formula mx^2+kk fuerit quadratum casu $x=a$, ita ut sit $ma^2+kk=bb$, tum etiam quadratum erit his duobus casibus:

$$\text{primo:} \quad x=\frac{-2ak}{b+k}, \quad \text{et altero:} \quad x=\frac{+2ak}{b-k}.$$

Exempli gratia, cum formula $90x^2+1$ fiat quadratum casu $x=\frac{1}{2}$; fiet enim $90\cdot\frac{1}{8}+1=\frac{49}{4}$, ubi est $a=\frac{1}{2}$, $k=1$ et $b=\frac{7}{2}$, bini casus derivati erunt $x=-\frac{2}{9}$ et $x=+\frac{2}{5}$; ex priore enim fit $\frac{-10.8}{81}+1=\frac{1}{81}$, et ex posteriore $\frac{90.8}{5^3}+1=\frac{18.8}{25}+1=\frac{169}{25}$. A. m. T. I. p. 120. 121.

44.

Omni attentione digna est haec formula $181^2+7=32^3$; nam etsi $32=5^2+7$, tamen nullo modo est $181+\sqrt{-7}=(5+\sqrt{-7})^3$, verum tamen est

$$181+\sqrt{-7}=\left(\frac{1+3\sqrt{-7}}{8}\right)(5+\sqrt{-7})^3.$$

Notandum autem est $\frac{1+3\sqrt{-7}}{8}\cdot\frac{1-3\sqrt{-7}}{8}=1$; unde patet evolutionem illam per factores imaginarios profundiorem investigationem requirere.

Problema. Invenire in integris quadratum et cubum, quorum differentia sit valde parva, veluti

$$32^3-181^2=7 \quad\text{et}\quad 253^2-40^3=9.$$

Cum proxime esse debeat $x^2=y^3$, ponatur $x=p^3+a$, hincque fit

$$y=(p^3+a)^{\frac{2}{3}}=pp+\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{p}-\frac{aa}{9p^4}\text{ etc.}$$

unde si p et a ita sumantur, ut haec formula proxime aequetur numero integro y, problema erit solutum; veluti sumto $a=3$ et $p=2$, formula illa dat $y=5$ et $x=11$, fit autem 11^2 proxime $=5^3$.

A. m. T. I. p. 127.

45.

(*J. A. Euler.*)

Si debeat esse $13xx+12=\square$, valores pro x erunt

$$1,\quad 2,\quad 13,\quad 23,$$

quorum ordo ita se habet

$$-23,\quad -2,\quad +1,\quad +13,\ \ldots\ p,\quad q,\quad r$$

existente $r=11q-p$, ubi numerus 11 inde oritur, quod sit $\frac{11}{2}=\sqrt{(13\cdot\frac{9}{4}+1)}$.

Si debeat esse $5xx+44=\square$, valores pro x erunt

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 7,\quad 14,\quad 19,\quad 37,\quad 50,$$

quorum ordo ita se habet

$$-50,\quad -19,\quad -7,\quad -2,\quad +1,\quad +5,\quad +14,\quad +37,\ \ldots\ p,\quad q,\quad r$$

et $r=3q-p$, propter $\frac{3}{2}=\sqrt{(5\cdot\frac{1}{4}+1)}$.

Ut $3xx-143=\square$ debet esse $x=7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 23,\ 28$, quae multitudo est notatu digna et inde venit quod $143=11.13$.

A. m. T. I. p. 135. 136.

46.

Problema. Datis numeris a et b, invenire omnes numeros x, ut haec formula $ax+b$ fiat quadratum,

Ponatur $x=ayy+2py+q$ et quadratum esse debet

$$aayy+2apy+aq+b=\square,\text{ quod fit, si } p=\sqrt{(aq+b)}.$$

Cognito ergo unico casu, qui sit $aq+b=pp$, erit

$$x=ayy\pm2py+q,$$

quae formula omnes solutiones continet.

Exemplum. Sit $a=7$ et $b=2$, et formula nostra $7x+2$. Quia $7.1+2=3^2$, erit $q=1$ et $p=3$, ergo omnes casus sunt $x=7yy\pm 6y+1$, quae formula praebet hos numeros pro x:

Existente y	prodit x		
0	1		
1	$7\pm 6+1$;	2 vel	14
2	29 ± 12;	17 vel	41
3	64 ± 18;	46 vel	82
4	113 ± 24;	89 vel	137
etc.	etc.		

Lex progressionis valorum pro x:

1, 2, 14, 17, 41, 46, 82, 89, 137, etc.

Diff. 1 12 3 24 5 36 7 48 9 60 etc.

A. m. T. I. p. 214.

47.

Zwei Trigonalzahlen zu finden, deren Produkt wieder eine Trigonalzahl sei.

Also
$$\frac{xx+x}{2}\cdot\frac{yy+y}{2}=\frac{zz+z}{2},\quad\text{oder}\quad x(x+1)\,y(y+1)=2z(z+1),\quad\text{oder}$$
$$pq\,.\,x(x+1)\,y(y+1)=2z(z+1)\,.\,pq.$$

Nun mache man $px(y+1)=2qz$ und $qy(x+1)=p(z+1)$, so wird aus dem ersten Satze
$$z=\frac{px(y+1)}{2q},\quad\text{und aus dem andern:}\quad z=\frac{qy(x+1)}{p}-1.$$

Daher
$$2qqy(x+1)-2pq=ppx(y+1),$$
welches sich auch so darstellen lässt
$$xy(2qq-pp)+2qqy-2pq-ppx=0.$$

Es sei nun $2qq-pp=a$, so ist
$$axy+2qqy-ppx-2pq=0,\quad\text{und hieraus}\quad y=\frac{ppx+2pq}{ax+2qq},$$

also
$$ay=\frac{appx+2apq}{ax+2qq}\quad\text{und}\quad ay-pp=\frac{2apq-2ppqq}{ax+2qq}.$$

Es sei nunmehr $2ppqq-2apq=2pq(pq-a)=fg$, so haben wir $pp-ay=\frac{fg}{ax+2qq}$. Nun setze man $ax+2qq=f$, so wird $pp-ay=g$, folglich $y=\frac{pp-g}{a}$ und $x=\frac{f-2qq}{a}$, wo leicht zu machen, dass $a=1$ sei.

Exempel. Man nehme $p=7$, $q=5$, $a=1$, so ist $fg=34.70=4.5.7.17$. Daher wird
$$x=f-50\quad\text{und}\quad y=49-g.$$

Es sei $g=20$, $f=119$, so ist $x=69$ und $y=29$;

also die zwei Trigonalzahlen 35.69 und 15.29. Da nun $z=\frac{px(y+1)}{2}=7.69.3=1449$, so ist
$$\frac{zz+z}{2}=1449.725,\quad\text{welches in der That}=69.35.29.15\text{ ist.}$$

Es sei ferner $f=85=5.17$, so wird $g=4.7=28$, $x=35$, $y=21$; mithin die beiden Trigonalzahlen 35.18 und 11.21. Es ist aber $z=7.7.11=539$, also

$$\frac{zz+z}{2}=539.270=35.18.11.21.$$

A. m. T. 1. p. 254.

48.

(*N. Fuss I.*)

Problema. Invenire numeros integros x et y, ut fiat $axx-byy=A$.

Solutio. Primo notandum est hoc fieri non posse, nisi fuerit $A=aff-bgg$; deinde quaerantur per problema Pellianum numeri m et n, ut fiat $mm=abnn+1$, sive $m=\sqrt{(abnn+1)}$. Cum ergo sit $mm-abnn=1$, erit quoque $(mm-abnn)^{\lambda}=1$; ponere igitur licebit

$$axx-byy=(aff-bgg)(mm-abnn)^{\lambda},$$

quae forma in factores irrationales resoluta dabit

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{b}=(f\sqrt{a}+g\sqrt{b})(m+n\sqrt{ab})^{\lambda},$$

quod posterius productum evolvatur et termini signo $\sqrt{a}$ affecti aequentur ipsi $x\sqrt{a}$; reliqui termini signo $\sqrt{b}$ affecti aequentur ipsi $y\sqrt{b}$, hocque modo tam x quam y per numeros integros determinabitur, quod exemplo illustremus:

Exemplum. Quaerantur numeri x et y, ut fiat $3xx-yy=2$, ubi $a=3$ et $b=1$; erit autem $2=3ff-gg$ sumendo $f=1$ et $g=\pm 1$; quia igitur $ab=3$, fiet $m=\sqrt{(3nn+1)}$. Sumendo $n=1$ et $m=2$, unde nostra formula erit $x\sqrt{3}+y=(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^{\lambda}$

$$\begin{array}{llll} \text{si} & \lambda=0 & \text{erit} & x\sqrt{3}+y=\sqrt{3}+1 \\ & \lambda=1 & \cdot & x\sqrt{3}+y=3\sqrt{3}+5 \\ & \lambda=2 & \cdot & x\sqrt{3}+y=11\sqrt{3}+19 \\ & \lambda=3 & \cdot & x\sqrt{3}+y=41\sqrt{3}+71 \\ & \lambda=4 & \cdot & x\sqrt{3}+y=153\sqrt{3}+265. \end{array}$$

Ceterum valores tam ipsius x quam ipsius y constituunt series recurrentes, quarum ultimus quisque terminus per $2m$ multiplicatus demto penultimo, praebet sequentem; sic in nostro exemplo, ubi $2m=4$, litterae x et y ita procedant

$$x=1,\ 3,\ 11,\ 41,\ 153$$
$$y=1,\ 5,\ 19,\ 71,\ 265.$$

Occasione problematis Pelliani, seu formulae $m=\sqrt{(abnn+1)}$, praeter casus, ubi est vel $ab=\alpha\alpha\pm 1$, vel $ab=\alpha\alpha\pm 2$, etiam sequentes casus generaliores locum habent, scilicet si fuerit $ab=\alpha\alpha\beta\beta\pm\beta$, fiet $nn=4\alpha\alpha$ et $n=2\alpha$ et $m=2\alpha\alpha\beta\pm 1$. Deinde si fuerit $ab=\alpha\alpha\beta\beta\pm 2\beta$, erit $n=\alpha$ et $m=\alpha\alpha\beta\pm 1$.

A. m. T. I. p. 277.

49.

Problema. Invenire duos numeros p et q, ut fiat $(pp+1)^2+(qq+1)^2=\square$.

Solutio. Ponatur $pp+1=xx-yy$ et $qq+1=2xy$ eritque $pp=xx-yy-1$ et $qq=2xy-1$. Sit jam $p=x-z$, erit $2xz-zz=yy+1$, unde fit

$$x = \frac{zz+yy+1}{2z}, \quad \text{hinc} \quad qq = \frac{yzz+y^3+y}{z} - 1.$$

Statuatur nunc $y = nz$ fietque $qq = nzz + n^3zz + n - 1$. Capiatur ergo $n = 2$, ut sit $y = 2z$, erit $qq = 10z^2 + 1$, cui satisfit:

1) Si $z = \frac{2}{3}$; tum erit $qq = \frac{49}{9}$, ergo $q = \frac{7}{3}$. Porro $y = \frac{4}{3}$, unde $x = \frac{29}{12}$ et $p = \frac{7}{4}$. Tum igitur formula

$$\left(\frac{49}{16}+1\right)^2 + \left(\frac{49}{9}+1\right)^2, \quad \text{erit quadratum radicis} \quad xx+yy = \frac{841}{144} + \frac{16}{9} = \frac{1097}{144}.$$

2) Sumatur $z = \frac{2}{9}$, erit $qq = \frac{121}{81}$, hinc $q = \frac{11}{9}$; tum vero $y = \frac{4}{9}$ et $x = \frac{5zz+1}{2z} = \frac{101}{36}$, ergo

$$p = \frac{101}{81} - \frac{2}{9} = \frac{83}{81}.$$

3) Sumatur $z = 6$, erit $qq = 361$ et $q = 19$, porro $y = 12$ et $x = \frac{181}{12}$ et $p = \frac{109}{12}$, ergo

$$\left(\frac{109^2}{144}+1\right)^2 + (361+1)^2 = \left(\frac{181^2}{144}+144\right)^2.$$

A. m. T. I. p. 279.

50.

Problema difficillimum,

quo quatuor biquadrata quaeruntur, quorum summa itidem sit biquadratum,

sive ut sit $A^4 + B^4 + C^4 + D^4 = E^4$,

siquidem fieri potest, sequenti modo tractandum videtur:

Statuatur scilicet $A^2 = \frac{pp+qq+rr-ss}{n}$, $B^2 = \frac{2ps}{n}$, $C^2 = \frac{2qs}{n}$ et $D^2 = \frac{2rs}{n}$; tum enim fiet

$$E^2 = \frac{pp+qq+rr+ss}{n},$$

ita, ut haec quinque formulae quadrata reddi debeant. Incipiamus a prima et ultima, ita, ut reddi debeat

$$\frac{pp+qq+rr}{n} \pm \frac{ss}{n} = \Box.$$

Cum igitur sit $aa + bb \pm 2ab = \Box$, statuatur

$$\frac{pp+qq+rr}{n} = aa+bb \quad \text{et} \quad \frac{ss}{n} = 2ab,$$

fit ergo $ss = 2nab = \Box$. Sit $2n = \alpha\beta$ et statuatur $a = \alpha ff$ et $b = \beta gg$ eritque

$$ss = \alpha\alpha\beta\beta ffgg, \quad \text{ergo} \quad s = \alpha\beta fg = 2nfg;$$

tum vero esse debet $$\frac{pp+qq+rr}{n} = \alpha\alpha f^4 + \beta\beta g^4.$$

Pro reliquis conditionibus faciamus $\frac{2ps}{n} = 4pfg = 4xx$, unde $p = \frac{xx}{fg}$, porro $\frac{2qs}{n} = 4qfg = 4yy$, hinc $q = \frac{yy}{fg}$, pro quarta $\frac{2rs}{n} = 4rfg = 4zz$, habemus $r = \frac{zz}{fg}$. Hinc superest ista aequatio

$$\frac{pp+qq+rr}{n} = \alpha\alpha f^4 + \beta\beta g^4, \quad \text{sive} \quad pp+qq+rr = \frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha\alpha f^4 + \beta\beta g^4),$$

et loco p, q, r valores inventos substituendo

$$\frac{x^4}{f^2g^2} + \frac{y^4}{f^2g^2} + \frac{z^4}{f^2g^2} = \frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha\alpha f^4 + \beta\beta g^4), \quad \text{sive} \quad x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}\alpha\beta ffgg(\alpha\alpha f^4 + \beta\beta g^4).$$

Quodsi jam hic restituamus $\alpha ff = a$ et $\beta gg = b$, colligitur $x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2} ab(aa + bb)$. Quaeritur ergo num huic aequationi satisfieri possit; tum autem fiet

$$n = \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad s = 2nfg \text{ vel } \alpha\beta fg, \quad \text{et} \quad p = \frac{xx}{fg}, \quad q = \frac{yy}{fg} \quad \text{et} \quad r = \frac{zz}{fg},$$

atque hinc porro $\qquad A = a - b$ et $E = a + b$, $B = 2x$, $C = 2y$ et $D = 2z$,

verum ne his quidem ambagibus est opus, cum enim fieri debeat $B^4 + C^4 + D^4 = E^4 - A^4$. Statuatur

$$A = a - b \quad \text{et} \quad E = a + b, \quad \text{fietque} \quad E^4 - A^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab(aa + bb),$$

ergo utrinque per 16 dividendo prodit

$$\frac{1}{2} ab(aa + bb) = \frac{B^4 + C^4 + D^4}{16} = x^4 + y^4 + z^4.$$

A. m. T. I. p. 281.

51.

Notatu digna est haec formula: $1 + z - z^2$, quae fit quadratum sumto $z = \frac{11}{9}$, qui tamen valor per regulas vulgares non elicitur. Hinc ista quaestio:

Numerum 2 dividere in duas partes x et $2 - x$, quarum productum $2x - xx$ sit numerus formae $z^3 - z$; tum enim erit $1 - 2x + xx = 1 + z - z^3$, ideoque $1 - x = \sqrt{(1 + z - z^3)}$. Sumto ergo $z = \frac{11}{9}$, erit $1 - x = \frac{17}{27}$, hinc $x = \frac{10}{27}$, et altera pars $2 - x = \frac{44}{27}$, quarum productum est

$$2x - xx = \frac{440}{27^2}, \text{ at vero } z^3 - z = \frac{1331}{729} - \frac{11}{9} = \frac{440}{27^2}.$$

A. m. T. I. p. 295.

52.

Theorema I. Si p denotet numerum primum quemcunque, talis aequatio $z^2 = py^2 \pm ppx^2$ semper est impossibilis.

Demonstratio. Quia enim esse deberet z^2 divisibile per p, ideoque $z = pA$, unde fieret

$$ppA^2 = y^2 \pm px^2, \quad \text{sive} \quad y^2 = ppA^2 \mp px^2;$$

foret igitur etiam y divisibilis per p. Sit ergo $y = pB$, unde fieret $ppB^2 = pA^2 \mp x^2$, hinc ergo etiam x divisibile esse debet per p; hincque ponatur $x = pC$; unde fiet $ppC^2 = A^2 - pB^2$; foret igitur eodem modo $A = pD$, foretque $ppD^2 = pC^2 + B^2$, tum vero etiam B per p divisibilis esse deberet, porro etiam C, D, etc. in infinitum. Hoc ergo modo singulae litterae z, y, x non solum per p, sed etiam per pp, per p^3 atque adeo per p^∞ deberent esse divisibiles; quod cum sit absurdum, veritas theorematis est evicta.

Theorema II. Si numeri a, b, c fuerint primi ad p, ita ut nullus eorum per p sit divisibilis, tum etiam haec aequatio $az^2 \pm bpy^2 \pm cppx^2 = 0$ semper est impossibilis.

Demonstratio. Quia enim a per p non est divisibile, z deberet esse divisibile, tum vero etiam pari modo y et x, sicque ad eandem aequationem perveniretur, unde patet impossibilitas, uti casu praecedente.

Corollarium. Eadem demonstratio quoque habet locum, si p fuerit productum ex duobus vel pluribus numeris primis diversis, veluti si sit $p = 2.3$, vel 3.5, vel $3.5.7$, etc.

Theorema III. Si p sit vel numerus primus, vel productum ex aliquot numeris primis diversis, tum vero numeri a, b, c, d, etc. sint numeri ad p primi, tum etiam haec aequatio semper est impossibilis:

$$az^4 \pm bpy^4 \pm cppx^4 \pm dp^3v^4 = 0.$$

Quia ob rationes superiores singuli numeri z, y, x, v, etc. non solum per p, sed per omnes potestates ipsius p deberent esse divisibiles. Taliaque theoremata ad potestates altiores extendi possunt.

NB. Hae autem demonstrationes vim perderent suam, si esset $p = 1$, quia omnes plane numeri divisibiles sunt per omnes potestates ipsius 1.

A. m. T. II. p. 10. 11.

53.

Problema. Reddere hanc formulam quadratum: $(A + Bz)(a + bz + czz + dz^3)$.

Solutio. Statuatur hoc quadratum $= (A + Bz)^2 (p + qz)^2$ fietque

$$\left.\begin{matrix} App \\ -a \\ \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} +2Apq \\ +Bpp \\ -b \end{matrix}\right\} z \quad \left.\begin{matrix} +Aqq \\ +2Bpq \\ -c \end{matrix}\right\} zz \quad \left.\begin{matrix} +Bqq \\ -d \end{matrix}\right\} z^3 = 0,$$

ubi duae solutiones sunt considerandae, primo si $pp = \frac{a}{A}$, sumatur $q = \frac{b - Bpp}{2Ap}$, tum erit $z = \frac{c - Aqq - 2Bpq}{Bqq - d}$. Altera solutio locum habet si $qq = \frac{d}{B}$; tum sumatur

$$p = \frac{c - Aqq}{2Bq} \quad \text{eritque} \quad z = \frac{a - App}{2Apq + Bpp - b}.$$

Problema. Si proposita fuerit haec formula $(A + Bz + Czz)(a + bz + czz)$, eam reddere quadratum.

Solutio. Ponatur hoc quadratum $= pp(a + bz + czz)^2$ fietque

$$A + Bz + Czz = ppa + ppbz + ppczz.$$

Hic ergo si fuerit $pp = \frac{A}{a}$, statim fit $z = \frac{ppb - B}{C - cpp}$. Secundo si fuerit $pp = \frac{C}{c}$, erit $z = \frac{app - A}{B - bpp}$.

In genere autem si satisfaciat valor $z = f$, quo casu fit $pp = \frac{A + Bf + Cff}{a + bf + cff}$, tum semper alius valor potest inveniri; quoniam enim habetur haec aequatio quadratica

$$zz - \frac{B - bpp}{C - cpp} z + \frac{A - app}{C - cpp} = 0,$$

eaque per hypothesin radicem habeat $z = f$; erit quoque $z = g$ existente

$$\text{tam} \quad f + g = \frac{bpp - B}{C - cpp} \quad \text{quam} \quad fg = \frac{A - app}{C - cpp},$$

unde duplici modo alter valor g reperitur. Hoc adhuc clarius ita ostendi potest. Cum esse debeat

$$A + Bz + Czz = pp(a + bz + czz),$$
$$\text{tum vero} \quad A + Bf + Cff = kk(a + bf + cff),$$

semper alius valor pro z assignari potest, existente pariter $p = k$. Dividatur prior aequatio per posteriorem fietque

$$\frac{A + Bz + Czz}{A + Bf + Cff} = \frac{a + bz + czz}{a + bf + cff};$$

subtrahendo utrinque unitatem et dividendo per $z - f$ prodit

$$\frac{B + C(z + f)}{A + Bf + Cff} = \frac{b + c(z + f)}{a + bf + cff},$$

unde f facile definitur.

Hac methodo insuper duo alii valores reperiri possunt. Cum enim sit

$$\frac{A+Bz+Czz}{A+Bf+Cff}=\frac{a+bz+czz}{a+bf+cff},$$

multiplicetur utrinque per $\frac{f}{z}$, ut habeatur

$$\frac{Af+Bfz+Cfzz}{Az+Bfz+Cffz}=\frac{af+bfz+cfzz}{az+bfz+cffz}$$

et sublata unitate erit

$$\frac{A(f-z)+Cfz(z-f)}{Az+Bfz+Cffz}=\frac{a(f-z)+cfz(z-f)}{az+bfz+cffz},$$

sive

$$\frac{A-Cfz}{A+Bf+Cff}=\frac{a-cfz}{a+bf+cff},$$

unde tertius desumitur valor. Porro multiplicetur utrinque per $\frac{ff}{zz}$, ut sit

$$\frac{Aff+Bffz+Cffzz}{Azz+Bfzz+Cffzz}=\frac{aff+bffz+cffzz}{azz+bfzz+cffzz} \text{ et unitate utrinque sublata } \frac{A(f+z)+Bfz}{A+Bf+Cff}=\frac{a(f+z)+bfz}{a+bf+cff}.$$

Horum valorum quilibet pro f assumtus praebebit duos novos valores, ita ut hoc modo infiniti valores reperiri queant. Sit $A=2$, $B=3$, $C=-1$, $a=3$, $b=-1$, $c=2$, ut debeat esse $\frac{2+3z-zz}{3-z+2zz}=\square$. Cui primo satisfacit $z=1$. Sit ergo $f=1$, erit secundo $\frac{3-z-1}{4}=\frac{2(z+1)-1}{4}$, unde $z=1$; tertio $2+z=3-2z$, unde $z=\frac{1}{3}$; quarto $2+2z+3z=3+3z-z$, unde $z=\frac{1}{3}$.

Interim tamen haec methodus nihil plane juvat, sed tantum duos valores ostendit. Cum enim f sit numerus definitus, aequatio $\frac{A+Bz+Czz}{A+Bf+Cff}=\frac{a+bz+czz}{a+bf+cff}$ manifesto est aequatio quadratica determinata, quae tantum duos admittit valores. Interim tamen haec methodus cum successu adhibitur in resolutione hujus formulae simplicioris $a+bz+czz=pp$, casusque constet, quo $a+bf+cff=kk$, erit igitur $\frac{a+bz+czz}{a+bf+cff}=\frac{pp}{kk}$. Jam sumatur primo $pp=kk$, fietque $b+c(z+f)=0$, unde $z=\frac{-b-cf}{c}$. Deinde sumatur $\frac{pp}{kk}=\frac{zz}{ff}$ eritque

$$ppff=kkzz, \quad \text{ideoque} \quad aff+bffz+cffzz=azz+bfzz+cffzz,$$

unde fit

$$a(f+z)+bfz=0 \quad \text{atque} \quad z=\frac{-af}{a+bf},$$

qui posterior valor loco f assumtus denuo novum valorem praebet, et ita porro.

Verum hoc casu solutio generalis ita reperiri potest. Sumatur $p=k+v(z-f)$, ut sit

$$\frac{a+bz+czz}{a+bf+cff}=\frac{kk+2kv(z-f)+vv(z-f)^2}{kk}.$$

Subtrahatur utrinque unitas eritque

$$\frac{b+c(z+f)}{kk}=\frac{2kv+vv(z-f)}{kk}, \quad \text{unde reperitur} \quad z=\frac{2kv-fvv-b-cf}{c-vv},$$

unde prior oritur posito $v=0$, posterior vero posito $v=\frac{k}{f}$.

A. m. T. II. p. 155. 156.

54.

Theorema. Si fuerit p numerus primus formae $4n+1$, semper dabitur numerus x, minor quam n, ut fiat $px-1=\square$.

Demonstratio. Cum sit $p=4n+1$, erit $p=aa+bb$. Jam quaeratur fractio $\frac{c}{d}$ proxime aequalis fractioni $\frac{a}{b}$ ita, ut sit $ad-bc=\pm 1$, eritque $x=cc+dd$. Semper enim numeri c et d infra semisses numerorum a et b assignari possunt; tum autem erit $px-1=(ac+bd)^2$. Erit enim

$$px = (aa + bb)(cc + dd) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

at $ad - bc = \pm 1$ per hypothesin, unde $px - 1 = (ac + bd)^2$.

Exemplum. Sit $p = 193$, erit $a = 12$ et $b = 7$, porro $c = 5$ et $d = 3$, unde fit

$$x = 34 \quad \text{eritque} \quad px - 1 = 81^2.$$

A. m. T. II. p. 167.

55.

Theorema numericum profundissimae indaginis.

Si m, n et z denotent numeros integros positivos, tum ista formula

$$4mnz - m - n$$

nunquam evadere potest quadratum.

Hoc theorema inde est derivatum, quod inter divisores formae $mxx + yy$ occurrat formula $4mz + 1$, unde sequitur, formulam $4mz - 1$ nunquam esse posse divisorem illius formae $mxx + yy$, vel saltem hujus $m + yy$, unde haec aequatio

$$(4mz - 1)\, n = m + yy$$

semper erit impossibilis. Sit $\sqsupset\sqsubset$ signum impossibilitatis eritque $(4mz - 1)n - m \sqsupset\sqsubset yy$ sive $(4mz - 1)n - m \sqsupset\sqsubset \square$. Verum hoc fundamentum nondum est rigide demonstratum, ideoque demonstratio hujus theorematis plurimum desideratur. Interim tamen evidens est ejus veritas casibus, quibus est $m + n = 4i + 2$, quia tum fit $4mnz - 4i - 2$ numerus impariter par, a quadrato abhorrens. Dein etiam casu $m + n = 4i + 1$, quia tum prodit forma $4mnz - 4i - 1$, sive forma $4A - 1$, quae nunquam esse potest quadratum. Demonstrandi igitur tantum restant duo casus, alter, quo $m + n = 4i$, alter vero, quo $m + n = 4i + 3$, vel $4i - 1$. Pro casu priore $m + n = 4i$ sumi poterit $m = 2i - k$ et $n = 2i + k$, unde erit $(2i - k)(2i + k)z - i \sqsupset\sqsubset \square$, sive $(4ii - kk)z - i \sqsupset\sqsubset \square$. Pro altero casu, quo $m + n = 4i - 1$ sumi poterit

$$m = 2i - k \quad \text{et} \quad n = 2i + k - 1, \quad \text{eritque} \quad 4(2i - k)(2i + k - 1)z - 4i + 1 \sqsupset\sqsubset \square,$$

sive hoc modo

$$((4i - 1)^2 - (2k - 1)^2)\, z - 4i + 1 \sqsupset\sqsubset \square.$$

Hinc innumerae formae speciales derivari possunt, veluti ex priore forma $(4ii - kk)z - i \sqsupset\sqsubset \square$, unde casu $i = 1$

prodit $4z - 1 \sqsupset\sqsubset \square$, $3z - 1 \sqsupset\sqsubset \square$, qui per se sunt manifesti

casu $i = 2$: $16z - 2 \sqsupset\sqsubset \square$, $15z - 2 \sqsupset\sqsubset \square$; $12z - 2 \sqsupset\sqsubset \square$, $7z - 2 \sqsupset\sqsubset \square$

casu $i = 3$: $36z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$, $35z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$, $32z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$, $27z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$, $20z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$, $11z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$

casu $i = 4$: $64z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $63z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $60z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $55z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $48z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $39z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$
$28z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$, $15z - 4 \sqsupset\sqsubset \square$.

Hic autem veritas singularum ostendi potest, at vero ex principiis diversissimis. Eodem modo formulae speciales ex altero casu oriundae

$$((4i - 1)^2 - (2k - 1)^2)\, z - 4i + 1 \sqsupset\sqsubset \square.$$

sunt	casu $i = 1$	casu $i = 2$	casu $i = 3$
	$8z - 3 \sqsupset\sqsubset \square$	$48z - 7 \sqsupset\sqsubset \square$	$120z - 11 \sqsupset\sqsubset \square$
		$40z - 7 \sqsupset\sqsubset \square$	$112z - 11 \sqsupset\sqsubset \square$
		$24z - 7 \sqsupset\sqsubset \square$	$96z - 11 \sqsupset\sqsubset \square$
			$72z - 11 \sqsupset\sqsubset \square$
			$40z - 11 \sqsupset\sqsubset \square$

A. m. T. II. p. 211. 212.

56.

Proposita hac formula ad quadratum reducenda: $(qq-pp)^2+(ppqq-1)^2=\square$, statuatur $q=p+z$, et pervenietur ad aequationem, unde per regulas cognitas reperitur

$$z=\frac{-4p(p^4-1)}{3p^4-1}, \quad \text{unde fit} \quad q=\frac{-p(p^4-3)}{3p^4-1},$$

ubi p pro lubitu accipi potest, si modo excludantur casus $p=0$ et $p=\pm 1$. Ita sumto $p=2$ fit $q=\frac{26}{47}$. Si $p=3$ fit $q=\frac{117}{121}$. Si $p=\frac{3}{2}$ erit $q=\frac{99}{454}$. Ita sumto $p=2$ et $q=\frac{26}{47}$ erit $pp-qq=\frac{120.68}{47^2}$, et ob $pq=\frac{52}{47}$ erit $ppqq-1=\frac{5.99}{47^2}$. Quadratum ergo fieri debet $120^2.68^2+5^2.99^2=15^2(8^2.68^2+33^2)$, quod continetur in forma $4aabb+(aa-bb)^2$. Fit enim $8.68=2ab$ ergo $ab=4.68=16.17$ et $33=aa-bb=(a+b)(a-b)$.

Proposita tali formula $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, duplex solutio institui potest:

prior: ponatur $q=np+n-1$, tum enim erit $q+1=(p+1)n$,

altera: ponatur $q=\frac{np+1}{p+n}$, tum enim erit $q+1=\frac{(n+1)(p+1)}{p+n}$ et $q-1=\frac{(n-1)(p-1)}{p+n}$.

Praeterea notetur, hanc formam ad praecedentem $(qq-pp)^2+(ppqq-1)^2$ reduci ponendo $p=fg$ et $q=\frac{f}{g}$, unde etiam solutio praecedentis formulae hic adhiberi potest. Fluunt autem istae formulae ex solutione hujus problematis $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$, $bb+cc=\square$. Primo enim sumatur $b=\frac{pp-1}{2p}.a$, erit $aa+bb=\left(\frac{pp+1}{2p}\right)^2 aa$ et $c=\frac{qq-1}{2q}.a$. Tertia formula evadet $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2$. Altera solutio ita se habet: Sumatur $a=2fg$ et $b=ff-gg$, satisfiet primae conditioni. Pro secunda statuatur

$$c=ffgg-1; \quad \text{erit enim} \quad aa+cc=2ffgg+f^4g^4+1.$$

Tertia ergo postulat, ut sit

$$(ff-gg)^2+(ffgg-1)^2=\square.$$

A. m. T. III. p. 9.

57.

Problema. Formulam $2x^4-y^4=zz$ ad hanc $8p^4+q^4=rr$ reducere.

Solutio. Ponatur $2x^4+y^4=\nu$, erit $\nu\nu-z^4=8x^4y^4$, unde fit $8x^4y^4+z^4=\nu\nu$, sicque erit $p=xy$, $q=z$ et $r=\nu=2x^4+y^4$.

Generalius ergo hoc fieri potest, nempe si $\alpha x^4-\beta y^4=zz$ posito $\alpha x^4+\beta y^4=\nu$, erit

$$\nu\nu-z^4=8\alpha\beta x^4y^4, \quad \text{ideoque} \quad \nu\nu=z^4+8\alpha\beta x^4y^4.$$

Problema. Formulam $8p^4+q^4=rr$ ad formam $2x^4-y^4=zz$ reducere.

Solutio. Cum ergo sit $8p^4=rr-q^4=(r+qq)(r-qq)$, manifestum est esse q et r numeros impares. Hinc sequitur, numerorum $r+qq$ et $r-qq$ alterum fore impariter parem, alterum pariter parem, unde nascuntur duo casus:

I. Sit $r+qq$ impariter par $=2\alpha$, alter vero $r-qq$ pariter par $=4\beta$; erit ergo $8p^4=8\alpha\beta$, ideoque $\alpha\beta=p^4$, unde quia α et β sunt primi inter se, uterque debet esse biquadratum. Sit ergo $\alpha=s^4$ et $\beta=t^4$, fiet $p=st$ et $r+qq=2s^4$ et $r-qq=4t^4$, unde oritur $2qq=2s^4-4t^4$, sive $q^2=s^4-2t^4$.

II. Sit $r-qq$ impariter par $=2\alpha$ et $r+qq$ pariter par $=4\beta$, eritque $8p^4=8\alpha\beta$, ideoque $p^4=\alpha\beta$. Sit nunc $\alpha=s^4$ et $\beta=t^4$, eritque $p=st$; ac nunc $r+qq=4t^4$ et $r-qq=2s^4$, ideoque $qq=2t^4-s^4$. Posteriore ergo tantum casu reductio praescripta fieri potest. Interim tamen formula $f^4+8g^4=hh$ semper ad formam $2x^4-y^4$ reduci potest. Quod si enim sumatur $x=f^2+2fgg-gh$ et $y=f^2-4fgg+gh$, semper erit $2x^4-y^4=zz$, existente $z=f^6+f^4gg+24ffg^4-8g^6-6f^3gh$.

Analysis, qua haec reductio est inventa. Posito $2x^4 - y^4 = zz$, debet esse

$$xx = pp + qq, \quad yy = pp + 2pq - qq, \quad \text{tum enim fiet} \quad z = qq + 2pq - pp.$$

Hic ergo p et q ita definiri debent, ut xx et yy fiant quadrata, quod sequenti modo praestari potest: Cum sit $yy - xx = 2q(p-q) = (y+x)(y-x)$, jam statuatur $y + x = \frac{2a}{b}.q$ et $y - x = \frac{b}{a}(p-q)$. Sic enim fiet $yy - xx = 2q(p-q)$. Addantur jam quadrata, fiet

$$2yy + 2xx = \frac{4aa}{bb}qq + \frac{bb}{aa}pp - \frac{2bb}{aa}pq + \frac{bb}{aa}qq.$$

At vero ex primis formulis fiet $2yy + 2xx = 4pp + 4pq$, qui valor illi aequatus et multiplicatione facta per $aabb$ dat

$$(b^4 - 4aabb)pp - 2pq(b^4 + 2aabb) + (b^4 + 4a^4)qq = 0.$$

Hinc radicem extrahendo fit $\frac{p}{q} = \ldots\ldots$

Theorema. Si fuerit $ma^4 - nb^4 = cc$, inde assignari potest talis forma $x^4 - mny^4 = zz$.

Demonstratio. Posito enim $ma^4 + nb^4 = \Delta$, erit $\Delta\Delta = c^4 + 4mna^4b^4$. At in altera formula si ponatur $xx = pp + mnqq$ et $yy = 2pq$, fiet $z = pp - mnqq$. Jam statuatur $p = rr$ et $q = 2ss$, ut fiat $y = 2rs$, hinc fiet $xx = r^4 + 4mns^4$. Facta ergo comparatione erit $x = \Delta$, $r = c$, $s = ab$, unde fit $y = 2abc$, $z = c^4 - 4mna^4b^4$. Hinc ergo necesse est ut fiat

$$x^4 - mny^4 = zz.$$

A. m. T. III. p. 129. 131.

58.

Observatio. Ut formula $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)}$ fiat quadratum, sumatur

$$\begin{array}{lll} & p = aa + bb & r = aa + bb \\ & q = 2aa - bb & s = 2bb - aa \\ \text{hinc} & p + q = 3aa & r + s = 3bb \\ & p - q = 2bb - aa & r - s = 2aa - bb \end{array}$$

substituendo fit formula

$$\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{aa}{bb}.$$

Aliter, sumi etiam potest

$$\begin{array}{lll} & p = bb - 2aa & r = 2bb - 4aa \\ & q = 6aa & s = bb + 4aa \\ \text{hinc} & p + q = bb + 4aa & r + s = 3bb \\ & p - q = bb - 8aa & r - s = bb - 8aa \end{array}$$

ac substituendo:

$$\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \frac{aa}{bb}.$$

Ita sumi potest $p = 7$, $q = 6$, $r = 14$ et $s = 13$, eritque $pq(pp-qq) = 546$, $rs(rr-ss) = 4914$

hinc formula
$$= \frac{546}{4914} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

A. m. T. I. p. 295.

59.

Evolutio generalior formulae: $\frac{pq(pp-qq)}{rs(rr-ss)} = \square = n.$

Hic ponatur $q = \alpha t$ et $s = \beta t$, tum vero $p = \nu r$, unde reperitur

$$\frac{tt}{rr}=\frac{\alpha\nu^2-n\beta}{\alpha^3\nu-n\beta^3}=\left(\frac{\nu}{\alpha}-z\right)^2,$$

unde oritur haec aequatio

$$0=n\beta-n\beta^2zz+\frac{2n\beta^2\nu z}{\alpha}+\alpha^2\nu zz-2\alpha\alpha\nu\nu z-\frac{n\beta^2\nu\nu}{\alpha\alpha},$$

unde patet si $\nu=0$, fore $z=\pm\frac{1}{\beta}$; at si $z=0$, tum erit $\nu=\pm\frac{\alpha}{\beta}$, unde sequentes valores inveniuntur ope harum formularum

$$z+z'=\frac{2\nu}{\alpha},\quad \nu+\nu'=\frac{\alpha z(2n\beta^2+\alpha^2z)}{n\beta^2+2\alpha^2z}.$$

At vero si sumamus $\nu=\infty$, erit $z=\frac{-n\beta^2}{2\alpha^4},\quad \nu=\frac{4\alpha^6-nn\beta^6}{3n\alpha^3\beta^6}$.

Quia hic litteras α et β pro lubitu assumere licet, fortasse hinc novi valores eliciuntur, quos praecedens methodus non dat.

Si ex. gr. $\alpha=1$ et $\beta=2$, ut sit $q=t$ et $s=2t$, tum vero

$$\frac{p}{r}=\nu \quad\text{et}\quad \frac{t}{r}=\nu-z,\quad \text{erit}\quad z+z'=2\nu \quad\text{et}\quad \nu+\nu'=\frac{z(z+16)}{2z+8}.$$

Hinc sumto $\nu=0$, erit $z=\pm\frac{1}{2}$; at si $z=0$ erit $\nu=\pm\frac{1}{2}$. Praeterea si $\nu=\infty$, erit $z=-4$ et sequens $\nu=-\frac{21}{8}$, ex quibus casibus sequentes valores oriuntur

$$\nu=\infty,\quad z=-4,\quad \nu=-\frac{21}{8},\quad z=-\frac{5}{4},\quad \nu=-\frac{8}{11},\quad z=-\frac{9}{44},\quad \nu=\frac{403}{8.167},$$

tum vero $z=0,\quad \nu=\frac{1}{2},\quad z=1,\quad \nu=\frac{6}{5},\quad z=\frac{7}{5},\quad \nu=\frac{19}{18},$

porro $z=0,\quad \nu=-\frac{1}{2},\quad z=-1,\quad \nu=2,\quad z=-3,\quad \nu=-\frac{35}{2},\quad z=-32,\quad \nu=\frac{117}{14},$ etc.

$$\nu=0,\quad z=\frac{1}{2},\quad \nu=\frac{11}{12},\quad z=\frac{4}{3},\quad \nu=\frac{5}{4},\quad z=\frac{7}{6},\quad \nu=\frac{64}{93},\ \text{etc.}$$

$$\nu=0,\quad z=-\frac{1}{2},\quad \nu=-\frac{31}{23},\quad z=-\frac{12}{7},\quad \nu=-\frac{17}{4}.$$

Casu $n=1$, valores ν et z ita se habebunt:

$$\nu=0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \frac{8}{7},\ 1,\ \frac{104}{105},\ 1$$

$$z=1,\ 1,\ -1,\ 3,\ -\frac{5}{7},\ \frac{19}{7},\ -\frac{11}{15},$$

tum vero

$$z=0,\ 2,\ -\frac{4}{5},\ \frac{14}{5},\ -\frac{8}{11},\quad 0,\ -2,\ 4,\ -\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}$$

$$\nu=1,\ \frac{3}{5},\ 1,\ \frac{57}{55},\ 1,\ -1,\ 1,\ \frac{5}{3},\ 1,\ \frac{55}{57}.$$

Tum

$$\nu=\infty,\ 1,\ \frac{7}{8},\ 1,\ \frac{105}{104},\ 1,\ \frac{1455}{1456},\ 1,\ \frac{11.19.97}{16.7.181}=\frac{20271}{20272}$$

$$z=-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{3}{4},\ \frac{11}{4},\ -\frac{19}{26},\ \frac{71}{28},\ -\frac{41}{56},\ \frac{153}{56}.$$

Ita ex casu $\nu=\frac{1455}{1456}=\frac{3.5.97}{16.7.13}$ valores pro p, q, r, s erunt: $p=3.5.97$, $q=2521$, $r=16.7.13$, $s=2521$, $p+q=8.7.71$, $p-q=2.13.41$, $r+s=41.97$, $r-s=3.5.71$, ubi factores utrinque se mutuo destruunt.

A. m. T. III. p. 143.

60.

Problema. Invenire duo triangula rectangula in numeris, quorum areae

$$A=pq(pp-qq) \quad \text{et} \quad B=rs(rr-ss)$$

datam inter se teneant rationem scil. $a:b$, ita ut sit $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

Hoc problema methodo directa frustra tractatur, unde ad solutiones particulares confugere necesse est cujusmodi sunt sequentes:

I. Sumatur $r=p$ et $s=p-q$, erit $r+s=2p-q$ et $r-s=q$, unde fit

$$B=p(p-q)(2p-q)q$$

hincque $\frac{A}{B}=\frac{p+q}{2p-q}=\frac{a}{b}$, ergo $bp+bq=2ap-aq$, ideoque $\frac{p}{q}=\frac{a+b}{2a-b}$, unde haec solutio nascitur

$$p=a+b \qquad r=a+b$$
$$q=2a-b \qquad s=2b-a.$$

II. Sit $r=2p$ et $s=p+q$, erit $r+s=3p+q$ et $r-s=p-q$, hinc $B=2p(p+q)(3p+q)(p-q)$, ergo

$$\frac{A}{B}=\frac{q}{6p+2q}=\frac{a}{b}, \text{ sicque erit } bq=6ap+2aq, \text{ indeque } \frac{p}{q}=\frac{b-2a}{6a},$$

quocirca capiatur

$$p=b-2a \qquad r=2b-4a$$
$$q=6a \qquad s=b+4a.$$

III. Sit $r=2p$ et $s=p-q$, erit $r+s=3p-q$, et $r-s=p+q$, hinc

$$\frac{A}{B}=\frac{q}{6p-2q}=\frac{a}{b}, \text{ sicque } bq=6ap-2aq, \text{ ergo } \frac{p}{q}=\frac{b+2a}{6a},$$

quocirca capiatur pro ista solutione

$$p=b+2a \qquad r=2b+4a$$
$$q=6a \qquad s=b-4a.$$

IV. Sit $r=p+q$ et $s=p$, erit $r+s=2p+q$ et $r-s=q$, hincque

$$\frac{A}{B}=\frac{p-q}{2p+q}=\frac{a}{b}, \text{ unde colligitur ob } bp-bq=2ap+aq, \ \frac{p}{q}=\frac{a+b}{b-2a}$$

ergo capiantur

$$p=a+b \qquad r=2b-a$$
$$q=b-2a \qquad s=a+b.$$

V. Sit $r=p+q$ et $s=q$, erit $r+s=p+2q$ et $r-s=p$, unde fit

$$\frac{A}{B}=\frac{p-q}{p+2q}=\frac{a}{b}, \text{ inde } bp-bq=ap+2aq, \text{ hinc } \frac{p}{q}=\frac{2a+b}{b-a},$$

quocirca capere debemus

$$p=2a+b \qquad r=a+2b$$
$$q=b-a \qquad s=b-a.$$

VI. Sit $r=p+q$ et $s=2q$, erit $r+s=p+3q$ et $r-s=p-q$, unde fit

$$\frac{A}{B}=\frac{p}{2p+6q}=\frac{a}{b}, \text{ unde ob } bp=2ap+6aq; \text{ erit } \frac{p}{q}=\frac{6a}{b-2a},$$

ideoque hic capere oportet

$$p=6a \qquad r=4a+b$$
$$q=b-2a \qquad s=2b-4a.$$

VII. Sit $r=p-q$ et $s=q$, erit $r+s=p$ et $r-s=p-2q$ et erit

$$\frac{A}{B}=\frac{p+q}{p-2q}=\frac{a}{b}, \text{ ideoque } bp+bq=ap-2aq, \text{ hinc } \frac{p}{q}=\frac{b+2a}{a-b},$$

itaque ut capiatur necesse est

$$p=b+2a \qquad r=2b+a$$
$$q=a-b \qquad s=a-b.$$

VIII. Sit $r = p - q$ et $s = 2q$, erit $r + s = p + q$ et $r - s = p - 3q$, hincque

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{2p - 6q} = \frac{a}{b}, \text{ unde ob } bp = 2ap - 6aq \text{ invenitur } \frac{p}{q} = \frac{6a}{2a - b},$$

ideoque capere oportet

$$p = 6a \qquad r = b + 4a$$
$$q = 2a - b \qquad s = 4a - 2b.$$

IX. Sit $r = q$ et $s = p - q$, erit $r + s = p$ et $r - s = 2q - p$, unde fit

$$\frac{A}{B} = \frac{p + q}{2q - p} = \frac{a}{b}, \text{ ideoque } bp + bq = 2aq - ap, \text{ ergo } \frac{p}{q} = \frac{2a - b}{b + a},$$

quocirca sumatur

$$p = 2a - b \qquad r = b + a$$
$$q = b + a \qquad s = a - 2b.$$

X. Sit denique $r = 2q$ et $s = p - q$, erit $r + s = p + q$ et $r - s = 3q - p$, unde reperitur

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{6q - 2p} = \frac{a}{b}; \text{ hinc ob } bp = 6aq - 2ap, \text{ erit } \frac{p}{q} = \frac{6a}{b + 2a},$$

quo notato manifestum est, ut esse debeat

$$p = 6a \qquad r = 2b + 4a$$
$$q = b + 2a \qquad s = 4a - b.$$

Has jam omnes solutiones in sequenti tabella uni conspectui exponamus.

	p	q	r	s
I	$a + b$	$2a - b$	$a + b$	$2b - a$
II	$b - 2a$	$6a$	$2b - 4a$	$b + 4a$
III	$b + 2a$	$6a$	$2b + 4a$	$b - 4a$
IV	$a + b$	$b - 2a$	$2b - a$	$a + b$
V	$2a + b$	$b - a$	$a + 2b$	$b - a$
VI	$6a$	$b - 2a$	$4a + b$	$2b - 4a$
VII	$b + 2a$	$a - b$	$2b + a$	$a - b$
VIII	$6a$	$2a - b$	$b + 4a$	$4a - 2b$
IX	$2a - b$	$b + a$	$b + a$	$a - 2b$
X	$6a$	$b + 2a$	$2b + 4a$	$4a - b$

Hic numeri p et q dicuntur genitores trianguli A, et r et s genitores trianguli B, de quibus notandum, si qui eorum prodeant negativi, eos in positivos converti posse, dummodo majores litteris p et r, minores vero litteris q et s tribuantur. Quo observato aliquot exempla evolvamus:

Exemplum 1. Sit $a = 1$ et $b = 1$, exclusis triangulis inter se similibus, oritur haec una solutio:

$$p = 6 \qquad r = 5$$
$$q = 1 \qquad s = 2.$$

Exemplum 2. Sit $a = 2$ et $b = 1$ et solutiones orientur in hac tabella contentae

p	q	r	s
12	3	9	6
12	5	10	7
5	1	4	1.

Deletis autem iis casibus, qui bis occurrunt, sequens tabella exhibet solutiones diversas:

	p	q	r	s	
I	$a+b$	$2a-b$	$a+b$	$2b-a$	α
V	$2a+b$	$b-a$	$a+2b$	$b-a$	β
II	$b-2a$	$6a$	$2b-4a$	$b+4a$	γ
III	$b+2a$	$6a$	$2b+4a$	$b-4a$	δ
α	$3a$	$2b-a$	$3b$	$2a-b$	1
β	$a+2b$	$3a$	$3b$	$b+2a$	5
γ	$b+4a$	$b-8a$	$3b$	$8a-b$	2
δ	$b+8a$	$b-4a$	$3b$	$8a+b$	3

Inter has octo solutiones quaelibet habet suam sociam, quae scilicet ex numeris genitoribus $p+q$ et $p-q$ nascitur, quas igitur paribus litteris graecis insignivimus.

Exemplum 1. Sit $a=2$ et $b=1$, octo solutiones ita se habebunt:

	p	q	r	s
α	3	3	3	0
α	6	0	3	3
β	5	1	4	1
β	6	4	5	3
γ	12	3	9	6
γ	15	9	15	3
δ	12	5	10	7
δ	17	7	17	3

Exemplum 2. Sit $a=3$ et $b=2$, et oriuntur solutiones in hac tabula expressae:

	p	q	r	s
α	5	4	5	1
α	9	1	6	4
β	8	1	7	1
β	9	7	8	6
γ	{18	4	14	8}
	{9	2	7	4}
γ	11	7	11	3
δ	{18	8	16	10}
	{9	4	8	5}
δ	13	5	13	3

Exemplum 3. Si $a=1$ et $b=1$, sequentes oriuntur solutiones:

	p	q	r	s
α	2	1	2	1
α	3	1	3	1
β	3	0	3	0
β	3	3	3	3
γ	6	1	5	2
γ	7	5	7	3
δ	6	3	6	3
δ	9	3	9	3

Si ambarum arearum productum AB debeat esse quadratum, tantum sumi oportet pro numeris a et b quadrata; sit igitur $a=4$ et $b=1$ eruntque solutiones

	p	q	r	s
α	7	5	5	2
α	12	2	7	3
β	{ 9	3	6	3 }
	{ 3	1	2	1 }
β	4	2	3	1
γ	24	7	17	14
γ	31	17	31	3
δ	{ 24	9	18	15 }
	{ 8	3	6	5 }
δ	11	5	11	1

A. m. T. I. p. 296—298.

Nota Editorum. Huic praecedenti fragmento in *Adversariorum* Tomo I Patris manu inscriptum est: »Omnia haec jam redacta« (*Dieses ist schon ausgeführt*); cum tamen in nullo cognitorum Euleri operum has investigationes detegere nobis contigerit, quae hanc ob rem et in recentissima editione *Commentationum arithmeticar.* desunt, esse utique potest eas in quapiam rarissima seu oblita collectione typis expressas reperiri. Hic saltem sufficiet remittere lectorem ad commentationem, cujus fragmentum supra in pag. 101 hujusce tomi Opp. posthum. reperitur, et in qua idem fere, aut simile argumentum tractatum fuisse videtur.

61.

Theorema. Haec formula $aax^4+bxxyy+ccy^4$, quadrato aequanda, semper reduci potest ad productum quatuor factoribus simplicibus constans, pariter quadrato aequandum.

Demonstratio. Formula proposita aequetur huic quadrato $\left(axx+cyy.\frac{p}{q}\right)^2$, fietque

$$bqqxx+ccqqyy=2acpqxx+ccppyy,\quad \text{unde fit}\quad \frac{xx}{yy}=\frac{cc(q+p)(q-p)}{q(2acp-bq)}=\square.$$

Quadratum ergo esse debet $(q+p)(q-p)q(2acp-bq)$. Simili modo, si radicem illius formulae posuissemus

$$cyy+axx.\frac{r}{s},\quad \text{prodiisset}\quad \frac{xx}{yy}=\frac{s(2acr-bs)}{aa(s+r)(s-r)};$$

quadratum ergo debet esse $(s+r)(s-r)s(2acr-bs)$. Deinde, quia per utramque positionem est

$$axx+cyy.\frac{p}{q}=cyy+axx.\frac{r}{s},\quad \text{erit}\quad \frac{xx}{yy}=\frac{cs(q-p)}{aq(s-r)},$$

ideoque debet esse $cs(q-p).aq(s-r)=\square$.

Corollarium. Pro $\frac{xx}{yy}$ nacti sumus sequentes tres valores:

$$\frac{cc(q+p)(q-p)}{q(2acp-bq)},\quad \frac{s(2acr-bs)}{aa(s+r)(s-r)},\quad \frac{cs(q-p)}{aq(s-r)},$$

ex quorum comparatione relatio inter rationes $r:s$ et $p:q$ deduci potest. Erit enim

$$r:s=\left(1+\frac{b}{ac}\right)q-p:q+p;\quad \text{vel erit etiam}\quad p:q=\left(1+\frac{b}{ac}\right)s-r:s+r.$$

A. m. T. III. p. 136.

62.

Problema. Invenire quatuor quadrata aa, bb, cc, dd, ut haec fractio fiat quadratum $\frac{aacc-bbdd}{aadd-bbcc}$.

Solutio duplex dari potest: Pro priore ponatur $c=ab$, $d=aa-2bb$, eritque

$$ac+bd=2b(aa-bb),\quad ac-bd=2b^3,\quad ad+bc=a(aa-bb),\quad ad-bc=a(aa-3bb),$$

ergo fieri debet $\frac{4b^4}{aa(aa-3bb)}=\square$, sive tantum $aa-3bb=\square$. Pro altera solutione fiat $a=cc+2dd$, $b=cd$, tum enim fiet $ac+bd=c(cc+3dd)$, $ac-bd=c(cc+dd)$, $ad+bc=2d(cc+dd)$, $ad-bc=2d^3$, ergo fieri debet $\frac{cc(cc+3dd)}{4d^4}=\square$, sive tantum $cc+3dd=\square$.

A. m. T. III. p. 150.

63.

Problema. Ad quadratum reducere hanc formulam $\frac{aabb-ccdd}{aacc-bbdd}$.

Solutio. Ponatur $b=ad$, erit formula $\frac{dd(a^4-cc)}{aa(cc-d^4)}=\frac{a^4-cc}{cc-d^4}$. Ponatur porro $c=aa-2dd$, erit formula

$$\frac{4aadd-4d^4}{a^4-4aadd+3d^4},$$ quae demto quadrato in numeratore fit $$\frac{aa-dd}{a^4-4aadd+3d^4}=\frac{1}{aa-3dd}.$$

Sumatur $a=pp+3qq$ et $d=2pq$, erit forma $\frac{1}{(pp-3qq)^2}$, hincque porro prodit

$$c=p^4-2ppqq+9q^4 \quad\text{et}\quad b=2pq(pp+3qq).$$

Hic quaelibet positio solutionem suppeditat praecedentis problematis (*).

Sit $p=1$ et $q=1$, erit $a=4$, $b=8$, $c=8$, $d=2$.

Sit $p=2$ et $q=1$, erit $a=7$, $b=28$, $c=17$, $d=4$,

unde oritur solutio supra data problematis praecedentis.

Sit $p=1$ et $q=2$, erit $a=13$, $b=52$, $c=137$, $d=4$.

Sit $p=3$ et $q=1$, erit $a=12$, $b=72$, $c=72$, $d=6$.

Sit $p=2$ et $q=3$, erit $a=31$, $b=372$, $c=673$, $d=12$.

Sequenti autem modo praecedens problema ad praesens reducitur: Cum esse debeat $A^4-B^4=C^4-D^4$, ponatur $A+B=\alpha x$ et $A-B=\beta y$, tum vero $C+D=\gamma x$, $C-D=\delta y$,

$$\text{fiet}\quad \alpha\beta(\alpha\alpha xx+\beta\beta yy)=\gamma\delta(\gamma\gamma xx+\delta\delta yy).$$

Hinc oritur $\frac{xx}{yy}=\frac{\gamma\delta^3-\alpha\beta^3}{\alpha^3\beta-\gamma^3\delta}$, unde haud difficulter superior derivatur.

A. m. T. III. p. 161. 162.

(*) Resolutio hujus aequationis $A^4-B^4=C^4-D^4$. *Comment. arithm* T. I p. 473.

64.

Theorema. Si fuerit $X=(a-bx)^2(p-qx)^2+(c-dx)^2(r-sx)^2-nn(a-bx)^2(c-dx)^2$, statim sex valores habentur, quibus X fit quadratum.

Primo enim fiet $X=(a-bx)^2(p-qx)^2$, si fuerit $c-dx=0$, ideoque $x=\frac{c}{d}$, et si fuerit

$$(r-sx)^2-nn(a-bx)^2=0,\quad\text{hoc est}\quad r-sx=\pm n(a-bx).$$

Simili modo fiet $X=(c-dx)^2(r-sx)^2$ faciendo $a-bx=0$, seu $x=\frac{a}{b}$; tum vero si $p-qx=\pm n(c-dx)$.

A. m. T. III. p. 166.

65.

Theorema. Ut in quadrilatero, circulo inscripto, quatuor latera a, b, c, d cum ambabus diagonalibus x et y numeris rationalibus exprimantur, necesse est, ut hoc productum $(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$ reddatur quadratum. Quod fiet sumtis quinque numeris pro lubitu f, g, h, p, q, si capiatur

$$a=fgh(qq-pp),\quad b=g(fp+gq)^2-hhqq,\quad c=2fghpq+h(ff+gg-hh)qq,\quad d=f(gp+fq)^2-hhqq,$$

tum enim erit

$$x=f(fg(pp+qq)+(ff+gg-hh)pq)$$
$$y=g(fg(pp+qq)+(ff+gg-hh)pq).$$

Sin autem insuper requiratur, ut etiam area quadrilateri fiat rationalis, tum hanc formulam quadratum esse oportet

$$(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a),$$

quod autem per illas formulas nullo modo effici potest. At vero sequens **problema** generaliter resolvi potest:

> Dato circulo polygonum quotcunque laterum inscribere, cujus omnia latera una cum omnibus diagonalibus, atque adeo area numeris rationalibus exprimantur.

Solutio. (Fig. 1.) Posito radio circuli $=1$ sint arcus $AB=2A$, $BC=2B$, $CD=2C$, etc., eritque latus

$$AB=2\sin A,\quad BC=2\sin B,\quad CD=2\sin C,\quad \text{etc.}$$

Tantum ergo opus est, ut horum angulorum sinus sint rationales, simulque etiam cosinus, ut etiam diagonales fiant rationales, si quidem est

$$AC=2\sin(A+B)=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B.$$

At vero si fuerit $\sin A=\frac{2ab}{aa+bb}$, erit $\cos A=\frac{aa-bb}{aa+bb}$; tales igitur formulae pro sinibus et cosinibus accipiantur, hocque modo non solum omnia latera, sed etiam diagonales fient rationales atque adeo area, cum posito centro O sit area $\Delta AOB=\sin A\cos A$, quod de omnibus reliquis valet. Possunt enim singuli hi anguli $2A$, $2B$, etc. usque ad ultimum pro lubitu assumi, ultimi vero sinus erit sinus summae reliquorum, et cosinus $=-$ cosinui summae reliquorum.

A. m. T. III. p. 159. 160.

66.

(*Lexell.*)

Theorema. Si a fuerit numerus quicunque non quadratus, et b et c numeri quicunque ad illum primi, tum ista formula

$$a(bbx^4+aaccy^4)$$

nunquam esse potest quadratum.

Demonstratio. Hic assumi potest numerum a etiam per nullum quadratum esse divisibilem, si enim esset $a=\alpha ff$, quadratum esse deberet $\alpha(bbx^4+\alpha accf^4y^4)$, ubi si loco fy scribatur y, habetur formula prior, quin etiam numeri x et y sunt primi inter se. Quoniam igitur a est factor nostrae formae, necesse est, ut alter factor $bbx^4+aaccy^4$ etiam habeat factorem a, sed pars posterior jam habet factorem a, ergo pars prior erit divisibilis per a, ex quo x factorem habebit a, ideoque y non erit divisibile per a. Ponatur ergo $x=az$, atque nunc haec forma quadratum esse debebit

$$a(bba^4z^4+aaccy^4),\quad \text{seu}\quad a(bbaaz^4+ccy^4).$$

Quod ob eandem rationem fieri nequit, nisi y esset divisibile per a, qui casus cum jam sit exclusus, formula nostra nullo modo quadratum esse poterit.

A. m. T. I. p. 51.

67.

Varia conamina aequationis $a^\lambda+b^\lambda=c^\lambda$ impossibilitatem casu $\lambda>2$ demonstrandi.

1. (*Lexell.*)

Theorema. Non dantur tres numeri x, y, z, ut fiat $xxy+xzz+yyz=0$.

Sumi potest numeros x, y, z communem divisorem non habere; si enim haberent, per divisionem ex hac aequatione tolleretur; interim tamen bini communem divisorem habere debent. Hinc ponatur a maximus communis divisor numerorum x et y, b ipsorum x et z, et c ipsorum y et z, atque tum bini horum a, b, c erunt inter se primi. Ponatur igitur $x = ap$, $y = aq$, eruntque p et q primi inter se. Deinde sit $x = br$ et $z = bs$, denique $y = ct$ et $z = cu$, ita ut sit $x = ap = br$, $y = aq = ct$, $z = bs = cu$, quibus valoribus substitutis formula nostra est: $abcprt + abcpsu + abcqts = 0$, sive $prt + psu + qst = 0$.

Cum autem sit $ap = br$, sive $\frac{p}{r} = \frac{b}{a}$, erit $p = lb$, $r = la$; deinde $\frac{q}{t} = \frac{c}{a}$, unde $q = mc$ et $t = ma$, et ob $\frac{s}{u} = \frac{c}{b}$, $s = nc$, $u = nb$, ita ut sit $x = lab$, $y = mac$, $z = nbc$; ubi notandum numeros mc, lb esse inter se primos, nec non lb et nc, et ma et nc. Aequatio autem nostra hanc habebit formam:

$$llmaab + nnlbbc + mmncca = 0.$$

Hinc ergo lb divisor esse deberet membri $mmncca$, quod ob conditiones memoratas esse nequit.

2. (*J. A. Euler.*)

NB. Haec demonstratio non succedit. Caeterum hoc theorema huc redit, ut demonstretur esse non posse $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$. Hoc autem sequenti modo demonstrari posse videtur:

Posito $z = \frac{xy}{v}$, et nostra aequatio fiet $\frac{x}{y} + \frac{v}{x} + \frac{y}{v} = 0$, quae forma similis est propositae. Cum numeri x, y, z sint inaequales, sit z maximus, y medius et x minimus, sive negative, sive positive. Jam cum sit $z = \frac{xy}{v}$, manifestum est fore $v < x$. Unde patet, si terni numeri z, y et x satisfecerint, tum etiam hos y, x et v satisfacturos, quorum y jam erit maximus, x medius et v minimus. Ponatur jam $y = \frac{xv}{u}$, eritque $u < v$, quare etiam hi tres numeri x, v et u satisfacerent. Si porro ponatur $x = \frac{uv}{t}$, erit $t < u$, atque etiam hi tres v, u et t satisfacerent. Hocque modo continuo ad numeros minores perveniretur; quare cum in minimis hujusmodi numeri non dentur, etiam in maximis tales non dantur. Manifestum vero est hos numeros semper fore integros.

Corollarium. Hoc modo demonstrari posset fieri non posse $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$. Si enim $y > x$ et ponatur $y = \frac{xx}{v}$, erit $v < x$, et tum prodit $\frac{v}{x} + \frac{x}{v} = 0$, quae posito denuo $x = \frac{vv}{u}$ daret $u < v$ et $\frac{v}{u} + \frac{u}{v} = 0$, quo pacto iterum ad numeros continuo minores perveniretur.

Eodem modo etiam demonstrari potest esse non posse $\frac{v}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{v} = 0$. Posito enim $z = \frac{vy}{u}$ (ubi si z fuerit numerus maximus et v minimus, $u <$ erit v) similis aequatio prodit scilicet $\frac{u}{v} + \frac{v}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{u} = 0$ ex numeris minoribus formata; hocque modo continuo minores invenire liceret.

Corollarium 2. Cum igitur aequatio $xxy + xzz + yyz = 0$ sit impossibilis, inde vero prodeat

$$z = \frac{-yy \pm \sqrt{(y^4 - 4x^3 y)}}{2x},$$

sequitur formulam $y^4 - 4x^3 y$ quadratum nunquam esse posse.

Corollarium 3. Ex aequatione supra allata pro quatuor numeris sequitur

$$vvyz + xxzv + yyxv + zzxy = 0$$

hinc

$$vv = \frac{-(xxz + yyx)v - zzxy}{yz}$$

et

$$v = \frac{-x(xz + yy) \pm \sqrt{(xx(xz + yy)^2 - 4z^3 yyx)}}{2yz},$$

unde haec formula $xx(xz + yy)^2 - 4z^3 yyx$ nunquam quadratum fieri potest.

Sit verbi gratia $z = x$ et haec formula fiet

$$xx(xx + yy)^2 - 4x^4yy, \quad \text{vel} \quad (xx + yy)^2 - 4xxyy$$

NB. Verum nostrum theorema in casu quatuor numerorum non amplius locum habet, quia utique in minimis numeris casus dantur possibiles: veluti si fuerit $z = x$ et $y = -v$. Quod ergo de quatuor numeris hic dictum est, neutiquam valet.

Theorema. Neque summa neque differentia duorum cuborum potest esse cubus.

Demonstratio I. Si p, q et r denotent numeros integros, sive positivos sive negativos, demonstrandum est hanc aequationem nullo modo subsistere posse:

$$p^3 + q^3 + r^3 = 0.$$

Tum enim dividendo per pqr foret

$$\frac{pp}{qr} + \frac{qq}{pr} + \frac{rr}{pq} = 0, \quad \text{ideoque etiam} \quad \frac{ppq}{qqr} + \frac{qqr}{prr} + \frac{prr}{ppq} = 0$$

atque hinc etiam si ponamus $ppq = x$, $qqr = y$ et $rrp = z$, foret

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0.$$

Hoc autem nunquam fieri posse ante est demonstratum.

Demonstratio II. Demonstrabo hic hanc formulam $ab(a \pm b)$ cubum esse non posse. Primo enim numeri a et b non solum integri sed etiam primi inter se assumi possunt. Quare cum hi tres factores a, b et $a \pm b$ sint inter se primi, unusquisque foret cubus, unde posito $a = x^3$, $b = y^3$, foret $x^3 \pm y^3 =$ cubo. Quod autem formula $ab(a \pm b)$ cubus esse nequit, ita ostendo: Si esset cubus, ejus radix statui posset $\frac{m(a \pm b)}{n}$. Tum ergo foret $\quad ab(a \pm b) = \frac{m^3(a \pm b)^3}{n^3}$, vel $n^3ab = m^3(a \pm b)^2 = m^3(aa \pm 2ab + bb)$.

Hoc enim si esset, numeri a et b forent inaequales. Sit igitur a major et b minor, et ponatur $a = \frac{bb}{c}$, eritque

$c < b$, tum autem foret $\frac{n^3b^3}{c} = m^3\left(\frac{b^4}{cc} \pm \frac{2b^3}{c} + bb\right)$, sive $n^3bc = m^3(bb \pm 2bc + cc)$, ubi $b > c$,

ergo si porro ponatur $b = \frac{cc}{d}$, erit $c > d$, hincque iterum foret $n^3cd = m^3(cc \pm 2cd + dd)$; hocque modo continuo ad numeros minores perveniretur. Unde quia res in minimis numeris non succedit, etiam in maximis succedere non posset.

NB. Hic vero vitium ingens inest, quoniam ob numeros a et b inter se primos, c non est integer, neque etiam sequentes d, e, etc. Quocirca ex parvitate horum numerorum nihil concludi potest. Interim tamen etiam ne prior demonstratio valet, etsi enim omnes tres numeri non habent communem divisorem, tamen bini quivis necessario communem habent factorem. Quamobrem ex aequalitate $\frac{y}{z} = \frac{-xx - zy}{xy}$ concludi nequit, esse z partem ipsius xy, quia fortasse fractio $\frac{y}{z}$ ad minores terminos reduci potest, cujus demum denominator divisor esse debet ipsius xy.

A. m. T. I. p. 51—54.

3. (*Lexell.*)

Theorema Fermatii, quo neque summa cuborum potest esse cubus, neque summa duarum potestatum quintarum potestas quinta esse potest, nec in genere summa duarum potestatum altiorum similis potestas altior, facile ita transformari potest, ut certae formulae quadrata esse nequeant. Si enim $a^5 + b^5 = c^5$, ponatur

$$x + y = a^5 \text{ et } x - y = b^5, \text{ foretque } 2x = a^5 + b^5 = c^5 \text{ et } xx - yy = a^5b^5 \text{ et } 4xx = c^{10};$$

hinc igitur foret $\frac{xx - yy}{4xx} = \frac{a^5b^5}{c^{10}}$, ideoque potestas quinta, pro qua scribatur

$$\frac{z^5}{x^5}, \quad \text{seu} \quad \frac{xz^5}{x^6}, \quad \text{ita ut foret} \quad \frac{xx-yy}{4xx} = \frac{xz^5}{x^6};$$

multiplicetur per $4x^6$, fietque

$$x^6 - x^4 yy = 4xz^5, \quad \text{sive} \quad x^6 - 4xz^5 = x^4 yy = \square.$$

Quare si demonstrari posset formulam $x^6 - 4xy^5$ quadratum esse non posse, simul demonstratum est formulam $a^5 + b^5$ potestatem quintam esse non posse. Si enim esset $x^6 - 4xy^5$ quadratum, ob factores $x(x^5 - 4y^5)$ inter se primos, uterque quadratum esse deberet. Sit igitur $x = pp$, et alter factor $p^{10} - 4y^5$ deberet esse quadratum, puta qq; foret ergo

$$p^{10} - qq = 4y^5 = 4r^5 s^5 = (p^5 + q)(p^5 - q), \quad \text{ideoque} \quad p^5 + q = 2r^5 \quad \text{et} \quad p^5 - q = 2s^5,$$

unde addendo foret

$$2p^5 = 2r^5 + 2s^5, \quad \text{sive} \quad p^5 = r^5 + s^5.$$

Simili modo formula $a^3 + b^3 = c^3$ transformabitur in hanc aequivalentem $x^4 - 4xy^3 = \square$. Hoc postremum theorema etiam hoc modo repraesentari potest, ut nunquam fieri queat

$$x^3 + (x+a)^3 = (x+b)^3, \quad \text{ubi manifesto} \quad b > a.$$

Foret ergo

$$x^3 = (x+b)^3 - (x+a)^3 = 3(b-a)xx + 3(bb-aa)x + b^3 - a^3,$$

demonstrandum ergo est hanc aequationem nunquam habere radicem rationalem. Ad hoc observetur, cum posterius membrum factorem habeat $b-a$, etiam x^3 talem factorem habere debet, et perspicuum est $b-a$ vel esse cubum, vel noncuplum cubi.

Sit primo $b - a = f^3$, et erit $x^3 = 3f^3 xx + 3f^3(b+a)x + f^3(bb+ab+aa)$.

Ponatur ergo $x = fy$, eritque $y^3 = 3ffyy + 3(b+a)fy + bb + ab + aa$, ideoque y debet esse factor formulae $bb + ab + aa$.

Sit secundo $b - a = 9f^3$, et ultimum membrum fieret (ob $b = 9f^3 + a$)

$$9^3 f^9 + 3.9^2 af^6 + 3.9aaf^3 = 27f^3(27f^6 + 9af^3 + aa),$$

unde fit $x^3 = 27f^3 xx + 27f^3(b+a)x + 27f^3(27f^6 + 9af^3 + aa)$.

Ponatur $x = 3fy$, erit

$$y^3 = 9ffyy + 3fy(b+a) + 27f^6 + 9af^3 + aa.$$

Pro utroque casu limites assignari possunt; pro priore enim manifesto est $y > 3ff$, et pro altero $y > 9ff$, qui limites sunt nimis parvi; nimis magni autem hoc modo reperientur: Consideretur aequatio in genere

$$y^3 = \alpha yy + \beta y + \gamma,$$

ubi α, β, γ sint positivi, ac primo erit $y > \alpha$; deinde cum sit $y = \alpha + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{yy}$, si in membro posteriori loco y scribatur α, hoc membrum fit nimis magnum, erit ergo $y < \alpha + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha\alpha}$; ponatur hic limes $= \lambda$, ut sit $y < \lambda$, eritque vicissim $y = \alpha + \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda\lambda}$.

Exemplum. Sit pro casu priori $f = 1$ et $a = 1$, erit $b = 2$ et $x = y$, hinc $y^3 = 3yy + 9y + 7$, ubi statim $y > 3$, hinc $y < 7$, hinc $y > 4\frac{3}{7}$, $y < 5\frac{12}{31}$, radix ergo rationalis deberet esse 5, quae cum non sit divisor ultimi termini . . . . . .

pag. 93. 94.

4. (*W. L. Krafft.*)

Problema. Invenire numeros x et y inter se primos, ut formula $x^2 + ny^2$ fiat numerus quadratus.

Solutio. Si hi numeri non essent primi inter se, quaestio foret levissima; posito enim $x = pr$ et $y = qr$, formula nostra prodit $r^2(p^2 + nq^2)$, quae aequetur quadrato $r^4 ss$, ita ut hinc statim fiat

$$r = \frac{p^2 + nq^2}{ss}, \quad \text{unde fit} \quad x = \frac{p^4 + npq^2}{ss} \quad \text{et} \quad y = \frac{p^2 q + nq^4}{ss}.$$

Quod uti est facillimum, ita casus, quo x et y sint inter se primi, maxime est difficilis. Formulae istius factor simplex est $x+y\sqrt[3]{n}$, et si α denotet unam radicem cubicam unitatis, ita ut sit $\alpha^3=1$, quam constat $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, tum tertia radix cubica erit $\alpha\alpha$. Hinc formulae nostrae x^3+ny^3 alius factor simplex erit $x+\alpha y\sqrt[3]{n}$, ac tertius $x+\alpha\alpha y\sqrt[3]{n}$; ita ut formula nostra futura sit productum horum trium factorum

$$(x+y\sqrt[3]{n})(x+\alpha y\sqrt[3]{n})(x+\alpha\alpha y\sqrt[3]{n}),$$

qui singuli factores reddantur quadrata, hoc modo, quo statim patet, si unus fuerit quadratus, etiam reliquos fore quadratos.

Posito enim $x+y\sqrt[3]{n}=(p+q\sqrt[3]{n}+r\sqrt[3]{nn})^2$, per naturam rei fiet

$$x+\alpha y\sqrt[3]{n}=(p+\alpha q\sqrt[3]{n}+\alpha\alpha r\sqrt[3]{nn})^2 \quad \text{et} \quad x+\alpha\alpha y\sqrt[3]{n}=(p+\alpha\alpha q\sqrt[3]{n}+\alpha r\sqrt[3]{nn})^2.$$

Productum ergo, quod est x^3+ny^3, etiam erit quadratum, et quidem rationale, quippe cujus radix erit

$$p^3+nq^3+nnr^3-3npqr.$$

Tantum igitur opus est, primam illam positionem supra datam evolvi, ex qua consequimur

$$x+y\sqrt[3]{n}=pp+2pq\sqrt[3]{n}+2pr\sqrt[3]{nn}$$
$$+2nqr+nrr\sqrt[3]{n}+qq\sqrt[3]{nn},$$

unde statim sequitur fore $\quad x=pp+2nqr, \quad y=2pq+nrr.$

Praeterea vero esse oportet $2pr+qq=0$, unde $r=-\frac{qq}{2p}$. Sumatur ergo $p=2aa$ et $r=-bb$, fietque $q=2ab$, consequenter valores satisfacientes sunt

$$x=4a(a^3-nb^3) \quad \text{et} \quad y=b(8a^3-nb^3).$$

Aliter. Si ponatur $p=aa$ et $r=-2bb$, erit $q=2ab$ et $x=a(a^3-8nb^3)$ et $y=4b(a^3+nb^3)$, ubi a et b pro lubitu assumere licet.

Exemplum. Quaerantur duo cubi inter se primi x^3 et y^3, quorum summa fiat quadratum, cujusmodi quidem statim sunt obvii 1 et 8. Hic ob $n=1$, erit

$$x=a(a^3-8b^3) \quad \text{et} \quad y=4b(a^3+b^3).$$

Sit $a=3$, $b=1$, erit $x=57$, $y=112$, quorum cuborum summa fit quadratum, cujus radix $=1261$.

Sit $a=2$, $b=-1$, erit $x=32$, $y=-28$, sive $x=8$, $y=-7$.

In hac tamen solutione, etsi generalis videtur, casus quo $x=1$ et $y=2$ non continetur, cujus ratio sine dubio in eo est quaerenda, quod hoc casu numerus n ipse sit cubus, ideoque irrationalitas evanescat. Quod clarius patebit ex solutione magis directa, nam ut x^3+y^3 fiat quadratum, ponatur $x+y=p$ et $x-y=q$, ut sit $x=\frac{p+q}{2}$ et $y=\frac{p-q}{2}$, unde fit

$$x^3+y^3=\frac{p^3+3pqq}{4}=\frac{(pp+3qq)p}{4},$$

quae formula ut reddatur quadrata, debet esse $p(pp+3qq)$ quadratum, unde si hi duo factores sint inter se primi, uterque factor quadratum esse debet. Posterius vero tantum locum habet, si p divisibile sit per 3. Hinc duos casus evolvi convenit.

I. Sint hi factores inter se primi, atque ut $pp+3qq$ fiat quadratum, vidimus sumi debere $p=ff-3gg$ et $q=2fg$; at vero ut et p fiat quadratum, capiatur $f=hh+3kk$ et $g=2hk$. Ergo solutio hinc nata erit

$$x=\frac{h^4+4h^3k-6hhkk+12hk^3+9k^4}{2}, \quad y=\frac{h^4-4h^3k-6hhkk-12hk^3+9k^4}{2}.$$

II. Sit $p=3r$ et formula nostra erit $r(3rr+qq)$; fiat igitur $q=ff-3gg$ et $r=2fg$; fiat

$$3rr+qq=(ff+3gg)^2.$$

Jam ut et r fiat quadratum, sumatur $f=2hh$ et $g=kk$, ut fiat $r=4hhkk$, ideoque $p=12hhkk$ et $q=4h^4-3k^4$. At vero etiam alia solutio pro hoc casu locum habet, ponendo $q=\frac{3gg-ff}{2}$ et $r=fg$; tum vero etiam $f=hh$ et $g=kk$. Si $h=1=k$, erit $f=1$ et $g=1$, hinc $q=1$ et $r=1$, ergo $p=3$, $x=2$ et $y=1$, qui est casus cognitus.

In genere autem $q=\frac{3k^4-h^4}{2}$ et $r=hhkk$, $p=3hhkk$,

$$x=\frac{3k^4+6hhkk-h^4}{4},\quad y=\frac{6hhkk-3k^4+h^4}{4}.$$

Supra observavimus, ut foret $a^2+b^2=c^2$, fore quoque $x^4-4xz^2=\square$ et vicissim. Cum ergo quadratum esse debeat $x(x^2-4z^2)$, unde uterque factor debet esse quadratum. Reddatur primo posterior x^2-4z^2 quadratum, pro quo casu est $n=-4$, unde colligitur $x=a(a^2+32b^2)$ et $y=4b(a^2-4b^2)$. Ut ergo et x fiat quadratum, debet esse $a(a^2+32b^2)=\square$, ergo uterque factor deberet esse $\square$, ideoque $a^2+32b^2=\square$. Loco $2b$ scribamus $-c$ et formula erit $a(a^2-4c^2)$; quocirca si in maximis numeris formula $x(x^2-4z^2)$ esset $\square$, hoc modo ad aliam similem formulam deveniretur $a(a^2-4c^2)$ etiam quadratum, ubi numeri a et c manifesto multo forent minores, quam illi x et y. Deinde ex his a et c simili modo deduceremur ad alios multo minores, puta d et e, ita ut similis forma $d(d^2-4e^2)$ esset $\square$ et ita porro; unde certe proditura esset in minimis numeris talis forma quadratum; quare cum in minimis numeris talis forma non detur, ne in maximis quidem talis existit. Casus autem obvius, quo $e=0$, hic nullam facit exceptionem; ad eum enim perveniri non potest, nisi jam in prima forma fuerit $z=0$, qui casus ne in quaestionem quidem cadit.

Problema. Reddere formulam x^2+ny^2 cubum.

Solutio. Statim manifestum est, ad hoc statui oportere

$$x+y\sqrt[3]{n}=(p+q\sqrt[3]{n}+r\sqrt[3]{nn})^3;$$

tum enim ipsius formulae x^3+ny^3 radix cubica erit $p^3+nq^3+nnr^3-3npqr$. Facta autem evolutione reperietur

$$x+y\sqrt[3]{n}=\begin{matrix}p^3\\+6npqr\\+nq^3\\+nnr^3\end{matrix}\quad\left.\begin{matrix}+3ppq\\+3nprr\\+3nqqr\end{matrix}\right\}\sqrt[3]{n}\quad\left.\begin{matrix}+3ppr\\+3pqq\\+3nqrr\end{matrix}\right\}\sqrt[3]{nn}$$

hinc

$$x=p^3+6npqr+nq^3+nnr^3$$
$$y=3ppq+3nprr+3nqqr$$
$$0=3ppr+3pqq+3nqrr,$$

ex qua aequatione fit

$$p=\frac{-qq\pm\sqrt{(q^4-4nqr^3)}}{2r},$$

unde quadratum esse deberet formula $q(q^3-4nr^3)$, ideoque uterque factor seorsim. Sit ergo $q=ss$ debetque esse $s^6-4nr^3=\square=tt$, sive $s^6-tt=4nr^3=4nf^3g^3$. Fiat ergo $s^3+t=2f^3$ et $s^3-t=2ng^3$, unde oritur $s^3=f^3+ng^3$, quae formula similis est ipsi propositae, ubi litterae f et g sine dubio multo sunt minores quam x et y. Quare si in minimis numeris talis casus non datur, ne in maximis quidem dabitur.

p. 99—103.

5. (*Lexell.*)

Ad Theorema Fermatii supra memoratum, quo aequalitas $a^\lambda+b^\lambda=c^\lambda$ locum habere nequit praeter casus $\lambda=1$ et $\lambda=2$, reductio ibi tradita hoc modo facillime obtinetur: Si esset $c^\lambda=a^\lambda+b^\lambda$, foret

$$c^{2\lambda}-4a^{\lambda}b^{\lambda}=(a^{\lambda}-b^{\lambda})^2=\square,$$

ideoque pro ab posito d, talis formula $c^{2\lambda}-4d^{\lambda}$ deberet esse quadratum, cujus igitur impossibilitatem ostendi oportet, praeter casus $\lambda=1$ et $\lambda=2$.

Corollarium. Simili modo ex formula $b^{\lambda}=c^{\lambda}-a^{\lambda}$ deducitur

$$b^{2\lambda}+4c^{\lambda}a^{\lambda}=(c^{\lambda}+a^{\lambda})^2=\square,$$

quin etiam $a^{2\lambda}+4c^{\lambda}b^{\lambda}=\square$, quae ergo formulae etiam sunt impossibiles. Demonstratio pro casu saltem $\lambda=3$ ita tentetur: Cum sit $a^3+b^3=c^3$, erit $(a+b)(aa-ab+bb)=c^3$, quos factores ut primos inter se spectemus, cum casus, quo divisorem communem habent 3, nullam novam difficultatem implicet. Sit igitur uterque cubus $a+b=p^3$ et $aa-ab+bb=P^3$, fietque $c=Pp$; tum vero erit $p^6-P^3=3ab$, deinde ob $b^3=c^3-a^3=(c-a)(cc+ac+aa)$, fiat iterum $c-a=q^3$ et $cc+ac+aa=Q^3$, fietque $b=Qq$ et $Q^3-q^6=3ac$, denique ob $a^3=c^3-b^3=(c-b)(cc+bc+bb)$ sit $c-b=r^3$ et $cc+bc+bb=R^3$ unde $a=Rr$ et $R^3-r^6=3bc$. Introductis igitur litteris p, q, r et P, Q, R, ob $c=Pp$, $b=Qq$ et $a=Rr$, sequentes conditiones sunt adimplendae:

I. $p^3=Rr+Qq$, II. $q^3=Pp-Rr$, III. $r^3=Pp-Qq$,

IV. $P^3=RRrr-RrQq+QQqq$, V. $Q^3=PPpp+PpRr+RRrr$, VI. $R^3=PPpp+PpQq+QQqq$,

quibus praeterea adjungere licet

VII. $p^6-P^3=3QqRr$, VIII. $Q^3-q^6=3PpRr$, IX. $R^3-r^6=3PpQq$.

Denique etiam notasse juvabit $Q^3-P^3=(c-b)(a+c-b)=(Pp+Qq)(Rr+Pp-Qq)$. Totum ergo negotium huc redit, ut in his conditionibus contradictio detegatur.

p. 113.

6.

Theorema demonstrandum. Non dantur plures quantitates rationales veluti A, B, C, D, etc. quarum summa $A+B+C+D$ etc. per productum $ABCD$ etc. multiplicata producat unitatem. Sive si hoc signum $\not=$ denotet impossibilitatem aequalitatis, theorema hoc complectitur sequentes formas:

I. $AB(A+B)\not=1$, II. $ABC(A+B+C)\not=1$, III. $ABCD(A+B+C+D)\not=1$, etc.

Hae formae etiam ita exhiberi possunt

I. $A+B\not=\frac{1}{AB}$, II. $A+B+C\not=\frac{1}{ABC}$, III. $A+B+C+D\not=\frac{1}{ABCD}$, etc.

Hinc si postremae formulae fractae referantur littera O, sequentes formae sunt notatu dignae:

I. $A+B\not=O$ existente $ABO=1$, II. $A+B+C\not=O$ existente $ABCO=1$,

III. $A+B+C+D\not=O$ existente $ABCDO=1$, etc.

Porro quia litterae A, B, C, O sunt fractiones, si ponamus

$$A=\frac{a}{b},\quad B=\frac{b}{c},\quad C=\frac{c}{d},\quad \text{etc.}$$

sequentes habebuntur relationes impossibiles:

I. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\not=\frac{c}{a}$, II. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\not=\frac{d}{a}$, III. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}\not=\frac{e}{a}$.

At si hujus theorematis demonstratio haberetur, inde facile sequentia theoremata demonstrari possent:

Theorema I. Summa duorum cuborum esse nequit cubus, sive $p^3+q^3\not=r^3$.

Demonstratio. Facta divisione per pqr, ut habeatur

$$\frac{pp}{qr} + \frac{qq}{pr} = \frac{rr}{pq},$$

ubi si faciamus $\frac{pp}{qr} = A$, $\frac{qq}{pr} = B$, erit $AB = \frac{pq}{rr} = \frac{1}{O}$, sive $A + B = \frac{1}{AB}$, quod cum impossibile sit, hujus theorematis veritas est evicta.

Theorema II. Summa trium biquadratorum biquadratum esse nequit, sive $p^4 + q^4 + r^4 = s^4$.

Demonstratio. Facta divisione per $pqrs$ habebitur

$$\frac{p^3}{qrs} + \frac{q^3}{prs} + \frac{r^3}{pqs} = \frac{s^3}{pqr}$$
$$A + B + C = O$$

ubi manifesto est $ABCO = 1$. Quod cum sit impossibile, etiam hoc theorema est demonstratum.

Theorema III. Non dantur quatuor potestates quintae, quarum summa sit potestas quinta, sive

$$p^5 + q^5 + r^5 + s^5 = t^5.$$

Demonstratio. Facta divisione per productum $pqrst$ et comparatione cum superioribus litteris A, B, C, D, O instituta, hoc modo

$$\frac{p^4}{qrst} + \frac{q^4}{prst} + \frac{r^4}{pqst} + \frac{s^4}{pqrt} = \frac{t^4}{pqrs}$$
$$A + B + C + D = O$$

hic statim apparet esse $ABCDO = 1$. Sicque etiam hoc theorema est demonstratum.

Theorema generale. Existente n exponente potestatis, non dantur $n - 1$ tales potestates, quarum summa esset similis potestas.

Corollarium 1. Hinc multo minus $n - 2$, vel $n - 3$, vel $n - 4$, etc. tales potestates dantur, quarum summa esset similis potestas. Hoc ergo modo theorema illud Fermatii in multo majori extensione adeo esset demonstratum.

Corollarium 2. Quia potestates impares aeque negativae ac positivae esse possunt, litterae illae p, q, r, s, sive A, B, C, D utcunque ratione signorum variare poterunt, id quod hoc modo referri potest:

$$\text{I.} \quad \pm p^3 \pm q^3 \pm r^3 = 0, \qquad \text{II.} \quad \pm p^5 \pm q^5 \pm r^5 \pm s^5 \pm t^5 = 0 \quad \text{etc.}$$

Corollarium 3. Hoc autem nullo modo valet pro potestatibus paribus, quoniam $-p^4$ non est potestas quarta, unde hoc theorema non ad hanc formam debet extendi: $p^4 + q^4 - r^4 = s^4$, quandoquidem statim in oculos incurrit casu $q = r$ hanc aequationem subsistere non posse, quemadmodum modo supra vidimus talem formam revera resolvi posse.

Huic fragmento manu J. A. Euleri *inscriptum:* Hujus autem falsitas infra fusius ostendetur.

pag. 115. 116.

7.

Ecce quatuor numeri, quorum tam summa quam productum unitati aequatur:

$$+\frac{4}{3}, \quad +\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{3}{2},$$

unde superior illa conjectura omni fundamento destituitur.

Problema. Invenire quotcunque numeros, quorum summa multiplicata per productum producat unitatem.

1. Si desiderentur duo tales numeri, ut sit $ab(a+b)=1$, ponatur $a=\alpha b$ eritque $\alpha b^3(\alpha+1)=1$, sive $b^3=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$, sicque $\alpha(\alpha+1)$ debet esse cubus, quod fieri nequit.

2. Si tres desiderentur numeri $abc(a+b+c)=1$, ponatur $a=\alpha(b+c)$, ideoque

$$a+b+c=(1+\alpha)(b+c), \quad \text{ergo} \quad \alpha(\alpha+1)\,bc\,(b+c)^2=1.$$

Nunc ponatur $b=\beta c$ eritque

$$(b+c)^2=cc(1+\beta)^2, \quad \text{ideoque} \quad \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)^2c^4=1, \quad \text{sive} \quad \frac{1}{c^4}=\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)^2.$$

Sumatur $\alpha=\beta\beta+2\beta$, et debet esse

$$\frac{1}{c^4}=\beta\beta(\beta+2)(\beta+1)^4, \quad \text{sive} \quad \frac{1}{c^4(\beta+1)^4}=\beta\beta(\beta+2).$$

Sit $\beta=pp-2$, unde $\qquad \frac{1}{c^4(\beta+1)^4}=pp(pp-2)^2, \quad \text{ergo} \quad \frac{1}{cc(\beta+1)^2}=p(pp-2),$

quod fit quadratum I. si sumatur $p=2$; tum enim erit $\frac{1}{c(\beta+1)}=2$; deinde $\beta=2$, $\alpha=8$, $c=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$, $a=4$. Consequenter tres numeri quaesiti 4, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, quorum summa est $\frac{9}{2}$ et productum $\frac{2}{9}$. Deinde $p(pp-2)$ fit quadratum sumendo $p=\frac{9}{4}$. Erit enim $p(pp-2)=\frac{9}{4}\cdot\frac{49}{16}$, hinc $\frac{1}{c(\beta+1)}=\frac{21}{8}$, porro $\beta=\frac{49}{16}$, $\alpha=\frac{49.81}{16^2}$, $c=\frac{8.16}{21.65}$, $b=\frac{7.8}{3.65}$, denique $a=\frac{49.81.8}{16^2.21}=\frac{7.27}{16.2}$, ergo tres numeri quaesiti $a=\frac{7.27}{32}$, $b=\frac{7.8}{3.65}$, $c=\frac{8.16}{21.65}$, quorum summa $\frac{65^2}{21.32}$, productum vero $\frac{21.32}{65^2}$.

Alia Solutio. Sumatur $\beta=pp-1$, ut fiat $\frac{1}{c^4p^4}=\alpha(\alpha+1)(pp-1)$, jam sumatur $\alpha=p-2$, unde $\frac{1}{c^4p^4}=(p-2)(p+1)(p-1)^2$, statuatur $(p-2)(p+1)=(p+1)^2qq$, unde $p-2=(p+1)qq$ et $p=\frac{2+qq}{1-qq}$, $p+1=\frac{3}{1-qq}$, $p-1=\frac{1+2qq}{1-qq}$, ideoque $\frac{1}{ccpp}=\frac{3q(1+2qq)}{(1-qq)^2}$. Superest ergo reddi quadratum $3q(1+2qq)$, quod manifesto fit sumto $q=\frac{1}{2}$; hinc $\frac{1}{cp}=2$, $p=3$, $\alpha=1$, $\beta=8$, $c=\frac{1}{6}$, ergo tres numeri sunt $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=\frac{1}{6}$, quorum summa est $=3$ et productum $=\frac{1}{3}$. Deinde solutionem praebet positio $q=\frac{1}{24}$.

Aliter, sumto statim $\alpha=1$, fit $\frac{1}{c^4p^4}=2\beta(\beta+1)^2$; sumatur $\beta=2pp$, fiet

$$\frac{1}{ccpp}=2p(2pp+1), \quad \text{cui satisfacit} \quad p=2.$$

3. Si desiderentur quatuor numeri, ut sit $abcd(a+b+c+d)=1$, ponatur

$$a=\alpha(b+c+d), \quad b=\beta(c+d) \quad \text{et} \quad c=\gamma d,$$

unde $b=\beta(\gamma+1)d$, $a=\alpha(\beta+1)(\gamma+1)d$ et summa omnium $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)d$, productum vero $\alpha\beta\gamma(\beta+1)(\gamma+1)^2d^4$. Debet ergo esse

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+1)(\beta+1)^2(\gamma+1)^3d^5=1.$$

Sumatur $\qquad \gamma=\beta$ eritque $\alpha\beta\beta(\alpha+1)(\beta+1)^5d^5=1$, ideoque $(\beta+1)^5d^5=\frac{1}{\alpha\beta\beta(\alpha+1)}$.

Sumatur porro $\qquad (\beta+1)d=\frac{kk}{\alpha(\alpha+1)}$ fietque $k^{10}=\frac{\alpha^4(\alpha+1)^4}{\beta\beta}$, $\beta=\frac{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}{k^5}$,

ubi α et k pro arbitrio sumi possunt; tum autem habebitur $\beta=\frac{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}{k^5}$; hinc

$$d = \frac{kk}{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}, \quad \gamma = \frac{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}{k^4}, \quad \alpha = \text{arbitr.}, \quad c = \gamma d, \quad b = \beta(c+d) = \beta(\gamma+1)d,$$
$$a = \alpha(\beta+1)(\gamma+1)d.$$

Exemplum. $\alpha = 1$, $k = 1$, erit $\beta = 4 = \gamma$, $d = \frac{1}{10}$, $c = \frac{2}{5}$, $b = 2$, $a = \frac{5}{2}$. Consequenter quatuor numeri sunt: $\frac{5}{2}$, 2, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$ quorum summa est $= 5$, et productum $= \frac{1}{5}$.

4. Si desiderentur quinque numeri, ut sit $abcde(a+b+c+d+e) = 1$, ponatur

$$d = \delta e, \quad c = \gamma(\delta+1)e, \quad b = \beta(\gamma+1)(\delta+1)e, \quad a = \alpha(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)e.$$

Hinc summa omnium $= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)e$ et productum $\alpha\beta\gamma\delta(\beta+1)(\gamma+1)^2(\delta+1)^3e^5$,

$$\text{ergo} \quad \alpha\beta\gamma\delta(\alpha+1)(\beta+1)^2(\gamma+1)^3(\delta+1)^4e^6 = 1.$$

Sumatur $\delta = \beta$ et $\gamma = pp-1$, erit $\alpha\beta\beta(pp-1)(\alpha+1)p^6(\beta+1)^6e^6 = 1$.

Sit $p(\beta+1)e = \frac{1}{k}$ eritque $\alpha\beta\beta(pp-1)(\alpha+1) = k^6$. Fiat $\alpha(\alpha+1)(pp-1) = \alpha\alpha qq$, inde $\alpha = \frac{pp-1}{qq-pp+1}$, $\alpha\beta q = k^3$, ergo $\beta = \frac{k^3}{\alpha q}$. Sit $p = 2$ et $q = 2$, hinc $\alpha = 3$, $\beta = \frac{k^3}{6}$. Ponatur $k = 2$, erit $\beta = \frac{4}{3} = \delta$, $e = \frac{3}{28}$, $d = \frac{1}{7}$, $c = \frac{3}{4}$, $b = \frac{4}{3}$, $a = 7$; consequenter quinque numeri 7, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{28}$, quorum summa est $\frac{28}{3}$ et productum omnium $\frac{3}{28}$.

Conjectura igitur supra proposita maxime fallit, ita ex casu ultimo, quo volebamus demonstrare non dari quinque potestates sextas, quarum summa sit potestas sexta, tum demum demonstratio haberetur, si ostendi posset, quinque illos numeros a, b, c, d, e nunquam ita definiri posse, ut eorum quilibet, per quemcunque reliquorum divisus, praebeat potestatem sextam. Si igitur demonstrari posset omnes has fractiones

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{a}{d}, \quad \frac{a}{e}$$

non esse posse potestates sextas, tum simul demonstratum esset, non dari quinque potestates sextas, potestati sextae aequales.

5. (*J. A. Euler.*)

Ad casum superiorem secundum pro tribus numeris, quo formula

$$\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)^2$$

debet esse biquadratum, sumatur $\beta = 4\alpha(\alpha+1)$, eritque formula

$$4\alpha\alpha(\alpha+1)^2(2\alpha+1)^4 = \frac{1}{c^4}, \quad \text{ergo} \quad 2\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)^2 = \frac{1}{cc}, \quad \text{sive} \quad 2\alpha(\alpha+1) = \frac{1}{cc(2\alpha+1)^2}.$$

Debet ergo $2\alpha(\alpha+1)$ esse quadratum. Ponatur ergo $2\alpha(\alpha+1) = \alpha\alpha pp$, erit $\alpha = \frac{2}{pp-2}$, hincque fit

$$\alpha\alpha pp = \frac{4pp}{(pp-2)^2} = \frac{1}{cc(2\alpha+1)^2}, \quad \text{ergo} \quad \frac{2p}{pp-2} = \frac{1}{c(2\alpha+1)} = \frac{pp-2}{c(pp+2)}, \quad \text{hinc} \quad c = \frac{(pp-2)^2}{2p(pp+2)}.$$

Porro $\beta = \frac{8pp}{(pp-2)^2}$, unde tres numeri erunt

$$\text{I.} \quad a = \frac{pp+2}{p(pp-2)} \qquad \text{II.} \quad b = \frac{4p}{pp+2}, \qquad \text{III.} \quad c = \frac{(pp-2)^2}{2p(pp+2)}.$$

Exemplum. Si $p = 2$ fit $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{1}{6}$. Summa $= 3$, productum $= \frac{1}{3}$.

Eodem redeunt sequentes solutiones

1. $\alpha=\frac{8kk}{(2kk-1)^2}$ et $\beta=2kk$, sive $\beta=\frac{1}{2kk}$.

2. $\alpha=\frac{1}{2kk-1}$ et $\beta=\frac{(2kk-1)^2}{8kk}$, sive $\beta=\frac{8kk}{(2kk-1)^2}$.

Nam si fuerit $\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)^2=$biquadrato, casu $\beta=b$, tum erit etiam casu $\beta=\frac{1}{b}$.

3. Si $kx(mxx+n)=\square$ casu $x=a$, tum etiam erit quadratum casu $x=\frac{n}{ma}$.

Problema Invenire tres numeros p, q et r ita, ut formula $(pp-qq)(qq-rr)$ fiat biquadratum: veluti evenit I. si $p=51$, $q=3$, $r=1$; II. si $p=14$, $q=13$, $r=11$; III. si $p=29$, $q=25$, $r=23$.

Hic notasse juvabit ex casu quovis cognito facile erui alios, scilicet

$$p'=p+2q-r,\quad q'=p+r,\quad r'=p-2q-r,$$

sive etiam

$$p'=p+2q+r,\quad q'=p-r,\quad r'=p-2q+r.$$

Hoc problema facillime ex praecedente, quo numeri illi a, b, c sunt inventi, resolvitur. Sumatur enim

$$q=a+b \quad\text{et}\quad p=\sqrt{(qq+\frac{4}{ab})} \quad\text{et}\quad r=a-b.$$

Exemplum. Sumto $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{4}{3}$, erit $a+b=q=\frac{17}{6}$, $r=\frac{1}{6}$ et $p=\sqrt{(\frac{289}{36}+2)}=\frac{19}{6}$; sive $p=19$, $q=17$ et $r=1$; hineque alii reperiuntur

$$p'=52,\quad q'=20,\quad r'=16,\quad\text{sive}$$
$$p'=13,\quad q'=5,\quad r'=4,$$

vel etiam

$$p'=54,\quad q'=18,\quad r'=14,\quad\text{sive}$$
$$p'=27,\quad q'=9,\quad r'=7.$$

Ex solutione generali sumatur $a=\frac{8kk}{2k(kk+2)}$ et $b=\frac{(kk-2)^2}{2k(kk+2)}$, fietque

$$q=\frac{(kk+2)^2}{2k(kk+2)},\quad r=\frac{k^4-12kk+4}{2k(kk+2)},\ \text{et}\quad p=\sqrt{\left(\frac{(kk+2)^2}{4kk}+\frac{2(kk+2)^2}{(kk-2)^2}\right)}=\frac{(kk+2)^2}{2k(kk-2)},\quad\text{vel}$$

$$p=(kk+2)^2,\quad q=(kk-2)(kk+2)^2,\quad r=(kk-2)(k^4-12kk+4).$$

Analysis, qua haec solutio innititur, ita se habet:

Inventis ternis numeris a, b, c, ut supra, sumatur $q=a+b$ et $r=a-b$ et $p=a+b\pm 2c$; tum enim fiet

$$pp-qq=4cc+4c(a+b)=4c(a+b+c),\quad\text{at}\quad qq-rr=4ab,$$

ergo

$$(pp-qq)(qq-rr)=16abc(a+b+c)=16.$$

Hinc porro colligimus $p'=2a+4b+2c$, vel

$$p'=a+2b+c,\quad q'=a+c,\quad r'=a-c,$$

vel etiam

$$p'=2a+b+c,\quad q'=b+c,\quad r'=b-c.$$

Alia analysis. Loco a, b, c scribantur $\frac{x}{s}$, $\frac{y}{s}$ et $\frac{z}{s}$, ut debeat esse

$$xyz(x+y+z)=s^4.$$

Jam fiat primo $s^4=(x+y+z)^2pp$, eritque $xyz=(x+y+z)pp$, hinc

$$z=\frac{(x+y)pp}{xy-pp}\quad\text{et}\quad x+y+z=\frac{xy(x+y)}{xy-pp},\quad\text{ergo}\quad ss=\frac{xyp(x+y)}{xy-pp}.$$

Ponatur porro $x = nqq$ et $y = nrr$, fietque

$$ss = \frac{n^3 qqrrp(qq+rr)}{nnqqrr - pp}, \quad \text{sive} \quad \frac{ss}{nnqqrr} = \frac{np(qq+rr)}{nnqqrr - pp}.$$

Ponatur nunc $nqr - p = k(qq+rr)$ eritque $p = nqr - k(qq+rr)$, ergo

$$\frac{ss}{nnqqrr} = \frac{nnqr - nk(qq+rr)}{k(2nqr - k(qq+rr))} = \frac{n(k(qq+rr) - nqr)}{k(k(qq+rr) - 2nqr)}.$$

Casus I. Sit $n = 2k$, erit $\quad \dfrac{ss}{nnqqrr} = \dfrac{qq+rr-2qr}{qq+rr-4qr} = \dfrac{(q-r)^2}{qq+rr-4qr}.$

Sicque quadratum esse debet $qq+rr-4qr$, cujus radix ponatur $q + \frac{f}{g}r$, ita ut fiat

$$rr - 4qr = \frac{2f}{g}qr + \frac{ff}{gg}rr, \quad \text{vel} \quad ggr - 4ggq = 2fgq + ffr,$$

$$\text{vel} \quad (gg-ff)r = (4gg+2fg)q, \quad \text{sive} \quad \frac{q}{r} = \frac{gg-ff}{4gg+2fg}.$$

Sumatur ergo $q = gg - ff$ et $r = 4gg + 2fg$, eritque

$$\frac{ss}{nnqqrr} = \frac{(q-r)^2}{(q+\frac{f}{g}r)^2}, \quad \text{ideoque} \quad \frac{s}{nqr} = \frac{q-r}{q+\frac{f}{g}r} = \frac{3gg+ff+2fg}{gg+ff+4fg} \quad \text{et} \quad s = \frac{2k(gg-ff)(4gg+2fg)(3gg+ff+2fg)}{gg+ff+4fg}.$$

Quocirca erit $p = 2kqr - k(qq+rr) = -k(q-r)^2$, ideoque $x = 2kqq$, $y = 2krr$, $z = \frac{(x+y)pp}{xy-pp}$.

Casus II. Sumatur $n = k$, erit $\frac{ss}{kkqqrr} = \frac{qq+rr-qr}{(q-r)^2}$. Sit $\sqrt{(qq+rr-qr)} = q + \frac{f}{g}r$, erit

$$rr - qr = \frac{2f}{g}qr + \frac{ff}{gg}rr, \quad \text{vel} \quad ggr - ggq = 2fgq + ffr, \quad \text{hinc} \quad \frac{q}{r} = \frac{gg-ff}{gg+2fg}.$$

Sumatur ergo $q = gg - ff$ et $r = gg + 2fg$, ita ut sit

$$\frac{s}{kqr} = \frac{q+\frac{f}{g}r}{q-r} = \frac{gg+fg+ff}{ff+2fg}; \qquad \text{hincque erit}$$

$$p = kqr - k(qq+rr), \quad \text{vel} \quad p = k(qr - qq - rr), \quad \text{indeque} \quad y = krr, \quad x = kqq, \quad z = \frac{(x+y)pp}{xy-pp}.$$

Aliter. Cum sit $ss = \frac{xyp(x+y)}{xy-pp}$, dividetur per xy, eritque $ss = \frac{p(x+y)}{1-\frac{pp}{xy}}$. Sumatur $p = \frac{2xy}{x+y}$, fietque $ss = \frac{2xy(x+y)^2}{(x-y)^2}$. Superest ergo ut $2xy$ fiat quadratum. Sumatur $x = 2qq$ et $y = rr$ fietque

$$ss = \frac{4qqrr(2qq+rr)^2}{(2qq-rr)^2}, \quad \text{ideoque} \quad s = \frac{2qr(2qq+rr)}{2qq-rr}, \quad \text{hincque} \quad p = \frac{4qqrr}{2qq+rr},$$

$$\text{indeque} \quad x = 2qq, \quad q = rr, \quad z = \frac{pp(2qq+rr)}{2qqrr-pp}, \quad \text{vel} \quad z = \frac{8qqrr(2qq+rr)}{(2qq-rr)^2}.$$

Exemplum casus primi. Sit $g = 2$ et $f = 1$, erit $s = \frac{2.3.20.17}{13}k$, $q = 3$, $r = 20$, $p = 17^2 k$, $x = 2.9\,k$, $y = 2.20^2 k$, $z = \frac{818.17^4 k^3}{409.13^2 kk}$, vel $z = \frac{2.17^4 k}{13^2}$, hinc

$$a = \frac{x}{s} = \frac{3.13}{17.20}, \quad b = \frac{y}{s} = \frac{13.20}{3.17}, \quad c = \frac{z}{s} = \frac{17^3}{3.13.20},$$

quorum productum est $\frac{13.17}{3.20}$ et summa .... falsa!

p. 122 — 127.

9. (*N. Fuss I.*)

Tentamen demonstrationis theorematis Fermatiani, quod esse nequeat $x^n + y^n = z^n$, statim ac n superat binarium.

Pro casu $n=3$ res eo redit, ut demonstretur hanc formulam $ab(a+b)$ cubum esse non posse, ubi a et b sint primi inter se. Ponatur ergo $ab(a+b) = x^3$ eritque $4a^3b + 4aabb = 4ax^3$, sive $(aa+2ab)^2 = 4ax^3 + a^4$, unde $aa + 2ab = \sqrt{(4ax^3 + a^4)}$. Quoniam hic x et a non sunt numeri primi inter se, sit d maximus eorum communis divisor, ac ponatur $a = dp$ et $x = dz$, sicque p et z erunt primi inter se, et quia a et b etiam sunt primi inter se, erit quoque b primus ad d et p, tum igitur erit

$$2dbp + ddpp = dd\sqrt{(4pz^3 + p^4)}, \quad \text{ideoque} \quad \sqrt{(4pz^3 + p^4)} = \frac{2bp}{d} + pp.$$

Erit ergo $\frac{2bp}{d}$ numerus integer. Quia ergo b primus ad d, necesse est, ut $\frac{p}{d}$ sit integer; ponatur ergo $p = dq$, erit $\sqrt{(4dqz^3 + d^4q^4)} = 2bq + ddqq$. Unde quia radix factorem habet q, at z ad q primus, necesse ut d habeat factorem. Sit ergo $d = qr$ eritque $\sqrt{(4qqrz^3 + q^6r^4)} = 2bq + q^4rr$, seu $\sqrt{(4rz^3 + q^6r^4)} = 2b + q^3rr$. Sicque erit r factor quantitatis post signum, dum alter factor est $4z^3 + q^6r^3$, unde necesse est $r = \square$. Sit ergo $r = ss$, erit $\sqrt{(4z^3 + q^6s^6)} = \frac{2b}{s} + q^3s^3$. At vero $\frac{2b}{s}$ numerus integer esse non potest, unde patet aequationem nullo modo subsistere posse. Sicque impossibile erit, ut sit $ab(a+b) = x^3$, neque ergo unquam esse poterit $a^3 + b^3 = c^3$. Facile autem patet, hoc modo rem de altioribus potestatibus demonstrari posse. Verum haec conclusio maxime est incerta, cum fieri posset tam $s=1$, quam $s=2$. Ceterum theorema Fermatianum huc redit, ut demonstretur nunquam fieri posse, ut haec formula $1 + 4x^n$, vel etiam $1 - 4x^n$ unquam evadat quadratum, simul ac exponens n binarium superaverit; hic autem x omnes numeros rationales tam fractos, quam integros significare potest. Reducatur enim res ad numeros integros, ponendo $x = \frac{pq}{rr}$ et formula evadet

$$r^{2n} \pm 4p^nq^n = \square,$$

cujus radix statuatur $r^n + 2\nu$, ita ut ν primus ad r, erit

$$r^{2n} + 4p^nq^n = r^{2n} + 4\nu r^n + 4\nu\nu, \quad \text{unde erit} \quad r^n = \frac{4p^nq^n - 4\nu\nu}{4\nu}, \quad \text{sive} \quad p^nq^n = \nu(r^n + \nu),$$

qui duo factores sunt primi inter se, unde uterque debet esse potestas exponentis n. Capi ergo poterit $\nu = p^n$, tum autem erit $r^n + \nu = q^n$, ideoque $r^n + p^n = q^n$.

Quare si haec formula $1 \pm 4x^n$ fuerit impossibilis, etiam impossibile erit

$$\text{ut} \quad r^n + p^n = q^n.$$

A. m. T. II. p. 161.

10. (*J. A. Euler.*)

Ut fiat $x^2 + y^2 = \square$, sumatur $x + y = 3aabb$, $x - y = \frac{3a^4 - b^4}{2}$.

Summae vel differentiae duorum cuborum,

quae sint quadrata:

I. $2^3 + 1^3 = 3^2$, II. $8^3 - 7^3 = 13^2$, III. $65^3 + 56^3 = 671^2$, IV. $74^3 - 47^3 = 549^2$.

11. (*Lexell.*)

V. $37^3 + 11^3 = 228^2$, VI. $71^3 - 23^3 = 588^2$.

Proposito problemate, quo quaeruntur duo cubi inter se primi, quorum summa $x^3 + y^3$ sit quadratum, duo casus sunt perpendendi, alter, quo ambo numeri x et y sunt impares, alter vero, quo unus par, alter impar.

Pro *casu priori* erit $x = a + b$ et $y = a - b$, numerorum a et b altero existente pari, altero impari, hinc autem fit

$$x^3 + y^3 = 2a^3 + 6abb = 2a(aa + 3bb),$$

ubi iterum duo casus occurrunt: *primo* vel $2a$ et $aa + 3bb$ sunt primi inter se, quia $aa + 3bb$ est impar, ergo uterque factor seorsim esse debet quadratum, unde patet a esse debere parem, b vero imparem; ponatur ergo $2a = 4cc$, et quadratum insuper esse debet $aa + 3bb = 4c^4 + 3bb = \square$, quod facile fit; vel *secundo* $2a$ et $aa + 3bb$ communem factorem habere possunt 3, quod fit si a sit divisibile per 3, existente a pari; sit ergo $a = 6c$, fiet $12c(36cc + 3bb) = \square$, hinc $4c(12cc + bb) = \square$. Sit ergo $c = dd$, fierique debet $12d^4 + bb = \square$, quod facile fit. — Pro *posteriori casu* poni debet $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$, ubi uterque a et b impar; tum igitur quadratum esse debet $\frac{2a(aa+3bb)}{8} = \square$, sive $a(aa + 3bb) = \square$. Hic iterum vel a non est divisibile per 3, vel divisibile per 3; illo casu sit $a = cc$, ideoque $c^4 + 3bb = \square$, hoc vero casu sit $a = 3cc$, unde

$$3cc(9c^4 + 3bb) = \square, \quad \text{sive} \quad 3c^4 + bb = \square.$$

A. m. T. I. p. 129.

12. (*N. Fuss I.*)

Si esset $a^3 = b^3 + c^3$, foret $a^6 - 4b^3c^3 = (b^3 - c^3)^2$. Hinc ergo si demonstrari posset nunquam esse $a^6 - 4d^3 = \square$, theorema foret demonstratum. Quoniam igitur haec forma $a^6 - 4d^3$ continetur in hac $A^2 - dB^2$, etiam ejus radix quadrata similem formam habeat necesse est, quae ergo sit $pp - dqq$. Ergo fit $a^3 = pp + pq^3 = p(p + q^3)$. Hinc prior factor p debet esse cubus $= r^3$, et alter factor $r^3 + q^3$ pariter cubus. Unde si foret $b^3 + c^3 =$ cubo, alius casus hinc deduceretur $r^3 + q^3 =$ cubo.

A. m. T. II. p. 211.

13.

Observatio circa theorema **Fermatii**, quo affirmat, hanc aequalitatem $a^n + b^n = c^n$ semper esse impossibilem, simul ac exponens n excedat binarium, cujus autem demonstrationem nemo adhuc invenire potuit.

Reduci potest ista forma ad formulas, quae quadrata fieri debent. Multiplicetur enim formula proposita per $4a^n$ et utrinque addatur b^{2n}, prodibit

$$(2a^n + b^n)^2 = 4a^n c^n + b^{2n} = \square = BB.$$

Simili modo erit $4b^n c^n + a^{2n} = AA$, item $c^{2n} - 4a^n b^n = CC$. Totum negotium ergo eo redit, num impossibilitas harum formularum ostendi possit. Ceterum apparet sufficere, casus examinare, quibus n est numerus primus; nam si $a^n + b^n \neq c^n$, erit etiam $a^{\lambda n} + b^{\lambda n} \neq c^{\lambda n}$, sicque n spectari poterit ut numerus impar; tum autem formula $a^n + b^n$ factorem habet $a + b$. Debet ergo etiam esse $a + b = p^n$, similique modo $c - a = q^n$ et $c - b = r^n$. Quod si ergo hae conditiones cum praecedentibus conjungantur, impossibilitas fortasse facilius ostendi poterit. Non solum igitur ostendi oportet hanc formulam $4a^n c^n + b^{2n}$ non esse posse quadratum ita, ut simul $a + b = p^n$.

Pro casu $a = 1$ et $b = 1$ fit illa formula $4c^n + 1 = \square$, quod in integris nunquam evenire posse ita ostendo, quod quidem manifestum est si n est par. Pro imparibus autem statim patet c non esse posse numerum mparem. Sit igitur par $= 2d$, erit formula $2^{n+2}d^n + 1$, cujus ergo radix esse debet $1 + 2^{n+1}s$,

$$2^{n+2}d^n + 1 = 1 + 2^{n+2}s + 2^{2n+2}ss, \quad \text{unde} \quad d^n = s + 2^n ss = s(2^n s + 1),$$

qui factores cum sint primi inter se, debebit esse $s = t^n$, alter vero factor erit $2^n t^n + 1 = (2t)^n + 1$, quod est impossibile.

A. m. T. III. p. 165. 166.

14.

Theorema. Formula $1+2x^3$ nullo casu fit quadratum, neque in integris, neque in fractis, praeter casum $x=0$.

Demonstratio innititur huic fundamento, quod omnes cubi per 7 non divisibiles sint formae $7n\pm 1$. Hinc ergo omnes potestates sextae erunt formae $7n+1$. Deinde omnia quadrata sunt vel $7n$, vel $7n+1$, vel $7n+2$, vel $7n+4$, ita ut nulli numeri formae $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$ sint quadrati. Jam forma $1+2x^3$ in integris quadratum esse non potest. Si enim x per 7 non sit divisibile, forma numeri $1+2x^3$ erit $7n+3$ et $7n+6$, quorum neuter quadratum esse potest. Sumto autem $x=7a$, erit $1+2.7^3.a^3=zz$. Foret ergo $2.7^3.a^3=zz-1=(z+1)(z-1)$, ergo factorum $z+1$ et $z-1$ alter debet esse cubus, alter duplex cubus. Sumamus $z-1=7^3.b^3$, ideoque $z=1+7^3.b^3$, unde $2a^3=2b^3+7^3.b^6$, unde patet esse debere $a=bc$, erit ergo $2c^3=2+7^3.b^3$.

At si x est numerus fractus, ejus denominator debet esse quadratum. Ponatur ergo $x=\frac{a}{bb}$, fieri debet $b^6+2a^3=\square$, ubi nisi $b=7n$, semper erit $b^6=7n+1$ et $a^3=7n\pm 1$ (si a non est $7n$), ergo

$$b^6+2a^3=7n+1\pm 2,$$

hoc est vel $7n+3$, vel $7n-1$, neutro casu quadratum. Sit $a=7c$ erit $b^6+2.7^3.c^3=zz$. Sit $z=b^3+2.7^3d^3$, hinc $c^3=2b^3d^3+2.7^3.d^6$ et sumto $c=de$ erit $e^3=2b^3+2.7^3.d^3$, ergo e^3-2b^3 divisibile esset per 7, quod fieri nequit.

Verum rigida demonstratio postulat profundiores indagationes.

Theorema I. Si fuerit $2x^3+1=\square$, dari poterunt duo cubi, quorum summa vel differentia sit cubus quadruplus.

Demonstratio. Loco x scribamus $\frac{x}{yy}$ fietque $2x^3+y^6=zz$. Jam ponatur $x=ab$ fierique debet $zz-y^6=2a^3b^3$. Fiat ergo $z+y^3=2a^3$ et $z-y^3=b^3$, unde fit $2y^3=2a^3-b^3$, ergo $b^3=2(a^3-y^3)$. Fiat $b=2c$, erit $4c^3=a^3-y^3$.

Theorema II. Si dentur duo cubi, quorum summa vel differentia aequetur cubo quadruplo, dari poterit x, ut sit $2x^3+1=\square$.

Demonstratio. Sit $a^3+b^3=4c^3$, erit $4a^6+4a^3b^3+b^6=16a^3c^3+b^6=\square$. Jam sumatur $x=\frac{2ac}{bb}$ erit $\square=2x^3+1$.

Theorema III. Non dantur duo cubi, quorum summa vel differentia sit cubus quadruplus.

Demonstratio. Si enim fuerit $x^3+y^3=4z^3$, evidens est ambos numeros x et y esse debere impares, unde statui poterit $x=a+b$ et $y=a-b$, ita ut numerorum a et b alter sit par alter impar, unde fiet $2a^3+6abb=4z^3$, sive $a(aa+3bb)=2z^3$, ubi $aa+3bb$ erit numerus impar, unde patet a esse debere parem et b imparem. Hinc porro si ambo factores a et $aa+3bb$ fuerint primi inter se, debet esse $a=2p^3$ et $aa+3bb=q^3$. At vero si a sit $3c$, ambo factores communem habebunt divisorem 3, eritque

$$9c(3cc+bb)=2p^3q^3,$$

unde $9c$ debet esse duplus cubus veluti $2.27d^3$, ita ut $c=2.3d^3$, ideoque $a=2.9d^3$. Tum vero $bb+3cc$ debet esse cubus, unde casus duo sunt considerandi: prior, quo $a=2p^3$ et $aa+3bb=q^3$; alter, quo $a=2.9p^3$ et $aa+3bb=3q^3$, sive posito $a=3c$ debet esse $bb+3cc=r^3$. Quod autem uterque casus sit impossibilis, demonstrari potest ope sequentis lemmatis.

Lemma. Si fuerit $xx+3yy=$ cubo, certum est ejus radicem ejusdem fore formae, puta $pp+3qq$, ita ut $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Erit ergo $x+y\sqrt{-3}=(p+q\sqrt{-3})^3$, $x-y\sqrt{-3}=(p-q\sqrt{-3})^3$, hoc est

$$x+y\sqrt{-3}=p^3-9pqq+(3ppq-3q^3)\sqrt{-3},$$

unde fit $\quad x=p^3-9pqq \quad$ et $\quad y=3ppq-3q^3$.

Demonstratio casus prioris. Cum igitur $aa+3bb=$ cubo, per lemma erit $a=p^3-9pqq$ et $b=3ppq-3q^3$. Quam ob rem debet esse $a=p^3-9pqq=2$ cubis, unde hoc productum $p(p-3q)(p+3q)$ cubo duplo aequari debet, et cum numerorum p et q alter sit par, alter impar, erit p par, ideoque $p=2$ cubis. At vero $p+3q$ et $p-3q=$ cubo. Ponatur ergo $p+3q=r^3$ et $p-3q=s^3$, erit $2p=r^3+s^3=4t^3$, quod fieri non potest, quia si darentur tales numeri $a^3+b^3=4c^3$, nunc darentur multo minores $r^3+s^3=4t^3$.

Demonstratio alterius casus. Cum fieri debeat $bb+3cc=$ cubo, erit $b=p^3-9pqq$ et $c=3ppq-3q^3$. Cum igitur $a=3c$, erit $a=9(ppq-q^3)=2.9s^3$, sive $q(pp-qq)=2s^3$, ubi q erit par, ideoque ponatur

$$p+q=t^3 \quad \text{et} \quad p-q=u^3, \quad \text{erit} \quad 2q=t^3-u^3=4v^3.$$

Unde si magni darentur numeri, etiam in minoribus dari deberent, ut fiat $2x^3+1=\square$, quod autem cum in minimis non fiat, etiam in maximis non succedet.

A. m. T. III. p. 167—169.

15.

Problema. Invenire duos cubos, quorum summa aequetur dato multiplo cujuspiam cubi, sive ut sit

$$x^3+y^3=nz^3.$$

Solutio. Ponatur $n=\alpha\beta\gamma$ et fiat $x=a+b$ et $y=a-b$; tum vero $z=2\nu$, erit $a(aa+3bb)=4\alpha\beta\gamma\nu^3$. Fiat $aa+3bb=(pp+3qq)^3$ et vidimus fore $a=p(pp-9qq)$ et $b=3q(pp-qq)$, esseque oportebit $a=\frac{4\alpha\beta\gamma\nu^3}{(pp+3qq)^3}$. Sumatur $\nu=fgh(pp+3qq)$, ut prodeat $a=4\alpha\beta\gamma f^3g^3h^3$. Cum igitur sit $a=p(p+3q)(p-3q)$, fiat $p=\alpha f^3$, $p+3q=2\beta g^3$ et $p-3q=2\gamma h^3$. Hinc erit $p=\beta g^3+\gamma h^3$ et $3q=\beta g^3-\gamma h^3$. Hinc ergo debet esse

$$\alpha f^3=\beta g^3+\gamma h^3,$$

quod si ergo hoc fieri potest, etiam aequatio proposita erit confecta. Ita sumtis $f, g, h=\pm 1$, solutio locum habebit si fuerit $\alpha=\beta\pm\gamma$. Sumto $f=2$, $g=h=\pm 1$ solutio locum habet quoties fuerit $8\alpha=\beta\pm\gamma$. Tali autem casu, quo $\alpha f^3=\beta g^3+\gamma h^3$, invento, erit $p=\alpha f^3$ et $q=\frac{\beta g^3-\gamma h^3}{3}$, unde porro deducitur $a=p(pp-9qq)$ et $b=3q(pp-qq)$, ex quibus denique $x=a+b$ et $y=a-b$. Tandem autem erit $z=2\nu=2fgh(pp+3qq)$.

Exemplum 1. Sit $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$, ideoque $n=6$, fiet $3f^3=2g^3+h^3$, quod fit si $f=1$, $g=1$, $h=1$, tum autem erit $p=3$ et $q=\frac{1}{3}$, unde deducitur $a=24$ et $b=\frac{80}{9}$. Erit ergo $a:b=27:10$. Sit ergo $a=27$ et $b=10$ eritque $x=37$, $y=17$, $z=\frac{56}{3}$. Cum jam sit $x^3+y^3=(x+y)(xx-xy+yy)$, erit $x+y=54$ et ob $x-y=20$, ergo $xx-2xy+yy=400$ et $xx-xy+yy=1029$, ergo $x^3+y^3=54.1029=6.3^3.7^3$.

Exemplum 2. Sit $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=1$, ideoque $n=15$, fiet $p=5f^3=3g^3+h^3$, quod fit si $h=2$ et $g=-1$ et $f=1$; tum erit $p=5$, $q=-\frac{11}{3}$, unde $a=5.96$ et $b=\frac{104.11}{9}$. Sumatur $a=540$, $b=143$, $x=683$, $y=397$ fietque $x^3+y^3=15z^3$.

Observatio maximi momenti. Arbitratus sum, si fuerit $xx-nyy=(pp-nqq)^3$, etiam fore

$$x+y\sqrt{n}=(p+q\sqrt{n})^3 \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{n}=(p-q\sqrt{n})^3,$$

unde facta evolutione fiat $x=p^3+3npqq$ et $y=3ppq+nq^3$. At nunc se mihi casus obtulit maxime discrepans

$16^2-3.23^2=(1-3.2^2)^3$, unde deberet esse $16+23\sqrt{3}=(1+2\sqrt{3})^3$, quod autem neutiquam contingit. Similique modo deberet esse $16-23\sqrt{3}=(1-2\sqrt{3})^3$. Interim tamen productum priorum

$$16^2-3.23^2=(1-3.2^2)^3=37^2-3.30^2.$$

Revera igitur hoc remedium afferri debet: Si fuerit $xx-nyy=(pp-nqq)^3$, tum sumtis factoribus dabuntur numeri f et g, ut sit $x+y\sqrt{n}=(f+g\sqrt{n})(p+q\sqrt{n})^3$ atque $x-y\sqrt{n}=(f-g\sqrt{n})(p-q\sqrt{n})^3$, ubi necesse est, ut sit $ff-ngg=1$. Haec ergo applicemus ad casum observatum, ubi est $x=16$, $n=3$, $y=23$, deinde $p=1$, $q=2$, et facto calculo litterae f et g ita determinantur, ut sit $f=-\frac{1478}{1331}$ et $g=-\frac{371}{1331}$, unde revera fit $ff-3gg=1$. Unde patet hujusmodi coëfficientes nullo modo divinari posse.

Sequens autem consideratio me ad hunc casum deduxit: Quaesivi numeros x et y, ut $(x+y)(xx+yy)$ fiat cubus, et vidi esse debere $x+y=4A^3$ et $xx+yy=2B^3$. Posui ergo $xx+yy=2(aa+bb)^3$ et inveni $x=a(aa-3bb)$ et $y=b(3aa-bb)$. Hinc porro inveni hanc solutionem $y=-9$ et $x=13$, deinde ex hoc casu elicui $x=7.37.61$ et $y=9.13.229$. — At vero valores litterarum f et g multo simplicius exhiberi possunt, uti ex sequente problemate patebit:

Problema. Invenire numeros inter se primos x et y, ut sit $xx-3yy$ cubus.

Solutio. Primo haec conditio est adjicienda, ut numeri x et y sint primi inter se: si enim compositi admittantur, solutio esset facillima sumendo

$$x=a(aa-3bb) \quad \text{et} \quad y=b(aa-3bb); \quad \text{tum enim foret} \quad xx-3yy=(aa-3bb)^3.$$

Ponatur igitur $xx-3yy=(pp-3qq)^3$ et sumtis factoribus fiat

$$x+y\sqrt{3}=(f+g\sqrt{3})(p+q\sqrt{3})^3$$

similique modo
$$x-y\sqrt{3}=(f-g\sqrt{3})(p-q\sqrt{3})^3,$$

sic enim fiet $xx-3yy=(ff-3gg)(pp-3qq)^3$. Necesse igitur est, ut sit $ff-3gg=1$, quod infinitis modis fieri potest. Primo $f=1$ et $g=0$; secundo $f=2$ et $g=1$; tertio $f=7$ et $g=4$; quarto $f=26$ et $g=15$. et in genere

$$f+g\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n$$

$$f-g\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n.$$

His notatis cum sit $(p+q\sqrt{3})^3=p(pp+9qq)+3q(pp+qq)\sqrt{3}$. Ponatur brevitatis gr.

$$p(pp+9qq)=P \quad \text{et} \quad q(pp+qq)=Q, \quad \text{ut fiat} \quad (p+q\sqrt{3})^3=P+3Q\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (p-q\sqrt{3})^3=P-3Q\sqrt{3}.$$

Hinc ergo erit

$$x+y\sqrt{3}=fP+(gP+3fQ)\sqrt{3}+9gQ, \quad \text{unde fit} \quad x=fP+9gQ \quad \text{et} \quad y=gP+3fQ;$$

ubi notetur litteras f et g tam negative quam positive accipi posse.

Sit nunc $p=1$ et $q=2$, erit $P=37$ et $Q=10$, ergo $x=37f+90g$ et $y=37g+30f$; quare sumto $f=1$ et $g=0$, erit $x=37$ et $y=30$. At sumto $f=2$ et $g=1$ erit $x=164$, $y=97$. Sumto vero $f=2$ et $g=-1$ erit $x=16$, $y=23$, qui est ipse casus supra tam difficilis visus. Hoc ergo modo omnes casus possibiles pro x et y erui poterunt, ut $xx-3yy$ fiat cubus, dummodo litteris f et g omnes valores tam positivi quam negativi successive tribuantur. Eodem modo problema generalius solvi potest, ut fiat $xx-nyy$ cubus, qui sit $(pp-nqq)^3$ et sumto

$$ff-ngg=1 \quad \text{erit} \quad x+y\sqrt{n}=(f+g\sqrt{n})(p+q\sqrt{n})^3,$$

ubi erit
$$(p+q\sqrt{n})^3=p(pp+3nqq)\,[=P]+q(3pp+nqq)\sqrt{n}\,[=Q\sqrt{n}].$$

Hinc ergo erit

$$x + y\sqrt{n} = fP + gP\sqrt{n} + fQ\sqrt{n} + ngQ, \text{ ideoque } x = fP + ngQ \text{ et } y = gP + fQ,$$

quod ergo infinitis modis fieri potest, si modo fuerit $ff - ngg = 1$, id quod semper praestari potest quoties n fuerit numerus positivus. At si n fuerit numerus negativus, evidens est formulam $ff + ngg$, saltem pro f et g integris, aliter unitati aequalem esse non posse, nisi sit $f = 1$ et $g = 0$.

p. 169. 171.

68.

(Lexell.)

PROBLEMA. Datis numeris m et n, item a et b, invenire x et y, ut fiat

$$maa - nbb = nxx - myy, \quad \text{sive} \quad m(aa + yy) = n(bb + xx).$$

SOLUTIO. Ponatur $x = mpa + qb$ et $y = qa + npb$, unde fiet

$$maa - nbb = m(mnppaa - qqaa) + n(qqbb - mnppbb) = maa(mnpp - qq) - nbb(mnpp - qq).$$

Oportet ergo sit $mnpp - qq = 1$. Manifestum ergo est hoc problema solutionem non admittere, nisi numeri m et n sint summae duorum quadratorum. Quoties autem fuerint tales, ope problematis Pelliani semper invenire licet numeros p et q, ut fiat $mnpp = qq + 1$, sive $mnpp - 1 = \square$.

(J. A. Euler.)

Excipiuntur tamen casus, quibus vel mn est ipse numerus quadratus, vel in duo quadrata inter se prima resolvi nequit; cujusmodi sunt: 8, 18, 20, 32, 40, 45, etc. Sic si $mn = 13$, erit $p = 5$ et $q = 18$; nam $13.5^2 = 18^2 + 1$, et si $mn = 125$, erit $p = 61$ et $q = 682$, nam $125.61^2 = 682^2 + 1$ etsi $125 = 100 + 25$, quae non sint prima inter se, sed notandum est esse $125 = 11^2 + 2^2$, quae utique sunt prima.

A. m. T. I. p. 129.

69.

(N. Fuss I.)

PROBLEMA. Resolvere aequalitatem $ab(a + b)^2 = cd(c + d)^2$.

SOLUTIO. Ponatur $m(a + b) = n(c + d)$ fierique debet $nnab = mmcd$. Porro sit

$$a = mmps, \quad c = nnqs, \quad b = qrs, \quad d = prs,$$

unde prior aequatio erit $m^2p + mqr = n^2q + npr$, unde fit $r = \frac{n^2q - m^2p}{mq - np}$. Ut ergo fractiones evitentur, sumatur $s = mq - np$ eritque in numeris integris

$$a = mmp(mq - np), \quad b = q(n^2q - m^2p), \quad c = nnq(mq - np), \quad d = p(n^2q - m^2p).$$

Hinc enim fit

$$a + b = n(nnqq - mmpp), \quad c + d = m(nnqq - mmpp),$$

quae solutio est generalis. Notetur autem, si litterae a, b, c, d sint quadrata, veluti $a = A^2$, $b = B^2$, $c = C^2$, $d = D^2$, tum aequalitatem propositam accipere hanc formam

$$AB(AA + BB) = CD(CC + DD),$$

ad quam igitur solvendam illae quatuor formulae quadrata fieri debent. Primo ergo quadratum erit

$$\frac{a}{c}=\frac{mmp}{nnq},\quad \text{ideoque}\quad \frac{p}{q}=\square,\quad \text{sive}\quad pq=\square.$$

Praeterea vero quadratum esse debet

$$\frac{a}{b}=\frac{mmp\,(mq-np)}{q\,(n^3q-m^3p)},\quad \text{sive}\quad \frac{mq-np}{n^3q-m^3p}=\square,$$

hocque modo omnes erunt quadrata, unde eadem solutio prodit, quae supra est data.

Resolutio succincta aequalitatis $(aa+bb)\,ab=(cc+dd)\,cd$.

Sumtis pro m et n numeris quibuscunque capiatur $\frac{f}{g}=\frac{mm+nn}{mm-nn}$; tum vero sumatur

$$p=4f^3+fgg-3g^3,\quad q=4f^3+fgg+3g^3\quad \text{et}\quad s=4f^3-5fgg,$$

tum habebitur $a=mp$, $b=ns$, $c=ms$, $d=nq$. Veluti si sumatur $m=3$ et $n=1$, erit $\frac{f}{g}=\frac{5}{4}$, ideoque $f=5$, $g=4$, hinc $4ff+gg=116$, ergo $p=388$, $q=772$, $s=100$, seu $p=97$, $q=193$, $s=25$, unde fit $a=291$, $b=25$, $c=75$, $d=193$, hic scilicet numeros p, q, s per 4 deprimere licuit, quod semper evenit quando g numerus par.

Duo numeri a et b assignari possunt, ut fiat $10ab\,(aa+bb)=53$, quod utique in numeris integris fieri nequit. Hoc autem evenit sumendo $a=\frac{27}{10}$ et $b=\frac{4}{15}$, tum fit $ab=\frac{54}{75}$ et $10ab=\frac{540}{75}=\frac{36}{5}$; tum ob $a=\frac{81}{30}$ et $b=\frac{8}{30}$ erit $aa+bb=\frac{265}{30}$, ideoque $10ab\,(aa+bb)=53$.

Resolutio hujus formulae $ab\,(maa+nbb)=cd\,(mcc+ndd)$.

Posito $b=pc$ et $d=qa$, reperitur $\frac{aa}{cc}=\frac{mq-np^3}{mp-nq^3}$. Posito $p=q\,(1+z)$ et $\frac{a}{c}=1-5z$, porro $q=\frac{k}{h}$, ambo numeri h et k arbitrio relinquuntur. Tum sumatur $\frac{f}{g}=\frac{mhh+nkk}{mhh-nkk}$, eritque

$$a=h\,(4f^3-5fgg),\quad b=k\,(4f^3+fgg+3g^3),\quad c=h\,(4f^3+fgg-3g^3),\quad d=k\,(4f^3-5fgg).$$

Cum enim sit $\frac{mhh}{nkk}=\frac{f+g}{f-g}$, erit

$$maa+nbb=mn\,(2ff-gg)\,(4ff-3gg)\,(4f^3+fgg-3g^3)$$
$$mcc+ndd=mn\,(2ff-gg)\,(4ff-3gg)\,(4f^3+fgg+3g^3)$$

erit igitur
$$\frac{ab}{cd}=\frac{4f^3+fgg+3g^3}{4f^3+fgg-3g^3}\quad \text{et}\quad \frac{maa+nbb}{mcc+ndd}=\frac{4f^3+fgg-3g^3}{4f^3+fgg+3g^3}.$$

Ceterum hic patet, permutatis numeris h et k sumtoque g negativo, litteras a et b abire in d et c.

Alia Resolutio formulae $\frac{aa}{cc}=\frac{p^3-q}{q^3-p}$,

pro qua supra posuimus $q=p(1+z)$.

Nunc vero ponamus $q=nn(p-1)+p$, tum enim prodit

$$\frac{aa}{cc}=\frac{p^3-p-nn(p-1)}{n^6(p-1)^3+3n^4p(p-1)^2+3nnpp(p-1)+p^3-p},$$

ubi commode per $p-1$ dividitur prodibitque

$$\frac{aa}{cc}=\frac{pp+p-nn}{n^6(p-1)^2+3n^4p(p-1)+3nnpp+pp+p}.$$

Hoc modo habentur duae formulae ad quadratum reducendae scilicet

$$n^6pp+n^6p+n^8\quad \text{et}\quad n^6pp+3n^4pp+3nn+pp-(2n^6+3n^4-1)p+n^6.$$

Necesse ergo est, ut sit $(nn+1)^3=\square$, ideoque etiam $nn+1$. Sit igitur $nn+1=mm$ eritque

$$\frac{aa}{cc} = \frac{pp+p-mm+1}{m^6pp-2mm(mm-1)^2p+(mm-1)^3}:$$

hujusmodi autem binae formulae supra sunt resolutae. Ita si sumatur $m=2$, ut sit $q=4p-3$, hinc reperitur $p=\frac{8299}{64.3.5.7}$. Hae autem solutiones diversae erunt ab iis, quas prior solutio suppeditaverat. Ceterum hic statim ab initio scribi debuisset $mm-1$ loco nn.

Solutio generalior. Loco p et q scribatur $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ et formula resolvenda erit $\frac{p^3-qrr}{q^3-prr}$. Jam ponatur $p=1+\alpha z$, $q=1+\beta z$ et $r=1+\gamma z$ et habebimus

$$\frac{3\alpha-\beta-2\gamma+(3\alpha\alpha-2\beta\gamma-\gamma\gamma)z+(\alpha^3-\beta\gamma\gamma)zz}{3\beta-\alpha-2\gamma+(3\beta\beta-2\alpha\gamma-\gamma\gamma)z+(\beta^3-\alpha\gamma\gamma)zz}=\square.$$

Hic igitur tantum opus est, ut fiat

$$\frac{3\alpha-\beta-2\gamma}{3\beta-\alpha-2\gamma}=\frac{ff}{gg}, \quad \text{unde} \quad 2\gamma=\frac{(3\alpha-\beta)gg-(3\beta-\alpha)ff}{gg-ff}.$$

Hoc modo prodit $\frac{p}{r}=1433$ et $\frac{q}{r}=473$. Veluti si $\alpha=2$ et $\beta=1$, fit $\gamma=\frac{5gg-ff}{gg-ff}=\frac{4gg}{gg-ff}+1$. Ergo si $g=1$ et $f=2$ erit $2\gamma=-\frac{1}{3}$, ideoque $\gamma=-\frac{1}{6}$, unde fit

$$\frac{3.64+433z+287zz}{3.16+132z+34zz}=\square.$$

Ceterum hic nil impedit, quominus sumatur vel $\alpha=0$, vel $\beta=0$, vel $\gamma=0$; tantum sumi non debet $\beta=\alpha$. Quovis autem casu simplicissima solutio ita reperitur: Cum fiat $\frac{A+Bz+Czz}{a+bz+czz}=\square$, in qua aequatione $\frac{A}{a}$ per hypothesin $=\square$, ponatur hoc $\square=\frac{A}{a}$, indeque prodit z. Sequens solutio imprimis est memorabilis, sumendo $p=(1+nn)z$, $q=1+z$, ac per artificium modo memoratum reperitur

$$z=\frac{(nn+1)(n^4-3nn+1)}{3n^4}, \quad \text{unde fit} \quad p=\frac{n^6-2n^4+nn+1}{3nn} \quad \text{et} \quad q=\frac{n^6+n^4-2nn+1}{3n^4},$$

unde pro solutione formulae $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$ statim habetur $a=3n^5$, $b=n^6-2n^4+nn+1$, $c=3nn$, $d=n(n^6+n^4-2nn+1)$, quandoquidem posueramus $b=cp$, $d=aq$, hinc autem colligitur $\frac{aa}{cc}=n^6$, hincque $\frac{a}{c}=n^3$. Quodsi jam pro casu simplicissimo sumatur $n=2$, fit $a=96$, $b=37$, $c=12$, $d=146$ hincque erit

$$ab=2^5.3.37, \quad cd=2^3.3.73, \quad aa+bb=5.29.73, \quad cc+dd=4.5.29.37.$$

Theorema. Ex qualibet resolutione aequationis $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$ semper alia solutio deduci potest.

Demonstratio. Quia $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$, erit $(a+b)^4-(a-b)^4=(c+d)^4-(c-d)^4$ hinc $(a+b)^4-(c+d)^4=(a-b)^4-(c-d)^4$, seu

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)(\square+\square)=(a-b+c-d)(a-b-c+d)(\square+\square).$$

Quamobrem si ponamus $a'=a+b+c+d$ et $b'=a+b-c-d$; dein etiam

$$c'=a+b-c-d \quad \text{et} \quad d'=a-b-c+d$$

erit $a'b'(a'a'+b'b')=c'd'(c'c'+d'd')$. Quia igitur erat $a=291$, $b=25$, $c=75$, $d=193$, erit $a'=584$, $b'=48$, $c'=384$, $d'=148$, qui per 4 depressi dant

$$a'=146, \quad b'=12, \quad c'=96, \quad d'=37,$$

quae est solutio posterior minima.

Formulae sat concinnae

pro resolutione formulae $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$

Sumtis pro lubitu binis quadratis ff et gg, capiatur $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3ff+gg}{3gg+ff}$, erit

$$a=f(\alpha+\beta)(\alpha\alpha-3\alpha\beta+\beta\beta)$$
$$b=g(\beta^3-5\alpha\beta\beta+4\alpha\alpha\beta-2\alpha^3)$$
$$c=g(\alpha+\beta)(\alpha\alpha-3\alpha\beta+\beta\beta)$$
$$d=f(\alpha^3-5\alpha\alpha\beta+4\alpha\beta\beta-2\beta^3)$$

vel si ponatur $(\alpha+\beta)(\alpha\alpha-3\alpha\beta+\beta\beta)=\Delta$, erit

$$a=f\Delta,\quad b=g(\Delta-2\alpha(\alpha-\beta)^2),\quad c=g\Delta,\quad d=f(\Delta-3\beta(\alpha-\beta)^2).$$

Pro numeris α et β construatur haec tabula:

f	g	α	β
2	1	13	7
3	1	7	3
3	2	31	21
4	1	49	19
4	3	57	43
5	1	19	7
5	2	79	37
5	3	21	13
5	4	91	73

Hinc si $f=3$ et $g=1$, erit $\alpha=7$ et $\beta=3$, hincque $\Delta=-50$, unde $a=150$, $b=386$, $c=50$, $d=582$, sive per 2 deprimendo $a=75$, $b=193$, $c=25$, $d=291$. Sit $f=5$ et $g=1$, erit $\alpha=19$ et $\beta=7$, unde $\Delta=286$, $a=1430$, $b=7922$, $c=286$, $d=13690$, sive $a=715$, $b=3961$, $c=143$, $d=6845$. Hinc per theorema alii reperiuntur hoc modo:

$$a'=2966,\quad b'=578,\quad c'=2487,\quad d'=864.$$

Problema Diophanteum. Cognito uno casu, quo haec formula $\frac{A+Bx+Cxx+Dx^3}{E+Fx}$ fit quadratum, ex eo alium casum derivare.

Solutio. Ponamus esse casu $x=e$, $\frac{A+Be+Cee+De^3}{E+Fe}=kk$, tum sumatur

$$s=\frac{B+2Ce+3Dee-Fkk}{2k(E+Fe)},\quad \text{quo facto alius casus erit}\quad x=\frac{C+2De-Ess-2Fks}{Fss-D};$$

tum enim erit
$$\frac{A+Bx+Cxx+Dx^3}{E+Fx}=(k-es+sx)^2.$$

Hoc ergo modo ex unico casu innumerabiles alii successive deduci possunt.

Analysis. Ponatur $\frac{A+Bx+Cxx+Dx^3}{E+Fx}=(k+s(x-e))^2$ et facta evolutione erit

$$A+Bz+Czz+Dz^3=Ekk+2kEs(z-e)+Ess(z-e)^2+Fkkz+2Fksz(z-e)+Fssz(z-e)^2,$$

hinc subtrahatur aequatio $A+Be+Cee+De^3=Ekk+Fekk$ et dividendo per $z-e$ prodit

$$B+C(z+e)+D(zz+ez+ee)=2Eks+Fkk+Ess(z-e)+2Fksz+Fssz(z-e).$$

Jam ponatur $z=e+v$, unde terminis ad eandem partem translatis erit

$$\left.\begin{array}{l} B+2Ce+3Dee-2Eks-Fkk-2Feks \\ +Cv+3Dev-Essv-Fsesv-2Fksv \\ +Dvv-Fssvv \end{array}\right\}=0.$$

Nunc littera s ita determinetur, ut prima linea evanescat, hoc est ponendo

$$s=\frac{B+2Ce+3Dee-Fkk}{2k(E+Fe)}$$

tum dividendo per v reperietur

$$v=\frac{C+3De-Ess-Fses-2Fks}{Fss-D},\quad \text{hincque}\quad z=\frac{C+2De-Ess-2Fks}{Fss-D},$$

tum igitur erit
$$\frac{A+Bz+Czz+Dz^3}{E+Fz}=(k-es+sz)^2.$$

Aliud problema. Ex cognito casu, quo $\frac{A+Bz+Czz}{D+Ez+Fzz}$ fit quadratum, invenire alium casum, quo idem obtineatur.

Solutio. Sit $z=e$ casus ille cognitus, quo fiat $\frac{A+Be+Cee}{D+Ee+Fee}=kk$ et ponatur $\frac{A+Bz+Czz}{D+Ez+Fzz}=kk$, ut sit

$$A+Bz+Czz=Dkk+Ekkz+Fkkzz \quad \text{hinc subtrahatur aequatio}$$
$$A+Be+Cee=Dkk+Eekk+Feekk$$

et facta divisione per $z-e$ prodibit

$$B+C(z+e)=Ekk+Fkk(z+e),\quad \text{unde statim elicitur}\quad z=\frac{Ekk+Fkke-B-Ce}{C-Fkk}.$$

Verum hoc modo unicus alius valor reperitur, namque ex invento iterum pristinus valor prodiret.

A. m. T. II. p. 157—161.

Theorema. Hae duae formulae $ab(aa+bb)$ et $2cd(cc-dd)$ ita inter se conveniunt respectu factorum non quadratorum, ut altera in alteram transformari possit.

Prior enim in posteriorem transmutatur ponendo $a=2cd$ et $b=cc-dd$. Vicissim autem posterior in priorem transmutatur ponendo $c=aa+bb$ et $d=2ab$; tum enim fit

$$2cd(cc-dd)=4ab(aa+bb)$$

Tres numeri formae $xy(xx-yy)$ infinitis modis dari possunt, qui inter se prorsus sint aequales, scilicet

I. $x=ff+3gg$ et $y=4fg$; II. $x=ff+3gg$ et $y=3gg-ff+2fg$;

III. $x=ff+3gg$ et $y=3gg-ff-2fg$.

His numeris resolvitur problema, *quo quaeruntur tria triangula rectangula, quorum areae sint inter se aequales.*

Nam in triangulo ABC sumtis cathetis $AC=2xy$ et $BC=xx-yy$, erit hypotenusa $AB=xx+yy$ et area $=xy(xx-yy)$. Ex prima igitur forma fit area

$$4fg(ff+3gg)(f-g)(f-3g)(f+g)(f+3g).$$

Ex secunda et tertia idem. Ratio investigationis haec est:

Ponatur $pr(p+r)(p-r)=qs(q+s)(q-s)$ et sumatur $q=p$, erit $r(pp-rr)=s(pp-ss)$, unde fit

$$pp=rr+rs+ss,\quad \text{sive}\quad pp-\frac{3}{4}ss=(r+\frac{1}{2}s)^2.$$

Erit ergo $2r + s = \sqrt{(4pp - 3ss)} = 2p - \frac{fr}{g}$, unde $\frac{p}{s} = \frac{ff + 3gg}{4fg}$.

Sumatur ergo $p = q = ff + 3gg$ et $s = 4fg$ eritque

$$2r + s = 2r + 4fg = \pm 2(ff + 3gg) - 4ff, \text{ hincque vel } r = 3gg - ff - 2fg, \text{ vel } r = 3(gg - ff) - 2fg.$$

Varii numeri formae $xy(xx - yy)$, qui eosdem factores non quadratos involvunt, sub littera F contentos, in hac tabella exhibuntur:

F	x	y
2.3	2	1
	25	24
2.3.5.7	5	2
	6	1
	8	7
2.3.5.11	6	5
	8	3
	27	22
2.7.11	9	2
	18	7
3.5.7.11	11	4
	16	5

Conjectura. Posito $xy(xx - yy) = A^2F$, inter numeros F videntur omnes numeri primi, vel ipsi, vel eorum dupla, vel ambo interdum occurrere, excepto scilicet binario, uti ex hac tabula colligere licet:

F	x	y
2.3	2	1
5	5	4
7	16	9
2.7	9	7
2.11	50	49
13	325	36
2.17	9	8
2.19	1250	289
23	156^2	133^2
2.23	121	23
29	29.13^2	70^2
31	1600	81

Problema. Invenire numeros p, q, x, y, ut sit $pq(pp - qq) = nxy(xx - yy)\,\square$, pro quolibet numero dato n.

Solutio tantum particularis tradi potest, et calculis satis molestis expeditis inveni sequentes valores

$$p = s^4 - 20nsstt - 8nnt^4 \qquad p + q = 2(ss - ntt)(ss - 4ntt)$$
$$q = (ss + 2ntt)(ss + 8ntt) \qquad p - q = 6ntt(5ss + 4ntt)$$
$$x = s^4 - 20nsstt - 8nnt^4 \qquad x + y = (5ss + 4ntt)(ss - 4ntt)$$
$$y = 4(ss - ntt)(ss + 2ntt) \qquad x - y = 3ss(ss + 8ntt).$$

Hic enim rejectis factoribus quadratis formula $xy(xx - yy)$ omnes continet factores alterius $pq(pp - qq)$, ac praeterea factorem n haec posterior continebit. Notandum hic est numerum n tam positive quam negative accipi posse. Deinde etiam valores singularum harum litterarum semper positivi capi possunt, etiamsi prodeant negativi.

Ita sumto $s=1$ et $t=1$ pro casu $n=2$ erit $p=71$, $q=85$, $x=71$, $y=20$. Hic loco p et q eorum semisumma et semidifferentia sumi possunt fietque $p=2.3.13$ et $q=7$. Hinc enim fiet

$$pq(pp-qq)=2.3.5.7.13.17.71 \quad \text{et} \quad xy(xx-yy)=3.5.7.13.17.71.$$

Sin autem sumatur $n=-2$ manente $s=t=1$, prodit $p=9$, $q=5.9$, sive $p=1$ et $q=5$, sive etiam $p=3$ et $q=2$, tum vero erit $x=9$, $y=4.9$, sive $x=1$ et $y=4$, tum enim erit

$$pq(pp-qq)=2.3.5 \quad \text{et} \quad xy(xx-yy)=3.5.$$

A. m. T. III. p. 121—123.

---

b) *Quaestiones ad resolutionem plurium aequationum ducentes.*

70.

(*W. L. Krafft.*)

Problema. Efficere, ut fiat $x+y+z=\square$ et $xyz=1$, ideoque $z=\frac{1}{xy}$.

Sequentes solutiones particulares prodierunt

I.	$x=\frac{1}{2}$,	$y=\frac{9}{2}$,	$z=\frac{4}{9}$
II.	$x=\frac{2}{9}$,	$y=\frac{50}{9}$,	$z=\frac{81}{100}$
III.	$x=\frac{13}{392}$,	$y=\frac{117}{392}$,	$z=\frac{392^2}{9\cdot 13^2}$
IV.	$x=\frac{2}{5}$,	$y=\frac{18}{5}$,	$z=\frac{25}{36}$
V.	$x=-2$,	$y=-\frac{2}{9}$,	$z=\frac{9}{4}$
VI.	$x=\frac{1}{6}$,	$y=\frac{1}{12}$,	$z=72$.

Si ratio x ad y sumatur $a:b$, et ponatur $x=ma$ et $y=mb$, erit $z=\frac{1}{mmab}$, unde fieri debet

$$m(a+b)+\frac{1}{mmab}=\square, \quad \text{sive} \quad m^3(a+b)+\frac{1}{ab}=\square,$$

seu

$$m^3 aabb(a+b)+ab=\square.$$

A. m. T. I. p. 121.

71.

(*Lexell.*)

Ut formulae $aa+Mbb$ et $aa+Nbb$ quadrata reddi queant, posito $M=m\mu$ capiatur $N=(\alpha pp+m)(\alpha qq+\mu)$, sicque pro dato numero M infiniti valores idonei pro N reperiuntur, veluti si $M=1$, ideoque $m=\mu=\pm 1$, erit $N=(\alpha pp\pm 1)(\alpha qq\pm 1)$. Si $p=1$, erit $N=(\alpha\pm 1)(\alpha qq\pm 1)$, cujusmodi formulae sunt

pro $\alpha=1$,	$N=2(qq+1)$	
$\alpha=2$,	$N=3(2qq+1)$,	$2qq-1$
$\alpha=3$,	$N=4(3qq+1)$,	$2(3qq-1)$
$\alpha=4$,	$N=5(4qq+1)$,	$3(4qq-1)$.

Ut formulae $aa + mmbb$ et $aa + nnbb$ reddi possint quadrata, numeros m et n ex talibus formis sumi oportet, (ubi quidem ratio inter m et n est definienda)

$$pq(rr-1),\quad pr(qq-1),\quad qr(pp-1),\quad p(qq-rr),\quad q(pp-rr),\quad r(pp-qq)$$
$$p(qqrr-1),\quad q(pprr-1),\quad r(ppqq-1),\quad ppqq-rr,\quad pprr-qq,\quad qqrr-pp,$$
$$ppqqrr-1,$$

quae formulae omnes ita sunt comparatae, ut si earum quadratis addatur idem quadratum $4ppqqrr$, proveniant quadrata.

A. m. T. I. p. 122.

Problema. Dato numero A, invenire conditiones numeri N, ut ambae istae formulae $xx + Ayy$, $xx + Nyy$ simul fieri possint quadrata.

Solutio. Ponatur $A = \mu\nu$, pro casu scilicet, quo habet factores, et priori formae satisfiet sumendo $x = \mu pp - \nu qq$ et $y = 2pq$, tum enim erit $xx + Ayy = (\mu pp + \nu qq)^2$. Simul vero etiam altera formula evadet quadratum, si fuerit $N = mmppqq + m(\mu pp - \nu qq)$; tum enim erit

$$xx + Nyy = (\mu pp - \nu qq)^2 + 4mppqq(\mu pp - \nu qq) + 4mmp^4q^4 = (\mu pp - \nu qq + 2mppqq)^2,$$

erit ergo $N = mmppqq + m(\mu pp - \nu qq)$, ubi m pro lubitu assumere licet. Quin etiam pro m fractiones assumere licet, ita ut pro N nihilominus prodeant numeri integri, sumto enim $m = n + \frac{\nu}{pp}$, tum enim fiet

$$N = \left(n + \frac{\nu}{pp}\right)(nppqq + \mu pp) = (npp + \nu)(nqq + \mu).$$

A. m. T. I. p. 128.

72.

(N. Fuss 1.)

Problema Diophanteum. Invenire numerum x ut his duabus conditionibus satisfiat

$$xx + 2ax + mmc = \Box \quad \text{et} \quad xx + 2bx + nnc = \Box,$$

cujus solutio particularis est

$$x = \frac{(nna - mmb)^2 - mmnn(m-n)^2 c}{2mn(m-n)(na - mb)}.$$

Ita si proponantur hae duae formulae: $xx + 2ax + c = \Box$ et $xx + 2bx + c = \Box$, sumatur $m = 1$ et $n = -1$

$$\text{eritque} \qquad x = \frac{(a-b)^2 - 4c}{4(a+b)}.$$

A. m. T. II. p. 154.

73.

Problema. Resolvere has duas aequalitates:

$$(2 + 2a)xx + (2 - 2a)yy = 4AA \quad \text{et} \quad (2 + 2b)xx + (2 - 2b)yy = 4BB.$$

Solutio. Hinc ergo primo erit $4A^2 + 4B^2 = (4 + 2(a + b))xx + (4 - 2(a + b))yy$; posito ergo

$$a + b = 2c, \quad \text{erit} \quad A^2 + B^2 = (1 + c)xx + (1 - c)yy.$$

Deinde vero erit $4A^2 - 4B^2 = 2(a - b)(xx - yy)$, unde posito $a - b = 2d$, erit $A^2 - B^2 = d(xx - yy)$. Statuatur ergo $A + B = x + y$ eritque $A - B = d(x - y)$. Addantur quadrata eritque

$$2A^2 + 2B^2 = (x + y)^2 + dd(x - y)^2 = 2(1 + c)xx + 2(1 - c)yy,$$

quae evoluta fit $(1 + dd)xx + (1 - dd)2xy + (1 + dd)yy = 2(1 + c)xx + 2(1 - c)yy$, sive

$$(dd - 2c - 1)xx + 2(1 - dd)xy + (dd + 2c - 1)yy = 0,$$

$$\text{sive} \qquad (dd - 1)(xx - 2xy + yy) - 2c(xx - yy) = 0,$$

quae commode per $x-y$ divisa fit $(dd-1)(x-y)-2c(x+y)=0$, unde reperitur

$$\frac{x}{y}=\frac{dd+2c-1}{dd-2c-1}.$$

Sumatur ergo $x=dd+2c-1$ et $y=dd-2c-1$, fietque

$$A+B=2(dd-1) \quad \text{et} \quad A-B=4cd, \quad \text{ergo} \quad A=dd+2cd-1 \quad \text{et} \quad B=dd-2cd-1.$$

Haec autem solutio tantum est particularis.

Problema. Resolvere has duas aequalitates:

$$xx+2axy+nccyy=A^2 \quad \text{et} \quad xx+2bxy+nddyy=B^2.$$

Solutio. Eliminetur littera n, quaerendo $A^2dd-B^2cc=xx(dd-cc)+2xy(add-bcc)$. Ponatur nunc

$$Ad+Bc=x(d+c), \quad \text{eritque} \quad Ad-Bc=x(d-c)+2y\left(\frac{add-bcc}{d+c}\right),$$

unde erit $2Ad=2dx+2y.\frac{add-bcc}{d+c}$, unde fit $A=x+y.\frac{add-bcc}{d(d+c)}$, quo valore substituto erit

$$2ax+nccy=2x.\frac{add-bcc}{d(d+c)}+y\left(\frac{add-bcc}{d(d+c)}\right)^2,$$

$$\text{unde fit} \qquad \frac{x}{y}=\frac{(add-bcc)^2-nccdd(d+c)^2}{2cd(d+c)(ad+bc)}.$$

A. m. T. II. p. 157.

74.

Resolutio aequationum

$$xx+2axy+cyy=A^2 \quad \text{et} \quad xx+2bxy+dyy=B^2.$$

Cum sit $A^2-B^2=2(a-b)xy+(c-d)yy$, sumatur $A-B=(a-b)y$, erit

$A+B=2x+\frac{c-d}{a-b}y$, hinc additis quadratis erit

$$2(AA+BB)=4xx+4.\frac{c-d}{a-b}xy+\left(\frac{c-d}{a-b}\right)^2yy$$
$$+(a-b)^2yy.$$

Cum igitur $2(AA+BB)=4xx+4(a+b)xy+2(c+d)yy$, inde sequitur

$$4.\frac{c-d}{a-b}x-4(a+b)x+\left[\left(\frac{c-d}{a-b}\right)^2+(a-b)^2-2(c+d)\right]y=0, \qquad \text{hincque fit}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{(c-d)^2+(a-b)^4-2(c+d)(a-b)^2}{4(a-b)(aa-bb-c+d)}.$$

Sumi ergo poterit $x=(c-d)^2+(a-b)^4-2(c+d)(a-b)^2$ et $y=4(a-b)(aa-bb-c+d)$. Haec solutio differt ab ea, quae supra est tradita, ubi loco c et d habuimus ncc et ndd, quod mirum non est, cum utraque solutio tantum sit particularis.

Eodem etiam modo hae aequalitates resolvi possunt

$$(2+a)xx+(nn-4)xy+(2-a)yy=A^2 \quad \text{et} \quad (2+b)xx+(nn-4)xy+(2-b)yy=B^2.$$

Facta enim simili operatione, dividi poterit per $x-y$, ac reperietur inde

$$x=n^4-8nn+(a-b)^2+2nn(a+b) \quad \text{et} \quad y=n^4-8nn+(a-b)^2-2nn(a+b).$$

In his autem formulis continetur casus supra tractatus, quando $n=2$.

A. m. T. II. p. 158.

75.

Problema. Invenire quatuor numeros positivos x, y, z, v, inter se primos, quorum tam summa quam summa quadratorum sit biquadratum.

Solutio. Positis $x = aa + bb + cc - dd$, $y = 2ad$, $z = 2bd$, $v = 2cd$, erit

$$xx + yy + zz + vv = (aa + bb + cc + dd)^2.$$

Ut vero fiat biquadratum, sumatur $a = pp + qq + rr - ss$, $b = 2ps$, $c = 2qs$, $d = 2rs$ eritque

$$aa + bb + cc + dd = (pp + qq + rr + ss)^2.$$

Ut vero etiam ipsa summa $x + y + z + v$ fiat quadratum, hoc fiet sumendo $p = s + \frac{3}{2}r - q$. Hoc enim modo erit $\sqrt{(x + y + z + v)} = 2qq - 3qr - 2qs + \frac{13}{4}rr + 5rs + 2ss$. Quae quantitas ut denuo fiat quadratum, posito $q = r + t$ reperitur $r = \frac{uu - 2tt + 2ts - 2ss}{t + 3s + 3u}$; hocque modo problemati satisfiet. Hinc sequens exemplum

$p = 10$	$a = 3$	$x = 409$	$x^2 = 167281$	$x + y + z + v = 625 = 5^4$
$q = 2$	$b = 20$	$y = 24$	$y^2 = 576$	$xx + yy + zz + vv = 21^4$.
$r = 2$	$c = 4$	$z = 160$	$z^2 = 25600$	
$s = 9$	$d = 4$	$v = 32$	$v^2 = 1024$	

Problema. Invenire quinque numeros positivos et inter se primos x, y, z, v, u, quorum tam summa quam summa quadratorum sit biquadratum.

Solutio. Statuatur $x = aa + bb + cc + dd - ee$, $y = 2ae$, $z = 2be$, $v = 2ce$, $u = 2de$ eritque summa

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + u^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)^2.$$

Praeterea capiatur $a = pp + qq + rr + ss - tt$, $b = 2pt$, $c = 2qt$, $d = 2rt$, $e = 2st$; hocque modo fiet

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + u^2 = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2)^2.$$

Jam ut etiam ipsa summa fiat quadratum, sumi debet $p = -q - r + \frac{3}{2}s + t$ atque radix summae erit

$$pp + qq + rr + ss + tt + 2st,$$

quae denuo evadet quadratum posito $r = q + s + g$, si capiatur

$$s = \frac{6qq - 4qt + tt + 6gq - 2gt - 2ft + 2gg - ff}{3f - g},$$

ubi quatuor litterae q, t, f, g nostro arbitrio relinquuntur, quas facile ita accipere licet, ut numeri quaesiti fiant positivi.

A. m. T. III. p. 125. 126.

76.

Problema. Invenire duos numeros positivos et inter se primos, x et y, quorum summa sit quadratum, summa autem quadratorum cubus.

Tales numeri simpliciores sunt $x = 29601 = 9.11.13.23$, $y = 25624 = 8.3203$, unde $x + y = 235^2$, $xx + yy = 1153^3$.

Analysis. Cum debeat esse $xx + yy = p^3$, necesse est, ut sit $p = aa + bb$; tum vero evadit $x = a(aa - 3bb)$ et $y = b(3aa - bb)$. Hinc autem erit $x + y = a^3 + 3aab - 3abb - b^3 = (a - b)(aa + 4ab + bb) = \square$. Fiat igitur $a - b = cc$ eritque $x + y = cc(6bb + 6bcc + c^4) = \square$. Sit igitur $c^4 + 6bcc + 6bb = \left(cc + 3b\frac{f}{g}\right)^2$, unde haec relatio

$$\frac{b}{cc} = \frac{2g(f - g)}{2gg - 3ff} = \frac{2g(g - f)}{3ff - 2gg}.$$

Quia numeri x et y debent esse positivi, necesse est, ut sit $aa > 3bb$, sive $a > b\sqrt{3}$, ergo $b + cc > b\sqrt{3}$, sive $cc > b(\sqrt{3} - 1)$, ideoque $\frac{b}{cc} < \frac{1}{\sqrt{3}-1} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Ponatur igitur

$$b = 2g(g - f) \quad \text{et} \quad cc = 3ff - 2gg, \quad \text{ergo} \quad 3ff - 2gg = \square.$$

Huic satisfit sumendo $f = 11$ et $g = 1$, vel etiam sumto $f = -3$ et $g = 1$, unde fit $c = 5$, $b = 8$, $a = 33$, hinc $x = 29601$ et $y = 25624$.

Si quaerantur tres numeri x, y, z, positivi et primi inter se, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa cubus, tales numeri sunt

$$35 + 9 + 5 = 7^2 \quad \text{et} \quad 35^2 + 9^2 + 5^2 = 11^3,$$

Simili modo etiam

$$67 + 9 + 5 = 9^2 \quad \text{et} \quad 67^2 + 9^2 + 5^2 = 19^3;$$

at vero methodus tales numeros inveniendi adhuc latet.

A. m. T. III. p. 128.

77.

Problema. Has duas formulas $xx + abyy$ et $xx + cdyy$ ad quadratum reducere.

Solutio. Pro priore ponatur $x = \zeta(app - bqq)$, erit $y = 2\zeta pq$; pro altera ponatur $x = \eta(crr - dss)$, eritque $y = 2\eta rs$. Ponatur igitur $\zeta pq = \eta rs = \zeta\eta fghk$, fiatque $p = \eta fg$, erit $q = hk$ et $r = \zeta fh$ et $s = gk$. Qui valores pro x substituti praebent

$$\frac{gg}{hh} = \frac{\zeta}{\eta} \cdot \frac{\zeta\eta cff + bkk}{\zeta\eta aff + dkk}. \quad \text{Quadratum ergo esse debet} \quad \zeta\eta(\zeta\eta cff + bkk)(\zeta\eta aff + dkk),$$

vel posito $\zeta\eta = \vartheta$, quadratum esse debet $\vartheta(\vartheta cff + bkk)(\vartheta aff + dkk)$, vel loco ϑ scribamus $\frac{\mu}{\nu}$, fieri debet $\mu\nu(\mu cff + \nu bkk)(\mu aff + \nu dkk)$, quod si reddi queat quadratum, tunc etiam ambae formulae propositae fiunt quadrata. Ubi scilicet litterae f, k, μ, ν pro lubitu accipi possunt.

A. m. T. III. p. 136.

Ut hae duae formulae $xx + nyy$ et $yy + nxx$ simul quadrata reddi queant, necesse est, ut numerus n in sequenti formula contineatur:

$$n = \frac{(s + xx - yy)(s - xx + yy)(s + xx + yy)(s - xx - yy)}{4ssxxyy}.$$

Quodsi fuerit $n = aa + 3$, tum ambae formulae quadrata reddi possunt; tum enim sumto $x = a + 1$ et $y = a - 1$ fiet $nxx + yy = (aa + a + 2)^2$ et $nyy + xx = (aa - a + 2)^2$. Hinc solus casus $a = 1$ excipitur; tum enim ob $n = 4$ foret $y = 0$. Praeterea vero innumeri alii dantur casus pro n, pro quibus inveniendis quaeratur numerus $c = \frac{xx + yy}{2d} \cdot \frac{dd - 1}{xy}$, tum enim semper erit $n = cc - dd + 1$.

Theorema. Hae duae formulae $xx + nyy$ et $yy + nxx$ simul quadrata reddi nequeunt, nisi $n + 1$ sit summa duorum quadratorum.

Demonstratio. Posito $xx + nyy = pp$ et $yy + nxx = qq$ erit $pp + qq = (n + 1)(xx + yy)$. Constat autem summam duorum quadratorum $pp + qq$ alios divisores non continere posse, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum. Quoties ergo $n + 1$ non fuerit summa duorum quadratorum, quod fit his numeris pro n assumtis:

2, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 26, etc.

ambae formulae simul quadrata fieri nequeunt.

Cum his formulis $7xx+yy=pp$ et $7yy+xx=qq$ satisfiat sumendo $x=3$ et $y=1$, unde fit $p=8$ et $q=4$, innumerabiles alii dabuntur valores pro x et y, ex quibus magno labore hos eruimus: $x=1121$ et $y=477$, unde fit $p=3004$ et $q=1688$, uti ex hoc schemate apparet:

$$\begin{array}{rlcrl} xx = & 3256641 & \quad & 7xx = & 8796487 \\ 7yy = & \underline{1592703} & & yy = & \underline{227529} \\ qq = & 2849344 & & pp = & 9024016 \\ q = & 1688 & & p = & 3004. \end{array}$$

A. m. T. III. p. 146.

77.

Problema. Invenire quatuor quadrata xx, yy, zz, vv, ut sit

$$xxyy-zzvv=A^2,\quad xxzz-yyvv=B^2,\quad yyzz-xxvv=C^2.$$

Solutio. Quaeratur formula F, quae addita producat quadrata. Talis est

$$F=x^4+y^4+z^4-2xxyy-2xxzz-2yyzz+2xxvv+2yyvv+2zzvv+v^4,$$

cui si addatur $4xxyy-4zzvv$ prodit quadratum $(xx+yy-zz+vv)^2$.

Si addatur $4xxzz-4yyvv$ oritur $(xx+zz-yy+vv)^2$
et addito $4yyzz-4xxvv$ prodit $(yy+zz-xx+vv)^2$.

Hinc ergo facto $F=0$, erit

$$A=\frac{xx+yy-zz+vv}{2},\quad B=\frac{xx+zz-yy+vv}{2},\quad C=\frac{yy+zz-xx+vv}{2}.$$

Fiat igitur $F=0$, et per extractionem quaeratur vv, eritque

$$vv=-xx-yy-zz+2\sqrt{(xxyy+xxzz+yyzz)}.$$

Ponatur ergo $\sqrt{(xxyy+xxzz+yyzz)}=S$, ut fiat $vv=2S-xx-yy-zz$. Fingatur autem $S=xy+tz$, ita ut $SS=xxyy+2xytz+ttzz=xxyy+xxzz+yyzz$, unde fit

$$z=\frac{2txy}{xx+yy-tt},\quad \text{hincque}\quad S=\frac{xy\,(xx+yy+tt)}{xx+yy-tt}.$$

Verum hi valores substituti pro vv dant expressionem inextricabilem. Fieret enim sex dimensionum. Necesse ergo est, ut rem ad formulas simpliciores reducamus.

Casus I. Sumatur $t=x-y$ fietque $z=x-y$ et $S=xx-xy+yy$, hincque porro $vv=0$, qui ergo casus prorsus est inutilis.

Casus II. Sumatur $t=y$ fietque $z=\frac{2yy}{x}$ et $S=\frac{xxy+2y^3}{x}$.

Alius conatus. Ex aequatione $F=0$ quaeratur valor ipsius xx, qui est

$$xx=yy+zz-vv\pm2\sqrt{(yyzz-yyvv-zzvv)}=2S+yy+zz-vv.$$

Quia hic yy multiplicatur per $zz-vv$, pro z et v tales valores sumantur, ut $zz-vv$ fiat quadratum, quod fit sumendo $z=5$ et $v=3$; tum erit $S=\sqrt{(16yy-225)}=4y-t$, unde $y=\frac{225+tt}{8t}$ et $S=\frac{225-tt}{2t}$. Tum igitur erit $xx=yy+16\pm2S$. Sumatur $t=5$, erit $y=\frac{25}{4}$ et $S=20$, ergo $xx=\frac{625}{16}+16\pm40=\frac{39^2}{4^2}$, ergo

$x=\frac{39}{4}$, $y=\frac{25}{4}$, $z=5$ et $v=3$, sive $x=39$, $y=25$, $z=20$, $v=12$. Tentemus etiam casum $t=3$: erit $y=\frac{39}{4}$ et $S=36$, ergo $xx=\frac{625}{16}$, ergo $x=\frac{25}{4}$, unde prodit casus praecedens.

Possemus etiam sumere $z=5$ et $v=4$: erit $S=\sqrt{(9yy-400)}=3y-t$, hinc

$$y=\frac{400+tt}{6t} \quad \text{et} \quad S=\frac{400-tt}{2t}, \quad \text{hinc} \quad xx=yy+9\pm 2S.$$

Sumatur $t=10$, erit $y=\frac{25}{3}$ et $S=15$, hinc $xx=$ incongruo.

Ex priore solutione $vv=2S-xx-yy-zz$ existente $z=\frac{2txy}{xx+yy-tt}$, $S=\frac{xy(x^2+y^2+t^2)}{x^2+y^2-t^2}$. Sumatur $x=5$ et $y=4$, fiet $z=\frac{40t}{41-tt}$ et $S=\frac{20(41+tt)}{41-tt}$. Porro si $t=\frac{13}{3}$, solutio supra data oritur, ex quo casu derivavi sequentem:

$$t=\frac{185}{153}, \quad \text{eritque} \quad z=\frac{5.185.153}{115693} \quad \text{et} \quad S=\frac{5.496997}{115693}.$$

A. m. T. III. p. 117. 118.

78.

Problème. Trouver trois nombres x, y, z tels, que le carré de chacun avec le produit des deux autres fasse un carré.

Solution. Qu'on pose, pour les deux premières conditions $xx+yz=pp$ et $yy+xz=qq$, et l'on aura $pp-qq=(x-y)(x+y-z)$. Soit donc $p-q=x-y$ et $p+q=x+y-z$, d'où l'on tire $p=x-\frac{1}{2}z$. Cette valeur substituée dans la première équation donne $z=4(x+y)$. Maintenant la troisième équation sera

$$16(x+y)^2+xy=\square.$$

Donc la racine sera plus grande que $4(x+y)$. Soit cette racine

$$4x+4y+s, \quad \text{et il y aura} \quad 8sx+8sy-xy=-ss.$$

Ajoutons de part et d'autre $-64ss$, pour avoir

$$(x-8s)(y-8s)=65ss=\frac{5ts}{u}\cdot\frac{13us}{t}.$$

Soit $x-8s=\frac{5ts}{u}$ et $y-8s=\frac{13us}{t}$, et pour ôter les fractions, supposons $s=tu$, et l'on aura $x=8tu+5tt$ et $y=8tu+13uu$. De là $z=4(x+y)=64tu+20tt+52uu$.

Exemple. Soit $t=1$ et $u=1$, et il y aura $x=13$, $y=21$, $z=136$, car alors

$$136^2+13.21=137^2, \quad 21^2+13.136=47^2, \quad 13^2+21.136=55^2.$$

Autre solution. Pour la première formule qu'on prenne $x=\frac{yz-ss}{2s}$, pour avoir $xx+yz=\left(\frac{yz+ss}{2s}\right)^2$. La seconde $yy+xz=\square$ donne $\frac{2syy+yzz-ssz}{2s}=\square=(y+pz)^2$, d'où l'on tire

$$y=\frac{2ppsz+ss}{z-4ps}, \quad \text{et de là} \quad x=\frac{p(pzz+2ss)}{z-4ps}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la troisième équation $zz+xy=\square$, celle-ci deviendra

$$z^4+(2p^4-8p)sz^3+17ppsszz+4p^3s^3z+2ps^4=\square.$$

Pour rendre carré le dernier terme, je prends $p=2$, et la formule sera

$$z^4+16sz^3+68sszz+32s^3z+4s^4=\square.$$

Mais on s'aperçoit d'abord qu'elle est carrée et que sa racine est $zz+8sz+2ss$, par conséquent z demeure

arbitraire. Donc puisque $p=2$, nous aurons $y=\frac{8sz+ss}{z-8s}$ et $x=\frac{4zz+4ss}{z-8s}$, et pour ôter les fractions, mettons dans ces formules t au lieu de z, et ainsi on pourra multiplier tous ces nombres par $t-8s$ et l'on aura

$$x=4(tt+ss),\quad y=s(8t+s)\quad \text{et}\quad z=t(t-8s),$$

d'où il est clair que pour t il faut prendre une valeur $>8s$. En prenant $s=1$ et $t=9$, on aura $x=328$, $y=73$, $z=9$, plus grands que les précédents.

Cependant les deux solutions s'accordent; mais pour avoir le cas le plus simple, il faut prendre $t=13$ et $s=1$; car alors on aura

$$x=680,\quad y=105,\quad z=65,\qquad \text{ou bien}\qquad x=136,\quad y=21,\quad z=13.$$

A. m. T. III. p. 145.

79.

Ad PROBLEMA, quo quaeruntur tres numeri x, y, z, ut quadratum cujusque una cum producto reliquorum faciat quadratum, cujus solutio specialis facile invenitur haec $x=aa-8ab$, $y=bb+8ab$, $z=4aa+4bb$.

Generaliter statui potest $x=aa+2b$, $y=bb+2a$, $z=ab(ab-4)$, quibus satisfit duabus conditionibus $xx+yz=\Box$, $yy+xz=\Box$, et ut tertiae quoque $zz+xy=\Box$ satisfiat, fieri debet

$$a^4b^4-(8a^3-2)b^3+17a^2b^2+4ab+2a^3=\Box.$$

Hinc istos valores inveni: $x=33$, $y=185$, $z=608$, tum vero $x=297$, $y=377$, $z=320$.

A. m. T. III. p. 176.

80.

PROBLEMA. Invenire tria quadrata pp, qq, rr, ut semisumma binorum sit quadratum, scilicet

$$\frac{pp+qq}{2}=zz,\quad \frac{pp+rr}{2}=yy,\quad \frac{qq+rr}{2}=xx.$$

Hinc solutiones simpliciores hujus problematis erunt hae quinque

$p=$ 89,	97,	119,	23,	17
$q=$ 191,	553,	833,	289,	697
$r=$ 329,	833,	1081,	527,	1127.

Directa autem hujus problematis solutio ita se habet:

$$p=(ff-2gg)(ss-2tt),\quad q=(ff+2gg+4fg)(2tt+ss+4st)-8fgst$$

Quia hic omnes litterae tam negative quam positive accipi possunt, haec formula plures admittit variationes, quarum una pro q, altera pro r accipi potest. Quo facto necesse est, ut $\frac{qq+rr}{2}$ reddatur quadratum. Praeterea vero notetur, quemlibet numerum formae $aa-2bb$ infinitis modis per similes formas exprimi posse. Ita formula $aa-2bb$ infinitis modis fieri potest $=\pm1$, scilicet ponendo

$a=1$,	3,	7,	17,	41,	99,	etc.
$b=1$,	2,	5,	12,	29,	70,	etc.

Cum igitur numeri $ff-2gg$ et $ss-2tt$ infinitis modis per similes formas exprimi queant, formula pro q et r data infinities infinitis modis variari poterit. Si enim fuerit

$$aa-2bb=\pm1,\quad \text{erit}\quad ff-2gg=(af\pm2bg)^2-2(ag\pm bf)^2,$$

ita tamen, ut p eundem valorem retineat. At vero hoc modo quaelibet solutio particularis satis difficilem postulat evolutionem; unde praecedens solutio longissime praecellit, cum sumtis numeris c et d pro lubitu, valores jam evolutos pro litteris p, q, r suppeditet. Hic etiam notasse juvabit infinitis modis fieri posse

$$aa - 2bb = 2cc - dd.$$

Cum enim fieri debeat $aa + dd = 2(bb + cc)$, hoc fiet sumendo $a = b + c$ et $d = b - c$. Erit ergo

$$c = a - b \quad \text{et} \quad d = 2b - a.$$

A. m. T. III. p. 178. 179.

81.

(*Lexell.*)

Problema de inveniendis quotcunque numeris p, q, r, s, t, etc., quorum quilibet ductus in summam reliquorum faciat quadratum, facile tentando sine analysi resolvi potest. Sit enim S summa omnium, et cum $p(S-p)$ debeat esse quadratum, ideoque $pS = pp + \square$, evidens est tam p quam S esse debere summam duorum quadratorum, ideoque pro S sumi conveniet talem numerum, qui pluribus modis in bina quadrata se resolvi patiatur, cujusmodi est $S = 130$, qui in binas partes secari debet, quarum productum sit quadratum, quandoquidem si una pars sit p, altera erit $S-p$, tales resolutiones hoc modo exhibemus:

$S = 130$,									
	p	2,	5,	13,	26,	32,	40,	49,	65
	$S-p$	128,	125,	117,	104,	98,	90,	81,	65

ubi notandum, valores ipsius p ex utraque columna sumi posse, ex his igitur excerpi oportebit vel ternos numeros, vel quaternos, vel quinos, vel senes etc., quorum summa faciat 130, ut sequitur: ternio 32, 49, 49. Sicque quinque habemus numeros 2, 5, 26, 32, 65, quorum quilibet in summam reliquorum ductus, producit quadratum. Alii quini: 2, 13, 26, 40, 49. Alii numeri idonei pro S assumendi, qui plurimas resolutiones admittunt, sunt 2210

$S = 2210$,					
	p	1,	5,	13	. . .
	$S-p$	2209,	2205,	2197	. . .

A. m. T. I. p. 112.

82.

Consideratio circa quadrata magica.

I. Quadrata magica facile eo reduci possunt, ut summae per columnas tam horizontales quam verticales evanescant, quod fit admittendo etiam numeros negativos; scilicet si quadratum fuerit impar, numeri inscribendi erunt 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, etc., sin autem quadratum fuerit par, numeri inscribendi erunt ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, etc. Quodsi enim ad singulos addatur numerus quidam impar, et summae per 2 dividantur, orientur numeri naturales; ita si ad singulos illos numeros addatur 9, semisses dabunt hos numeros ordine 4, 5, 3, 6, 2, 7, 8, 1.

II. In omni quadrato magico quaterna loca *connexa* voco, quando duo pro lubitu in columna quadam horizontali accipiuntur, quorum illud primum, alterum secundum voco, duo reliqua vero in alia columna horizontali ita accipiuntur, ut primum et tertium, itemque secundum et quartum in ea columna verticali existant, sive ut lineae 1 . . . 2 et 3 . . . . 4 sint horizontales, rectae vero 1 . . . . 3 et 2 . . . . 4 verticales. Jam sumtis hujusmodi quaternis locis, si primo inscribatur numerus quicunque $+a$, secundo $-a$, tertio $-a$ et quarto $+a$, hoc

modo nec summa horizontalium nec verticalium mutatur; hic enim nondum respicio ad eam conditionem, qua etiam summae per diagonales eaedem, hoc est nostro casu $=0$ esse debent.

III. Proposito igitur quadrato, in areolas quotcunque more solito diviso; omnes areolae hoc modo litteris inscribantur, ubi nihil impedit, quominus in eandem areolam quandoque duae, vel tres pluresve litterae hoc modo inscribantur: tot scilicet litteras hoc modo inscribi oportet, ut deinceps omnes numeri revera inscribendi obtineri queant, simulque proprietas diagonalium adimpleatur.

IV. Ita si proponatur quadratum novem areolarum, litterae inscribantur, ut in schemate adjecto videre est

$+a$	$+b$	$-a$ $-b$
$+c$	$-b$ $-c$	$+b$
$-c$ $-a$	$+c$	$+a$

pro diagonalibus autem praeterea esse debet $2a-b-c=0$, $2a+2b+2c=0$, unde sequitur $a=0$ et $b+c=0$, seu $c=-b$; unde quadratum ita se habebit

0	$+b$	$-b$
$-b$	0	$+b$
$+b$	$-b$	0

hinc autem numeri propositi obtineri nequeunt.

V. Commode autem in hoc quadrato areola media vacua relinquitur, scilicet cyphra implenda, ac tum inscriptio litterarum ita se habebit

$+a$ $+b$	$-b$	$-a$
$+c$	0	$-c$
$-c$ $-b$ $-a$	$+b$	$+c$ $+a$

ubi diagonales dant $2a+b+c=0$, ideoque $c=-2a-b$, et numeri inscripti erunt

I. $a+b$	II. $-b$	III. $-a$
IV. $-2a-b$	V. 0	VI. $2a+b$
VII. a	VIII. $+b$	IX. $-a-b$

Nunc quaerantur numeri pro a et b sumendi, ut prodeant numeri ± 1, ± 2, ± 3, ± 4. Sit igitur $a=1$ et $b=2$ et habebitur hoc quadratum

3	− 2	− 1
− 4	0	+ 4
1	2	− 3

ac si ad singulos numeros addatur 5, oritur quadratum solitum:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

VI. Tentetur quadratum sedecim areolarum. Proprietas diagonalium hic dat

$2a+2b+2e+2f=0$, $2a+2b+2g+2h=0$, ergo $f=-(a+b+e)$ et $h=-(a+b+g)$

et numeri inscripti sunt

I. $a+e$	II. $c-e$	III. $-a-b-c-g$	IV. $b+g$
V. $d-e$	VI. $b+e$	VII. $a+g$	VIII. $-a-b-g-d$
IX. $-d+g$	X. $-b-g$	XI. $-a-e$	XII. $a+b+d+e$
XIII. $-a-g$	XIV. $-c+g$	XV. $a+b+c+e$	XVI. $-b-e$.

Notentur ii, quorum negativa non occurrunt: II. $c-e$, III. $-a-b-c-g$, V. $d-e$, VIII. $-a-b-g-d$, IX. $-d+g$, X. $-b-g$, XII. $a+b+d+e$, XIV. $-c+g$, XV. $a+b+c+e$. Ut horum cuique socius comparetur, statuatur $g=e$, et nunc bini socii junctim repraesententur:

I. $a+e$, II. $c-e$, III. $-a-b-c-e$, IV. $b+e$	XI. $-a-e$, XIV. $-c+e$, XV. $a+b+c+e$, X. $-b-e$
V. $d-e$, VI. $b+e$, VII. $a+e$	IX. $-d+e$, XVI. $-b-e$, XIII. $-a-e$
VIII. $-a-b-d-e$	XII. $a+b+d+e$.

Hic autem quidam bis occurrunt. Verum haec methodus accuratiorem evolutionem postulat.

A. m. T. I. p. 28—30.

83.

N. Fuss I.

Eine LEICHTE REGEL, alle magische Quadrate von ungeraden Zahlen, die sich nicht durch 3 theilen lassen zu verfertigen, in welchen nicht nur alle Horizontal- und Vertikalreihen nebst den beiden Diagonalen, wie gewöhnlich erfordert wird, sondern auch die den Diagonalen parallel gezogenen Zahlenreihen, wenn man sie nämlich durch die gegenüberstehenden, gleich weit entfernten ergänzt, einerlei Summen geben, und wobei man zugleich nach Belieben in jedem Fache anfangen kann.

Dies geschieht vermittelst des bekannten Springerganges im Schachspiel, nach welchem man immer in die folgende Vertikalcolumne abwärts fortgeht, wobei zu merken, dass, wenn man unten an das Ende gekommen, man von da hinaufspringt, und ebenfalls, wenn man auf der rechten Seite ans Ende gekommen, wiederum in die erste Columne linker Hand einschlägt. Wo aber die Stelle schon besetzt ist, prallt man links nach eben dem Gang abwärts zurück, wie aus folgendem Schema zu ersehen:

1	14	22	10	18
25	8	16	4	12
19	2	15	23	6
13	21	9	17	5
7	20	3	11	24

Hievon wird die Ursache deutlicher werden, wenn man eben diese Operation auf eine allgemeine Art mit lateinischen Lettern a, b, c, d, e und griechischen α, β, γ, δ, ε anstellt, und dabei diese Ordnung beobachtet, dass man nach $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $a\varepsilon$ auf $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$, u. s. w. fortgeht

$e\delta$	$b\beta$	$d\varepsilon$	$a\gamma$	$c\alpha$
$d\gamma$	$a\alpha$	$c\delta$	$e\beta$	$b\varepsilon$
$c\beta$	$e\varepsilon$	$b\gamma$	$d\alpha$	$a\delta$
$b\alpha$	$d\delta$	$a\beta$	$c\varepsilon$	$e\gamma$
$a\varepsilon$	$c\gamma$	$e\alpha$	$b\delta$	$d\beta$

A. m. T. II. p. 237. 238.

D. Miscellanea.

84.

(*J. A. Euler.*)

Wie blos aus den dreieckigten Zahlen alle vieleckigten Zahlen leicht gefunden werden können.

Wenn die m-eckigte Zahl für die Seite n gefunden werden soll, so suche man die dreieckigte Zahl für eben die Seite n und auch die vorhergehende dreieckigte Zahl, für die Seite $n-1$; diese multiplicire man mit $m-3$ und zum Product addire man jene, so hat man die verlangte vieleckigte Zahl.

Denn für die Seite n ist die dreieckigte Zahl $=\frac{nn+n}{2}$ und für die vorhergehende Seite $n-1$ ist die Dreieckzahl $=\frac{nn-n}{2}$; also diese mit $m-3$ multiplicirt gibt $(m-3)\left(\frac{nn-n}{2}\right)$, hiezu $\frac{nn+n}{2}$ addirt gibt

$$\frac{(m-2)\,nn-(m-4)\,n}{2}.$$

Also wenn die 365-eckigte Zahl von 12 verlangt wird, so ist $m-3=362$, die Dreieckszahl für 12 ist 78, die für 11 ist 66, also die gesuchte Zahl wird sein

$$362.66+78=23970.$$

A. m. T. I. p. 237.

85.

(*N. Fuss I.*)

Theoremata circa problema Pellianum.

I. Si fuerit $nff-1=gg$, erit $n(2fg)^2+1=(2gg+1)^2$.

Demonstratio. Cum enim sit $nff=gg+1$, multiplicando per $4gg$ fiet

$$4nffgg=4g^4+4gg$$

et addendo unitatem $$4nffgg+1=4g^4+4gg+1=(2gg+1)^2.$$

II. Si fuerit $nff-4=gg$, erit $nffgg+4=(gg+2)^2$.

Demonstratio. Cum enim sit $nff=gg+4$ et per gg multiplicando et 4 addendo prodit

$$nffgg+4=g^4+4gg+4=(gg+2)^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

III. Si fuerit $nff+4=gg$, erit $nff\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=\left(\frac{g^3-3g}{2}\right)^2$.

Demonstratio. Cum sit $nff=gg-4$, multiplicando per $\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2$ et addendo 1 fiet

$$nff\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=(gg-4)\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=\frac{g^6-6g^4+9gg}{4}=\left(\frac{g^3-3g}{2}\right)^2.$$

Hinc si $n=13$, quia $13.1^2-4=9=3^2$ in theoremate secundo habemus $f=1$ et $g=3$, unde sequitur $13.3^2+4=11^2$. Nunc pro tertio theoremate habemus $f=3$ et $g=11$, hinc $\frac{gg-1}{2}=60$ et $\frac{gg-3}{2}=59$; hinc $\frac{g^3-3g}{2}=649$, ex quo sequitur fore: $13.3^2.60^2+1=649^2=13.180^2+1$.

A. m. T. I. p. 281.

86.

Theorema. Si habeantur duo casus hujusmodi $qq-app=k$ et $ss-arr=\pm k$ et capiatur $x=qr\pm ps$ et $y=qs\pm apr$, erit $yy-axx=\pm kk$. At si k sit numerus primus, semper evenit, ut alterutri horum valorum, scilicet $x=qr+ps$ et $y=qs+apr$ fiant per k divisibiles, sicque habebitur

$$\frac{yy}{kk}-\frac{axx}{kk}=\pm 1.$$

A. m. T. I. p. 289.

87.

Theorema I. Si x fuerit numerus trigonalis, tum etiam $9x+1$ erit numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$ erit $9x+1=\frac{9aa+9a+2}{2}$. Est vero $9aa+9a+2=(3a+1)(3a+2)$, ideoque $9x+1$ erit numerus trigonalis, cujus radix est $3a+1$.

Corollarium 1. Si ergo x fuerit summa duorum trigonalium, tum etiam $9x+2$ erit summa duorum trigonalium. Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}$, erit $9x+2=\frac{9aa+9a+2}{2}+\frac{9bb+9b+2}{2}$.

Corollarium 2. Simili modo si x fuerit summa trium trigonalium, tum etiam erit $9x+3$ summa trium trigonalium. Si enim sit $x=\Delta+\Delta'+\Delta''$, tum erit $9x+3=9\Delta+1+9\Delta'+1+9\Delta''+1$.

Theorema II. Si x fuerit numerus trigonalis, tum etiam $25x+3$ erit numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $25x+3=\frac{25aa+25a+6}{2}$. Est vero $25aa+25a+6=(5a+2)(5a+3)$, unde

radix trigonalis erit $5a+2$. Hinc si x fuerit summa duorum trigonalium, erit etiam $25x+6$ summa duorum trigonalium; ac si x fuerit summa trium trigonalium, tum etiam erit $25x+9$ summa trium trigonalium.

Theorema III. Si fuerit x numerus trigonalis, erit etiam $49x+6$ numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $49x+6=\frac{49aa+49a+12}{2}=\frac{(7a+3)(7a+4)}{2}$ numerus trigonalis, cujus radix est $7a+3$. Hinc si x fuerit summa duorum trigonalium, erit etiam $49x+12$ summa duorum trigonalium; at si fuerit x summa trium trigonalium, erit itidem $49x+18$ summa trium trigonalium.

Theorema IV. Si fuerit x numerus trigonalis, erit etiam $81x+10$ numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $81x+10=\frac{81aa+81a+20}{2}=\frac{(9a+4)(9a+5)}{2}$ numerus trigonalis, ejusque radix $=9a+4$.

etc. etc.

Ex his igitur sequitur, si numerus $9x+3$ nullo modo in tres trigonales resolvi queat, tum etiam numerum x in tres trigonales resolvi non posse. Simili modo si numerus $25x+9$ resolutionem in tres trigonales non admittat, etiam numerus x non admittet. Ac si numerus $49x+18$ non admittat resolutionem in tres trigonales, numerus ipse x etiam non admittet.

A. m. T. II. p. 25 26.

88.

Theorema. Si productum $P=2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)$ dividatur per potestatem 2^n, quotus erit productum ex omnibus numeris imparibus:

$$1.3.5.7.9\ldots(2n-1).$$

Demonstratio. Cum sit

$$P=\frac{1.2.3.4\ldots.2n}{1.2.3.4\ldots.n}$$

multiplicetur supra et infra per 2^n eritque

$$P=\frac{2^n.1.2.3.4\ldots.2n}{2.4.6.8\ldots\ldots.2n}$$

ac divisione actu facta fiet $P=2^n.1\ 3.5.7\ldots(2n-1)$. Q. E. D.

A. m. T. II. p. 60.

89.

Theorema numericum. Si sumantur quotcunque numeri pro lubitu, veluti quatuor p, q, r, s, hincque formentur bini ordines totidem aliorum, hoc modo

$$a=p,\quad b=p+q,\quad c=p+q+r,\quad d=p+q+r+s$$

similique modo $\alpha=s,\quad \beta=s+r,\quad \gamma=s+r+q,\quad \delta=s+r+q+p.$

tum semper erit

$$\frac{1}{abcd}-\frac{1}{abc\alpha}+\frac{1}{ab\alpha\beta}-\frac{1}{a\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}=0.$$

Veluti si fuerint numeri dati 1, 2, 3, 4 erit $a=1$, $b=3$, $c=6$, $d=10$, $\alpha=4$, $\beta=7$, $\gamma=9$, $\delta=10$, eritque

$$\frac{1}{1.3.6.10}-\frac{1}{1.3.6.4}+\frac{1}{1.3.4.7}-\frac{1}{1.4.7.9}+\frac{1}{4.7.9.10}=0.$$

A. m. T. II. p. 208.

90.

THEOREMA. Si proposita fuerit haec formula $zz = aa + 2abx + max^2 + 2dex^3 + eex^4$, in qua sit

$$m = bb + dd - ff,$$

tum eadem forma sequentibus modis repraesentari potest:

$$1)\quad zz = (a + bx)^2 + xx(ex + d + f)(ex + d - f)$$

$$2)\quad zz = xx(ex + d)^2 + (a + (b + f)x)(a + (b - f)x),$$

unde sequitur $z = a + bx$ si fuerit vel $x = \frac{-d-f}{e}$, vel $x = \frac{-d+f}{e}$. Ex altera

$$z = x(ex + d) \quad \text{si fuerit} \quad \text{vel } x = \frac{-a}{b+f}, \quad \text{vel} \quad x = \frac{-a}{b-f}.$$

Praeter hos quatuor valores operationes vulgares praebent adhuc sequentes sex valores

$$\text{I.}\quad x = \frac{2ae + ff - dd}{2e(a - b)}, \qquad \text{II.}\quad x = \frac{2a(b - d)}{2ae + ff - bb}, \qquad \text{III.}\quad x = \frac{2ae + ff - dd}{2e(d + b)}, \qquad \text{IV.}\quad x = \frac{2a(b + d)}{-2ae + ff - bb},$$

$$\text{V.}\quad x = \frac{3aade + 4ab(ff - dd)}{(ff - dd)^2 - 4aaee}, \qquad \text{V.}\quad x = \frac{(ff - bb)^2 - 4aaee}{8abee + 4de(ff - bb)}.$$

A. m. T. III. p. 163.

ANALYSIS.

XI.

Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

(Conf. commentationem de eodem argumento in Actor. Acad. Berolinensis tomo V. A. 1749 pag. 139.)

---

§ 1. Dans le commerce littéraire de MM. Leibnitz et Jean Bernoulli, on trouve une grande controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, controverse qui a été traitée, de part et d'autre, avec beaucoup de force; sans pourtant que ces deux grands hommes fussent tombés d'accord sur cette matière, quoiqu'on remarque d'ailleurs entr'eux une très parfaite harmonie sur tous les autres points de l'analyse. Cette dissension paraît d'autant plus remarquable qu'elle roule sur un article de cette partie des Mathématiques qu'on nomme pures, et qu'on ne croit ordinairement susceptible d'aucune contestation, tout y étant fondé sur les plus rigoureuses démonstrations. Car on sait, que les autres questions, sur lesquelles les mathématiciens ne sont pas d'accord, appartiennent à la partie appliquée des Mathématiques, où les diverses manières d'envisager les objets et de les ramener à des idées mathématiques peuvent donner lieu à des controverses réelles; et on se vante même souvent qu'elles sont tout à fait bannies de l'analyse ou des mathématiques pures.

§ 2. En effet, la gloire d'infaillibilité que cette science s'est acquise, souffrirait une grande atteinte, s'il y avait des questions sur lesquelles les sentiments seraient non seulement partagés, mais où il serait même impossible de découvrir la vérité par une démonstration évidente qui puisse mettre fin à toutes les disputes. Comme il n'y a aucun doute qu'un tel accommodement entre les divers sentiments de MM. Leibnitz et Bernoulli n'ait lieu, je vais examiner l'un et l'autre, en pesant les arguments que chacun allègue tant pour la confirmation de son sentiment que pour la réfutation du contraire, et j'espère bien développer cette matière et la mettre dans tout son jour, de sorte qu'il n'y reste plus aucun doute, et que l'une et l'autre partie sera obligée de reconnaître la solidité de la décision que je donnerai, et qui mettra fin à toutes les disputes qui pourraient encore naître sur cette matière.

§ 3. M. Leibnitz donna le premier occasion à cette controverse avec M. Bernoulli, quand il avança dans la CXC épitre que la raison de 1 à -1, ou de -1 à $+1$ était imaginaire, puisque le logarithme, ou la mesure de cette raison était imaginaire, où il supposait évidemment que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires ou impossibles. Là-dessus, M. Bernoulli déclara, dans la CXCIII épître, qu'il n'était point du même avis, et qu'il croyait même que les logarithmes des nombres négatifs étaient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des

mêmes nombres pris affirmativement. Il soutient donc que $l(+x) = l(-x)$, ce qu'il veut prouver par l'égalité de leurs différentielles, vu que

$$dlx = \frac{dx}{x} \quad \text{et de même} \quad dl(-x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Contre cet argument M. Leibnitz réplique, que la règle commune de différentier ler logarithmes, en divisant la différentielle du nombre par le nombre même, n'avait lieu que pour les nombres affirmatifs, et que, par conséquent, cette différentiation $dlx = \frac{dx}{x}$ n'était juste, que lorsque x marquait une quantité affirmative. Mais j'avoue que cette réponse, si elle était juste, ébranlerait le fondement de toute l'analyse qui consiste principalement dans la généralité des règles et des opérations qui sont jugées vraies, de quelque nature qu'on suppose être les quantités auxquelles on les applique.

§ 4. Mais quoique la règle de différentier les logarithmes soit généralement vraie, de sorte que $dlx = \frac{dx}{x}$, soit que x fût une quantité affirmative ou négative, l'argument de M. Bernoulli ne prouve pas ce qu'il veut prouver. Je dis que de ce que les différentielles des quantités lx et $l(-x)$ sont égales, il ne s'ensuit nullement que les quantités mêmes soient égales entr'elles; puisqu'on sait que deux quantités qui diffèrent d'une constante ont la même différentielle. Ainsi les différentielles de $x+1$ et de $x-1$ sont l'une et l'autre $= dx$, sans qu'on en puisse conclure une égalité entre les quantités $x+1$ et $x-1$. Outre cela, M. Bernoulli aurait prouvé par le même raisonnement que $l2x = lx$ puisque

$$dl2x = \frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x} = dlx,$$

et en général, il s'en suivrait que $lnx = lx$, n marquant un nombre quelconque. C'est pourquoi de l'égalité entre les différentielles des lx et $l(-x)$ on ne peut rien conclure, sinon que ces deux logarithmes diffèrent entre eux d'une quantité constante. Et en effet, $l(-x)$ à cause de $-x = x.-1$, n'est autre chose que $lx + (l-1)$. Il est vrai que M. Bernoulli prétend que $l(-1) = l1 = 0$, auquel cas il serait sans doute $l(-x) = l(+x)$, mais c'est justement ce que M. Leibnitz avait nié et que M. Bernoulli voulait prouver par cet argument; de sorte que, de ce côté-ci, rien n'est encore décidé.

§ 5. Dans le même passage que je viens d'examiner, M. Bernoulli se sert encore d'un autre argument, mais qui ne diffère du précédent que dans la manière de le proposer; quand il soutient que la courbe logarithmique a, des deux côtés de son asymptote, deux parties égales et semblables; de sorte qu'à chaque abscisse ou logarithme répondent deux ordonnées ou nombres égaux, l'un affirmatif, l'autre négatif. Car, considérant l'équation de cette courbe $ydx = ady$, où x marque l'abscisse prise sur l'asymptote de la logarithmique, y l'ordonnée et a la sous-tangente constante, il en paraît suivre, que si à la même abscisse x répond la valeur $y = u$, il y répondra aussi $y = -u$; puisque, si $+udx = +adu$, il y aura aussi $-udx = -adu$. Mais ce raisonnement est semblable au précédent, et il en suivrait de même qu'à l'abscisse $= x$, répondrait aussi l'ordonnée $y = 2u$, et généralement $y = nu$, de sorte que cette courbe aurait non seulement deux ordonnées $y = u$, et $y = -u$ qui répondraient à l'abscisse $= x$, mais le nombre des ordonnées serait infini; conséquence qu'on est pourtant bien éloigné d'admettre. D'où l'on voit que cet argument ne prouve pas que la logarithmique ait deux branches pareilles des deux côtés de son asymptote.

§ 6. Mais on m'objectera peut-être que c'est pourtant le plus sûr moyen que de juger de la figure d'une ligne courbe et du nombre de ses branches par son équation, et que c'est par ce principe que les Géomètres déterminent les formes de toutes les courbes algébriques. A quoi je réponds que cette méthode n'a lieu que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou du moins conçue en termes finis, et que jamais une équation différentielle n'est propre à ce dessein. Car on sait qu'une équation différentielle est toujours indéterminée, à cause d'une quantité constante arbitraire qu'elle renferme et qu'on doit introduire dans l'intégration: de sorte qu'une telle équation embrasse toujours une infinité de courbes à la fois. On n'a qu'à regarder l'équation différentielle pour la parabole $2ydy=adx$, et l'on verra qu'elle contient non seulement cette équation finie $y^2=ax$, mais aussi celle-ci $y^2=ax\pm ab$, quelque valeur qu'on donne à la quantité b. Par conséquent, en ne considérant que l'équation différentielle $2ydy=adx$, on devrait conclure qu'à la même abscisse $=x$ répond non seulement l'ordonnée $y=\sqrt{ax}$, mais encore $y=\sqrt{(ax\pm a^2)}$, et en général $y=\sqrt{(ax\pm ab)}$. Cette réflexion est suffisante pour faire voir, qu'on ne peut guère juger de la forme d'une ligne courbe, en ne regardant que son équation différentielle.

§ 7. Or M. Bernoulli aussi bien, que plusieurs mathématiciens qui soutiennent encore le même sentiment, tâche de prouver encore par d'autres arguments que l'asymptote de la logarithmique est en même temps son diamètre. Ces arguments sont fondés ou sur la construction de cette courbe, ou sur l'analogie. On se sert de l'analogie, en considérant, au lieu de l'équation pour la logarithmique $dx=\frac{dy}{y}$, celle-ci qui est plus grande $dx=\frac{dy}{y^n}$ et dont l'intégrale est $x=C-\frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$: on y remarque que toutes les fois que n est un nombre impair, la courbe a sans contredit un diamètre, ou deux branches égales et semblables. Cela remarqué, dit-on, qu'on suppose $n=1$, et puisque 1 est un nombre impair, la logarithmique doit avoir la même propriété. C'est, à mon avis, le plus fort argument qu'on ait apporté jusqu'ici pour prouver que la logarithmique a un diamètre; or, je ferai voir néanmoins que cette conclusion qu'on en veut tirer, n'est pas assez sûre.

§ 8. Quand il s'agit, dans l'analyse, des cas d'intégrabilité, ou dans la géométrie, de certaines propriétés des lignes courbes, on trouve rarement des propositions assez générales, et il y faut presque toujours excepter un ou plusieurs cas, auxquels on ne peut pas faire l'application. On peut bien dire que cette formule $x^n dx$ est généralement intégrable, quelque nombre qu'on mette pour n, pourvu qu'on en excepte le cas $n=-1$. Et il en est de même de plusieurs autres formules générales dont on ne peut presque jamais affirmer, qu'elles soient intégrables dans tous les cas sans exception. Ainsi, quand on dirait que l'équation $dx=\frac{dy}{y^n}$ représente toujours une courbe algébrique, quelque nombre rationnel qu'on mette pour n, cette proposition ne souffrirait qu'une seule exception, celle du cas $n=1$. Donc, puisque ce cas est si particulièrement distingué de tous les autres, qui sera garant qu'il ne faut pas aussi faire une exception à la règle mentionnée à l'égard d'un diamètre qu'on voudrait attribuer à la courbe comprise sous l'équation $dx=\frac{dy}{y}$? Car, dans tous les autres cas où n est égal à un nombre impair, nous reconnaissons avec évidence la nécessité d'un diamètre, puisque dans ces cas, l'équation est intégrable: mais dans le cas $n=1$ cette évidence cesse entièrement, à cause de l'impossibilité de l'intégration. Par conséquent, on est au moins obligé d'avouer que la conclusion qu'on veut tirer de cet argument n'est pas assez sûre.

§ 9. On doutera peut-être que le jugement de la propriété d'un diamètre soit assujetti à de semblables exceptions qu'on doit reconnaître dans les intégrations: mais je ferai voir très clairement que, même dans les courbes algébriques, il faut souvent admettre quelque exception par rapport à la propriété des diamètres. Qu'on considère par exemple cette équation générale

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{(a^3(b+x))},$$

et on n'hésitera pas de conclure que cette courbe a toujours un diamètre, puisqu'en la réduisant à la rationalité, on parvient à une équation du 8ᵉ degré où tous les exposants des puissances de y sont pairs. Cependant, quelque sûre que paraisse cette conclusion, on en doit excepter le cas où $b = 0$. Car alors, si l'on délivre l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ de l'irrationalité, on aura précisément

$$y^2 - 2y\sqrt{ax} + ax = \sqrt{a^3x} \quad \text{ou} \quad y^2 + ax = (2y + a)\sqrt{ax}$$

et partant, prenant encore les carrés

$$y^4 + 2axy^2 + a^2x^2 = 4axy^2 + 4a^2xy + a^3x \quad \text{ou} \quad y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0,$$

qui, à cause du terme $4a^2xy$, est destituée de diamètre. Donc, puisque dans les courbes algébriques on est obligé de reconnaître quelquefois des exceptions, comment peut-on être assuré que le cas en question n'en exige pas aussi? Et partant, il s'en faut de beaucoup pour que l'argument apporté prouve invinciblement que la logarithmique ait un diamètre.

§ 10. La même incertitude se trouve dans les autres arguments qu'on tire de la construction de la courbe logarithmique par la quadrature de l'hyperbole. Car quand même on tournerait cette construction en sorte, qu'il en résulterait nécessairement deux branches de la logarithmique, on aurait encore des raisons assez fortes pour douter que ces deux branches appartienent nécessairement ensemble et qu'elles ne constituent qu'une seule ligne continue. Pour le prouver, je pourrais rapporter plusieurs exemples de constructions par lesquelles on obtient deux lignes courbes différentes qui ne sont pas liées ensemble par le lien de la continuité. Car, comme on peut toujours comprendre deux lignes courbes, quelque différentes qu'elles soient, sous une équation, en multipliant leurs équations ensemble, on n'a qu'à imaginer une telle construction qui convienne à cette équation composée, et elle fournira les deux courbes proposées, comme si elles ne formaient qu'une seule ligne courbe. Ou bien, ayant décrit sur le même axe les deux paraboles $v^2 = ax$ et $u^4 = a^3x$, qu'on en construise une nouvelle courbe dont l'ordonnée y, qui répond à la même abscisse x, soit égale à la somme des ordonnées $v + u$ des deux paraboles proposées; or chacune, de ces ordonnées pouvant être prise tant affirmativement que négativement, on trouvera pour chaque abscisse x quatre ordonnées $v + u$, $-v - u$, $v - u$, $-v + u$, et la courbe construite aura un diamètre. Néanmoins l'équation

$$y = v + u = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$$

nous fait voir que la courbe n'a pas de diamètre, comme je viens de remarquer dans l'article précédent.

§ 11. De plus, comme il y a des constructions, desquelles on tire deux courbes différentes, il y a aussi des constructions défectueuses qui ne donnent qu'une partie d'une ligne courbe. Car soit décrit un cercle dont le diamètre $= a$, sur lequel prenant l'abscisse $= x$, l'ordonnée y sera $= \sqrt{(ax - x^2)}$; qu'on prolonge ensuite chaque ordonnée, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à la corde $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{ax}$, et cette nouvelle ordonnée qui soit nommée $z = \sqrt{ax}$ marquera une

une parabole. Mais cette description de la parabole ne s'étend pas au-delà du cercle, quoique la parabole même s'étende à l'infini. Cette circonstance prouve encore, qu'il n'est pas toujours sûr de juger de la vraie forme d'une ligne courbe et de toutes les parties qu'elle renferme, par quelque construction qu'on en puisse donner.

§ 12. D'ailleurs, la méthode même de juger de toutes les parties qui appartiennent à la même ligne courbe, n'a proprement lieu que dans les courbes algébriques. Car, après avoir délivré l'équation qui exprime la nature de la ligne courbe de toute irrationalité, on considère l'équation rationnelle qui en résulte, si elle renferme des facteurs rationnels, ou non. Dans le premier cas, on juge que la courbe est composée d'autant de courbes différentes qu'il y a de facteurs: mais si l'équation n'est pas résoluble en facteurs rationnels, on conclut que tous les points qui sont marqués par cette équation, appartiennent à la même courbe. C'est pourquoi, quand il s'agit de courbes transcendantes, puisque l'équation même n'est pas algébrique, on ne saurait pas même former la question, si elle a des facteurs rationnels, ou non, et partant le jugement des parties qui appartiennent à la même courbe n'a plus lieu, si ces parties ne sont pas immédiatement liées ensemble. Et partant, on n'est pas en état de décider si la logarithmique a deux branches égales qui se rapportent de part et d'autre à la même asymptote, ou non. Au moins doit-on convenir, que cette décision, quelle qu'elle soit, n'est pas nécessairement liée avec le sujet en question, de savoir si les logarithmes des nombres négatifs sont réels ou imaginaires.

§ 13. Les logarithmes sont fondés sur un nombre constant, pris à volonté et dont on suppose le logarithme $=1$. Soit ce nombre e, et que x marque le logarithme du nombre y de sorte que $x=ly$, et alors on aura $y=e^x$. Donc le logarithme x d'un nombre proposé $=y$ n'est autre chose que l'exposant de la puissance de e qui est égale au nombre y. Dans les tables vulgaires, on suppose ce nombre arbitraire $e=10$, et alors x sera le logarithme du nombre y, si $10^x=y$, et dans les logarithmes qu'on nomme hyperboliques et dont la propriété est que, si ω marque une fraction infiniment petite, le logarithme du nombre $1+\omega$ est égal à ω, le nombre e, dont le logarithme $=1$, devient égal à 2,718281828459. Or, quelque valeur qu'on donne à ce nombre e, pourvu qu'elle soit >1, on voit de la formule $y=e^x$, que, toutes les fois que y est un nombre affirmatif, il est possible d'assigner à x une valeur réelle, de sorte que e^x devienne égale à y. Mais il est aussi évident que, si y est un nombre négatif, on ne saurait trouver pour x une valeur réelle, de sorte que la puissance e^x devienne négative et $=$ à y.

§ 14. Il est vrai cependant que si x est une fraction d'un dénominateur pair, la puissance, ou plutôt la racine e^x puisse être prise tant affirmativement que négativement, de sorte que, si le logarithme x est $=\frac{1}{2}$, le nombre y, dont le logarithme $=\frac{1}{2}$, puisse être aussi bien $=-\sqrt{e}$ que $=+\sqrt{e}$. Mais cette ambiguïté ne se rencontre que dans les cas où x est une fraction dont le dénominateur est un nombre pair: et si le logarithme x était $=2$, il serait certainement faux, que 2 fût le logarithme de $y=-ee$, puisque $-ee$ n'est nullement égal à ee: et partant il faut au moins avouer que les logarithmes des nombres négatifs en général ne sont pas réels. Mais pour ce qui regarde l'ambiguïté de la formule e^x, dans les cas où x est une fraction d'un dénominateur pair,

je ne sais pas si on la peut admettre dans les logarithmes. Car, ayant égard à la nature et à l'usage des logarithmes, il semble qu'à chaque logarithme ne puisse répondre qu'un seul nombre.

§ 15. Quoi qu'il en soit, on ne prouvera jamais, par de semblables raisonnements, que le logarithme de -1 est égal à celui de $+1$ ou à zéro, puisque e^0 ne peut avoir d'autres valeurs que $+1$. Si quelqu'un disait que e^0 peut être regardé comme $e^{\frac{0}{2}}$ et partant comme $\sqrt{e^0}$ ou $\sqrt{1}$, ce qui serait tant -1 que $+1$, on pourrait, par la même raison, prouver que x^1 étant $= x^{\frac{2}{2}}$ serait égal tant à $+x$ qu'à $-x$, et de plus que $a+x$ serait la même chose que $a-x$, et on pourrait soutenir, par le même argument, que toutes les quantités sont égales entre elles. Mais si le logarithme de -1 n'est pas $=0$, il sera nécessairement imaginaire; et puisque $-y = -1 . y$, nous aurons $l(-y) = l(-1) + ly$; d'où il est clair que, le log. de $+y$ étant réel, le log. de $-y$ doit absolument être imaginaire.

§ 16. La thèse qu'à tout logarithme x ne puisse répondre qu'un seul nombre y, sera encore confirmée, quand on considère la résolution de la formule e^x en cette série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $=1$. Cette série étant regardée dans l'analyse comme tout à fait équivalente à l'expression e^x, on ne saurait douter que sa valeur ne soit déterminée, dès qu'on donne à x une valeur donnée, puisque cette série est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on substitue pour x. Et par cette raison, on est en droit de soutenir, qu'en tant que l'expression e^x marque le nombre dont le log. $= x$, elle ne renferme jamais aucune ambiguïté, et que sa valeur est toujours unique et affirmative, quelque fraction qu'on prenne pour x, de sorte que, bien que x soit une fraction comme $\frac{1}{2}$, l'expression de e^x n'aura toujours qu'une seule valeur affirmative.

§ 17. Si l'on voulait insister, que la formule e^x, au cas $x = \frac{1}{2}$, eût une double valeur, et que $\frac{1}{2}$ fût le logarithme tant de $-\sqrt{e}$ que de $+\sqrt{e}$, il s'en suivrait que les logarithmes des nombres imaginaires sont pareillement réels. Car supposons $x = \frac{1}{3}$, et l'on sait que la formule $e^{\frac{1}{3}}$ renferme trois valeurs

$$\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e}$$

de chacune desquelles le log. serait $= \frac{1}{3}$. Supposons $x = \frac{1}{4}$, et les valeurs de $y = e^{\frac{1}{4}}$ seront

$$\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt[4]{e}, \quad +\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}.$$

Donc nous aurions $\qquad l(+\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}) = l(-\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}) = \frac{1}{4}$.

Mais $l\sqrt[4]{e} = \frac{1}{4} le = \frac{1}{4}$, d'où il suivrait que $l\sqrt{-1} = 0$. Or M. Bernoulli ayant fait cette belle découverte que $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ marque la quadrature du cercle, puisque $\sqrt{-1}$ est imaginaire sans contredit, il faut que $l\sqrt{-1}$ le soit aussi, et personne n'aura moins de droit que M. Bernoulli lui-même, de soutenir désormais que $l\sqrt{-1}$ soit $= 0$.

§ 18. Ayant donc fait voir, que personne n'a encore suffisamment prouvé, que les logarithmes des nombres négatifs soient réels, mais que plutôt le sentiment opposé, selon lequel les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires, est conforme à la vérité; je proposerai les difficultés qu'on rencontre de part et d'autre, soit qu'on soutienne que les logarithmes des nombres négatifs sont réels, soit qu'on les prenne pour imaginaires. Ces difficultés paraîtront si fortes et même tellement remplies de contradictions, qu'on comprendra à peine, comment il sera possible de se tirer d'affaire et de mettre la théorie des logarithmes à l'abri de toute attaque; or j'espère néanmoins en venir à bout.

§ 19. Si l'on veut avec M. Bernoulli, que les logarithmes des nombres négatifs soient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou, ce qui revient au même, que $l(-1)=0$, on trouve la difficulté suivante: Ou il est vrai que $la^x = xla$ généralement, ou non: s'il est vrai, il y aura de même

$$l(-1)^x = xl(-1) = 0$$

ce dont on sera aisément d'accord, si x est un nombre entier. Mais si x est une fraction, on aura aussi $l\sqrt{-1}=0$, et par conséquent, la réduction de M. Bernoulli des arcs de cercle aux logarithmes imaginaires serait fausse; ce qui serait absurde, puisque cette découverte est établie sur les plus solides démonstrations de l'analyse. Mais si l'on nie que $la^x = xla$, on renverse toute la théorie des logarithmes: car quoiqu'on voulût admettre la résolution $la^x = xla$ aux cas que x fût un nombre entier, elle deviendrait pourtant tout à fait inutile, si x marquait un nombre en général ou inconnu.

§ 20. Qu'on dise donc avec M. de Leibnitz, que les logarithmes des nombres négatifs ne sont point réels, mais imaginaires: et l'on s'apercevra bientôt qu'on retombe dans le même embarras. Car soit $l(-1)=p$, de sorte que p soit un nombre imaginaire, et l'on ne pourra nier que $l(-1)^n = np$, surtout quand n est un nombre entier. Soit donc $n=2$, et nous aurons

$$l(-1)^2 = l(+1) = 2p.$$

Mais dans la doctrine des logarithmes, c'est le premier principe que $l(+1)=0$; par conséquent, il y aurait $2p=0$ et partant $p=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On prouvera de même que $l\sqrt{-1}$, $l\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ et les logarithmes des plus hautes racines de l'unité devraient tous également être $=0$, d'où résulteraient les mêmes contradictions qui se sont rencontrées dans l'hypothèse précédente.

§ 21. Voilà donc des contradictions assez palpables qu'on rencontre, de quelque côté qu'on se tourne; je ne doute pas, que la plupart des mathématiciens ne s'en soient aperçus, bien qu'ils n'aient pas jugé à propos de publier leurs doutes sur cette matière, de peur de rendre l'analyse trop suspecte, s'ils n'étaient pas en état de sauver la théorie des logarithmes. Car ce serait sans doute une tache indélébile dans l'analyse, si la doctrine des logarithmes était tellement remplie de contradictions, qu'il fût impossible de trouver une conciliation. Aussi y a-t-il long-temps que ces difficultés m'ont tourmenté, et je me suis fait plusieurs illusions là-dessus, pour me satisfaire en quelque manière, sans être obligé de renverser tout à fait la théorie des logarithmes. Je me suis imaginé, que de même qu'une quantité admet toujours deux racines carrées, trois racines cubiques, quatre racines biquadratiques etc. ainsi une quantité pourrait avoir une double moitié, un triple tiers, un quadruple quart etc. dont l'un seulement serait réel, les autres imaginaires. Ainsi posant $ly=x$, je

concevais que

$$l\sqrt{y}=\frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad l(-\sqrt{y})=\frac{1}{2}x'$$

et que $\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}x'$ puissent être différents, quoique le double de l'un et de l'autre soit le même $= x$. De la même manière, pour les trois racines cubiques de y, il serait

$$l\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x; \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x' \quad \text{et} \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x''$$

où $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ soient des nombres différents, le premier $\frac{1}{3}x$ réel, et les deux autres $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ imaginaires, bien que le triple de chacun soit $= x$. Cette explication me paraissait bien extrêmement paradoxe et insoutenable, mais pourtant moins absurde que les contradictions que j'aurais été obligé d'admettre dans la théorie des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

§ 22. Ayant fait bien sentir l'importance de toutes ces difficultés qui se trouvent dans la doctrine des logarithmes et qui même paraissent des contradictions ouvertes, on aura de la peine à comprendre qu'il soit possible de lever toutes ces difficultés, sans porter aucune atteinte à la certitude de l'analyse et des règles sur lesquelles elle est fondée. Cependant la vérité est trop solidement établie, pour qu'elle puisse être assujettie à aucune contradiction, et ce ne sont que les manières peu justes, dont nous l'envisageons, qui peuvent nous éblouir. Souvent, il est si difficile de s'apercevoir de ce défaut de justesse qui se trouve dans nos idées et qui nous fait voir de si grandes difficultés, qu'il nous semble tout à fait impossible de sauver la vérité. Cela est précisément le cas où nous nous trouvons par rapport aux logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; car, après avoir bien pesé toutes les difficultés que je viens d'étaler, j'ai trouvé qu'elles ne viennent que de ce que nous supposons que chaque nombre n'a qu'un seul logarithme. Car si cette supposition était vraie, il serait bien certain, qu'on ne saurait guère trouver le moyen de se tirer de l'embarras où cette matière nous jette. Mais, dès que nous accordons qu'un nombre peut avoir plusieurs, et même une infinité de logarithmes, alors toutes les difficultés mentionnées perdent leur force et s'évanouissent tout à fait, et l'on reconnaîtra la plus parfaite harmonie entre toutes les vérités.

§ 23. Je dis donc que, quoique le nombre dont on suppose le logarithme $= 1$, soit déterminé, chaque nombre a néanmoins une infinité de logarithmes, dont tous, à l'exception d'un seul, sont imaginaires, si le nombre est affirmatif; mais s'il est négatif ou imaginaire, tous ses logarithmes seront également imaginaires. En conséquence de cela, le logarithme de l'unité sera non seulement $= 0$, mais il y aura encore une infinité de quantités imaginaires, dont chacune tient aussi bien lieu du logarithme de l'unité, que 0. Soient donc tous les logarithmes de l'unité

$$0, \; \alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \delta, \; \varepsilon, \; \zeta, \; \eta, \; \vartheta, \; \text{etc.}$$

et puisque le logarithme de la racine carrée est la moitié du log. de la puissance, $\sqrt{1}$ étant tant $+1$ que -1, les logarithmes de la première valeur $+1$ seront

$$0, \; \frac{1}{2}\beta, \; \frac{1}{2}\delta, \; \frac{1}{2}\zeta, \; \frac{1}{2}\vartheta, \; \text{etc.}$$

et les logarithmes de l'autre valeur -1 seront:

$$\frac{1}{2}\alpha, \; \frac{1}{2}\gamma, \; \frac{1}{2}\varepsilon, \; \frac{1}{2}\eta, \; \text{etc.}$$

qui sont différents des précédents, quoique leurs doubles donnent les logarithmes de l'unité. De même, prenant les racines cubiques, il y aura:

$$l1 = 0, \quad \frac{1}{3}\gamma, \quad \frac{1}{3}\zeta, \quad \frac{1}{3}\iota, \text{ etc.}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha, \quad \frac{1}{3}\delta, \quad \frac{1}{3}\eta, \text{ etc.}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta, \quad \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \frac{1}{3}\vartheta, \text{ etc.}$$

et cette considération détruit déjà la plupart des difficultés qui nous ont embarassé auparavant.

§ 24. Pour prouver cette pluralité infinie des logarithmes qui répondent à chaque nombre, on n'a qu'à regarder le grand rapport qui se trouve entre les logarithmes et les arcs de cercle: puisqu'on sait que les arcs de cercle se peuvent exprimer par logarithmes imaginaires, et réciproquement, les logarithmes par les arcs imaginaires du cercle. Donc, parce que les sinus ou cosinus répondent aux nombres et les arcs aux logarithmes, comme le même sinus se rapporte à une infinité d'arcs différents, ainsi il s'en suit que le même nombre se doit rapporter à une infinité de logarithmes différents. Nous connaissons mieux le cercle que la courbe logarithmique, et par cette raison, la considération du cercle nous conduira à une plus parfaite connaissance des logarithmes, que la logarithmique même; de plus, dans le cercle nous pouvons déterminer tous les arcs qui répondent au même sinus ou cosinus, et quoique ces arcs, dans le passage aux logarithmes deviennent imaginaires, ils ne laisseront pas, en nous convainquant de l'infinité des logarithmes, de nous donner à connaître leurs expressions et les espèces de non-réalité, sous lesquelles elles sont comprises; et c'est tout ce qu'on peut souhaiter pour l'intelligence d'une quantité imaginaire.

§ 25. Soit φ un arc quelconque d'un cercle dont je suppose le rayon $= 1$. Soit x le sinus de cet arc, et y son cosinus, de sorte que $y = \sqrt{(1-x^2)}$; donc, nommant la périphérie de ce cercle $= 2\pi$, ou l'arc de $180^\circ = \pi$, il est clair, que tous les arcs compris dans cette expression générale $\pm 2n\pi + \varphi$ auront non seulement le même sinus $= x$, mais aussi le même cosinus $= y = \sqrt{(1-x^2)}$, pourvu què n signifie un nombre entier quelconque. Or, puisque $d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qu'on suppose $x = z\sqrt{-1}$, et l'on aura $d\varphi = \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Mais on sait que $\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}} = l(\sqrt{(1+z^2)}+z)+C$. Par conséquent, nous aurons $\varphi = \sqrt{-1}\, l(\sqrt{(1-x^2)}+\frac{x}{\sqrt{-1}})+C$, où il est clair que la constante C est $= 0$, puisqu'en mettant $x = 0$, l'arc φ doit s'évanouir de même. Ayant donc

$$\varphi = \sqrt{-1}\, l(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1}), \quad \text{nous aurons} \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1})$$

ou bien

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}).$$

§ 26. Cette équation que nous venons de trouver, exprimant le rapport entre l'arc φ et les sinus et cosinus, aura aussi lieu pour tous les autres arcs qui ont le même sinus x et cosinus y; par conséquent nous aurons

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}) \quad \text{et partant,} \quad l(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

D'où il est clair qu'au même nombre $y + x\sqrt{-1}$ répond une infinité de logarithmes, qui sont tous compris dans cette formule générale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$, où à la place de n on peut mettre tel

nombre entier qu'on voudra. Puisque x est le sinus et y le cosinus de l'arc φ, posons $x = \sin\varphi$ et $y = \cos\varphi$, et nous aurons cette égalité

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

§ 27. De cette équation j'examinerai les cas principaux qui fourniront assez d'éclaircissement sur cette matière. Soit donc premièrement:

$$\varphi = 0, \quad \text{et il y aura} \quad \cos\varphi = 1 \quad \text{et} \quad \sin\varphi = 0,$$

et l'équation trouvée nous donnera:

$$l1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, posant pour n successivement tous les nombres entiers, les logarithmes de l'unité seront

$$l1 = 0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

d'où nous voyons que, quoique le logarithme de 1 soit $= 0$, comme tout le monde le sait, il y en a une infinité d'expressions imaginaires dont chacune est aussi bien le logarithme de l'unité, que 0.

§ 28. Cette seule considération nous met en état de donner tous les logarithmes de chaque nombre affirmatif qu'on puisse proposer. Car soit a le nombre proposé et α son logarithme hyperbolique qu'on trouve par les méthodes ordinaires; et puisque $la = l1 + la = \alpha + l1$, tous les logarithmes du nombre a seront:

$$la = \alpha, \quad \alpha \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

dont tous, excepté le premier α, sont imaginaires. Il faut remarquer, que je ne parle ici que des logarithmes hyperboliques, auxquels on est conduit par l'intégration; mais, puisqu'on sait que les logarithmes de diverses espèces observent toujours un rapport constant entr'eux, tout ce que je viens de dire et tout ce que je dirai des logarithmes hyperboliques s'appliquera aisément aux logarithmes tabulaires où l'on met $l10 = 1$, ou à toute autre espèce de logarithmes.

§ 29. Soit maintenant l'arc proposé φ de 180°, ou soit $\varphi = \pi$, et nous aurons $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$. Cette supposition faite, l'équation générale trouvée se changera en cette forme

$$l(-1) = (\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1} \;(= 1 \pm 2n)\,\pi\sqrt{-1},$$

d'où nous tirons toute l'infinité des logarithmes du nombre négatif -1, car nous aurons

$$l(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

et de là nous voyons clairement, que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires et tous différents des logarithmes de $+1$. Cela non obstant, les logarithmes de $(-1)^2$ qui seront

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 10\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

sont visiblement contenus dans les logarithmes de $+1$; ce qui suffit pour sauver les contradictions apparentes dont j'ai fait mention là-haut, quoiqu'il n'en suive pas réciproquement que les moitiés de tous les logarithmes de $+1$ soient logarithmes de -1: ce que la nature même des quantités ne permet pas, puisque -1 n'est pas la seule racine carrée de $+1$.

§ 30. On s'assurera à présent aisément, que tous les logarithmes de tous les nombres négatifs sont imaginaires. Car soit $-a$ un nombre négatif quelconque, et soit α le logarithme, trouvé par les

méthodes ordinaires, du nombre affirmatif $+a$, de sorte que $l(+a)=\alpha$, et parce que $l(-a)=la+l(-1)$, nous aurons tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ exprimés ainsi:

$$l(-a)=\alpha\pm\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm 5\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm 7\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

qui sont tous imaginaires. Par là donc la question, agitée entre MM. Leibnitz et Bernoulli, de savoir, si les logarithmes des nombres négatifs sont réels, ou imaginaires, est décidée en faveur du premier, qui les soutient imaginaires, et toutes les objections que M. Bernoulli a élevées contre ce sentiment, n'ont plus aucune prise sur cette décision.

§ 31. Je vais plus loin, et après avoir déterminé les logarithmes des nombres tant affirmatifs que négatifs, je passerai aux nombres imaginaires. Soit, pour cet effet, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, et nous aurons $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=1$, d'où nous tirons

$$l\sqrt{-1}=(\tfrac{1}{2}\pi\pm 2n\pi)\sqrt{-1}=(\pm 2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1},$$

et partant tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

$$l(+\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Mais si l'on met $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$, à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=-1$, nous aurons:

$$l(-\sqrt{-1})=(-\tfrac{1}{2}\pi\pm 2n\pi)\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$l(-\sqrt{-1})=-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

D'où il est évident, qu'ajoutant les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ ensemble, pour avoir les logarithmes du produit $=+1$, on obtient les mêmes logarithmes que nous avons trouvés pour $+1$. Et si l'on soustrait les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ des logarithmes de $+\sqrt{-1}$, pour avoir les logarithmes du quotient $\frac{+\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}=-1$, on aura les logarithmes trouvés pour -1.

§ 32. Soit, outre cela,

$$\varphi=\tfrac{1}{3}\pi,\quad \text{et il y aura}\quad \cos\varphi=\tfrac{1}{2}\quad \text{et}\quad \sin\varphi=\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où nous tirerons

$$l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=(\tfrac{1}{3}\pi\pm 2n\pi)\sqrt{-1},$$

de sorte que les logarithmes de $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1}$$

$$+\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Soit $\varphi=-\frac{1}{3}\pi$, et l'on aura $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où nous obtiendrons

$$l\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=(-\tfrac{1}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},$$

et partant $l\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1},$

$$-\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Soit $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, de sorte que $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, et nous aurons

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(\tfrac{2}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},\quad \text{et}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$

$$+\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Enfin mettant $\varphi=-\frac{2}{3}\pi$, on aura $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(-\tfrac{2}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},\quad \text{et}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$

$$-\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Puisqu'on sait que $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

sont les racines cubiques de $+1$, qu'on fasse toutes les épreuves à cet égard, et l'on trouvera constamment un merveilleux accord avec la vérité.

§ 33. Pour avoir les logarithmes des puissances, on n'a, suivant la règle commune, qu'à multiplier le logarithme de la racine par l'exposant de la puissance. Mais, puisque la racine a une infinité de logarithmes, on en peut ajouter ensemble autant de valeurs différentes que l'exposant de la puissance renferme d'unités. Ainsi, les logarithmes de (-1) étant trouvés

$$\pm\pi\sqrt{-1},\ \pm 3\pi\sqrt{-1},\ \pm 5\pi\sqrt{-1},\ \pm 7\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

non seulement les doubles de ces logarithmes donneront le log. du carré $(-1)^2$, mais aussi les sommes de deux quelconques, et par ce moyen on obtiendra toutes ces formules

$$0,\ \pm 2\pi\sqrt{-1},\ \pm 4\pi\sqrt{-1},\ \pm 6\pi\sqrt{-1},\ \pm 8\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

qui sont tous les logarithmes de $+1$. De même, joignant trois à trois les logarithmes de

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \text{ou de}\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on obtiendra également tous les logarithmes de $+1$, puisque

$$\text{tant}\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3\ \text{que}\ \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

est égal à l'unité.

§ 34. Cette facilité de trouver les logarithmes des puissances est aussi confirmée par la formule générale trouvée au § 26; car il est démontré que

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\mu} = \cos \mu\varphi + \sin \mu\varphi \sqrt{-1}$$

donc il y aura

$$l(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\mu} = l(\cos \mu\varphi + \sin \mu\varphi \sqrt{-1}),$$

Cette formule étant semblable à la première on n'a dans le logarithme, qu'à mettre $\mu\varphi$ au lieu de φ, et puisqu'il est permis de mettre $\varphi \pm 2m\pi$ pour φ nous aurons:

$$l(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\mu} = (\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2n\pi) \sqrt{-1}$$

et lorsque l'exposant est une fraction $\frac{\mu}{\nu}$, nous aurons

$$l(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2\nu n\pi) \sqrt{-1}$$

les lettres m et n marquant des nombres entiers quelconques. Par conséquent, dans les cas $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, nous aurons

$$l\,1^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\pm 2\mu m \pm 2\nu n)\, \pi \sqrt{-1}$$

$$\text{et} \quad l(-1)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n)\, \pi \sqrt{-1}.$$

Et ayant égard à ces circonstances, toutes les difficultés qui se pourraient encore rencontrer dans cette matière, disparaîtront entièrement, et la doctrine des logarithmes sera mise à l'abri de toutes les attaques.

XII.

Problema algebraicum de inveniendis quatuor numeris, ex datis totidem productis uniuscujusque horum numerorum in summas trium reliquorum.

Si quatuor numeri inveniendi ponantur v, x, y, z, habebuntur sequentes quatuor aequationes:

$$v(x+y+z)=a$$
$$x(v+y+z)=b$$
$$y(v+x+z)=c$$
$$z(v+x+y)=d$$

Ex his aequationibus per regulas vulgares successive tres incognitae eliminari, et quarta ad resolutionem aequationis perduci poterit. Verum cum nulla sit ratio, cur unam potius quam aliam quamvis eligamus, quae ultimo determinetur, nullam earum per aequationem finalem determinari convenit, sed ejusmodi introducenda est nova incognita, quae ad singulas aequaliter pertineat, et ex qua incognitae definiri queant. Sumamus ergo summam numerorum inveniendorum in hunc finem

$$v+x+y+z=2t,$$

atque hinc aequationes superiores abibunt in has:

$$v(2t-v)=a=2tv-v^2, \quad \text{inde} \quad v=t-\sqrt{(tt-a)}$$
$$x(2t-x)=b=2tx-x^2 \qquad x=t-\sqrt{(tt-b)}$$
$$y(2t-y)=c=2ty-y^2 \qquad y=t-\sqrt{(tt-c)}$$
$$z(2t-z)=d=2tz-z^2 \qquad z=t-\sqrt{(tt-d)}.$$

Eousque igitur solutionem jam produximus, ut ex unica quantitate t omnes quatuor numeros quaesitos expedite determinare valeamus, quare tantum superest, ut hanc quantitatem t investigemus, quod fiet ex aequatione

$$v+x+y+z=2t$$

substituendo loco v, x, y, z valores per t modo inventos:

$$4t-\sqrt{(tt-a)}-\sqrt{(tt-b)}-\sqrt{(tt-c)}-\sqrt{(tt-d)}=2t$$

unde oritur ista aequatio

$$2t=\sqrt{(tt-a)}+\sqrt{(tt-b)}+\sqrt{(tt-c)}+\sqrt{(tt-d)},$$

quae quidem methodo Newtoniana ad rationalitatem perduci posset, at labor foret maxime molestus. Alio igitur modo resolutionem hujus aequationis tentemus.

Ponamus $\sqrt{(tt-a)} = p$, erit $v = t - p$; simili modo

$$\begin{aligned} \sqrt{(tt-b)} &= q, & x &= t - q \\ \sqrt{(tt-c)} &= r, & y &= t - r \\ \sqrt{(tt-d)} &= s, & z &= t - s \end{aligned}$$

eritque $p + q + r + s = 2t$, quae aequatio ob irrationales p, q, r et s in aliam debet transformari, in qua litterarum p, q, r et s potestates exponentium parium tantum occurrant, quo, per substitutionem loco litterarum p, q, r et s faciendam, nascatur aequatio rationalis, ex qua valor incognitae t definiatur.

In hunc finem formemus hanc aequationem

$$X^4 - AX^3 + BX^2 - CX + D = 0,$$

cujus quatuor radices sint quantitates datae a, b, c, d. Erit ergo per naturam aequationum:

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d \\ B &= ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ C &= abc + abd + acd + bcd \\ D &= abcd. \end{aligned}$$

Ponatur jam $Y = tt - X$, seu $X = -Y + tt$, habebimus facta hac substitutione istam aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} Y^4 - 4ttY^3 + 6t^4Y^2 - 4t^6Y + t^8 \\ \quad + AY^3 - 3AttY^2 + 3At^4Y - At^6 \\ \quad\quad + BY^2 - 2BttY + Bt^4 \\ \quad\quad\quad + CY - Ctt \\ \quad\quad\quad\quad + D \end{array}\right\} = 0.$$

Cujus aequationis quatuor radices ipsius Y erunt

$$tt - a,\quad tt - b,\quad tt - c,\quad tt - d.$$

Loco hujus aequationis ponamus brevitatis gratia hanc

$$Y^4 - PY^3 + QY^2 - RY + S = 0$$

ita, ut sit

$$\begin{aligned} P &= 4tt - A \\ Q &= 6t^4 - 3Att + B \\ R &= 4t^6 - 3At^4 + 2Btt - C \\ S &= t^8 - At^6 + Bt^4 - Ctt + D. \end{aligned}$$

Sit porro $Y = Z^2$, seu $Z = \pm\sqrt{Y}$, habebimus

$$Z^8 - PZ^6 + QZ^4 - RZ^2 + S = 0,$$

eruntque hujus aequationis octo radices sequentes

$$\begin{aligned} +\sqrt{(tt-a)} &= +p & -\sqrt{(tt-a)} &= -p \\ +\sqrt{(tt-b)} &= +q & -\sqrt{(tt-b)} &= -q \\ +\sqrt{(tt-c)} &= +r & -\sqrt{(tt-c)} &= -r \\ +\sqrt{(tt-d)} &= +s & -\sqrt{(tt-d)} &= -s. \end{aligned}$$

Aequatio haec octo dimensionum resolvatur in binas biquadraticas, quarum alterius radices sint $+p$, $+q$, $+r$, $+s$, alterius autem $-p$, $-q$, $-r$, $-s$, quae sint

$$Z^4 - \alpha Z^3 + \beta Z^2 - \gamma Z + \delta = 0$$
$$Z^4 + \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta = 0,$$

in quibus erit per naturam aequationum

$$\alpha = p + q + r + s$$
$$\beta = pq + pr + ps + qr + qs + rs$$
$$\gamma = pqr + pqs + prs + qrs$$
$$\delta = pqrs.$$

Quoniam igitur productum ex his duabus aequationibus biquadraticis illi aequationi octo dimensionum aequale esse debet, erit

$$P = \alpha^2 - 2\beta$$
$$Q = \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta$$
$$R = \gamma^2 - 2\beta\delta$$
$$S = \delta^2$$

Et cum sit $\alpha = p + q + r + s$, erit $\alpha = 2t$, ideoque $\alpha^2 = 4tt$, unde fit

$$\alpha^2 - 2\beta = 4tt - 2\beta = P = 4tt - A,$$

ergo $\beta = \frac{A}{2}$. Secunda aequatio $Q = \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta$ dabit

$$6t^4 - 3Att + B = \frac{A^2}{4} - 4\gamma t + 2\delta,$$

$$\text{sive} \quad \delta = 3t^4 - \frac{3}{2}Att + 2\gamma t - \frac{A^2}{8} + \frac{B}{2}.$$

Tertia vero aequatio $R = \gamma^2 - 2\beta\delta$ praebebit

$$4t^6 - 3At^4 + 2Btt - C = \gamma^2 - A\delta,$$

$$\text{sive} \quad A\delta = -4t^6 + 3At^4 - 2Btt + C + \gamma^2$$

hinc cum superiori fit

$$\left.\begin{array}{ll} 4t^6 - \frac{3}{2}A^2tt + 2A\gamma t & - \frac{A^3}{8} \\ + 2Btt & + \frac{AB}{2} \\ & - C \end{array}\right\} = \gamma^2.$$

Extracta radice quadrata obtinebitur

$$\gamma = At \pm \sqrt{\left(4t^6 + (2B - \frac{1}{2}A^2)\,tt - \frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C\right)}$$

hincque

$$\delta = 3t^4 + \frac{1}{2}Att - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{2}B \pm 2t\sqrt{\left(4t^6 + (2B - \frac{1}{2}A^2)\,tt - \frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C\right)},$$

cujus quadratum erit

$$\left.\begin{array}{r} 25t^8 + 3At^6 - \frac{5}{2}A^2t^4 - \frac{5}{8}A^3tt + \frac{1}{64}A^4 \\ + 11Bt^4 + \frac{5}{2}ABtt - \frac{1}{8}A^2B \\ - 4Ctt + \frac{1}{4}B^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \pm 12t^5 \\ \pm 2At^3 \\ \mp \frac{1}{2}A^2t \\ \pm 2Bt \end{array}\right\} \sqrt{\left(4t^6 + (2B - \frac{1}{2}A^2)tt - \frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C\right)}$$

quod aequale esse debet ipsi S, seu huic expressioni: $t^8 - At^6 + Bt^4 - Ctt + D$; unde resultat haec aequatio

$$\begin{array}{r} 24t^8 + 4At^6 - \frac{5}{2}A^2t^4 - \frac{5}{8}A^3tt + \frac{1}{64}A^4 \\ + 10Bt^4 + \frac{5}{2}ABtt - \frac{1}{8}A^2B \\ - 3Ctt + \frac{1}{4}B^2 \\ - D \end{array} = \left\{\begin{array}{l} + 12t^5 \\ + 2At^3 \\ - \frac{1}{2}A^2t \\ + 2Bt \end{array}\right\} \sqrt{\left(4t^6 + (2B - \frac{1}{2}A^2)tt - \frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C\right)},$$

quae ad rationalitatem reducta dabit

$$\left.\begin{array}{l} + 3A^4 \\ - 12A^2B \\ + 24AC \\ - 48D \end{array}\right\} t^8 \left.\begin{array}{l} + \frac{5}{4}A^5 \\ - 8A^3B \\ + 7A^2C \\ + 12AB^2 \\ - 8AD \\ - 12BC \end{array}\right\} t^6 \left.\begin{array}{l} + \frac{3}{16}A^6 \\ - \frac{27}{16}A^4B \\ + \frac{7}{4}A^3C \\ + \frac{9}{2}A^2B^2 \\ + 5A^2D \\ - 7ABC \\ - 3B^3 \\ + 9C^2 \\ - 20BD \end{array}\right\} t^4 \left.\begin{array}{l} + \frac{3}{256}A^7 \\ - \frac{9}{64}A^5B \\ + \frac{5}{32}A^4C \\ + \frac{9}{16}A^3B^2 \\ + \frac{5}{4}A^3D \\ - \frac{5}{4}A^2BC \\ - \frac{3}{4}AB^3 \\ - 5ABD \\ + \frac{5}{2}B^2C \\ + 6CD \end{array}\right\} tt \left.\begin{array}{l} + \frac{1}{4096}A^8 \\ - \frac{1}{256}A^6B \\ + \frac{3}{128}A^4B^2 \\ - \frac{1}{32}A^4D \\ - \frac{1}{16}A^2B^3 \\ + \frac{1}{4}A^2BD \\ + \frac{1}{16}B^4 \\ - \frac{1}{2}B^2D \\ + D^2 \end{array}\right\} = 0$$

Ponatur brevitatis gratia $E = \frac{1}{4}A^2 - B$ et $u = 2t$, erit

$$\left.\begin{array}{l} + 3A^2E \\ + 6AC \\ - 12D \end{array}\right\} u^8 \left.\begin{array}{l} + 2A^3E \\ + 4A^2C \\ + 12AE^2 \\ - 8AD \\ + 12CE \end{array}\right\} u^6 \left.\begin{array}{l} + 9A^2E^2 \\ + 28ACE \\ + 80DE \\ + 36C^2 \\ + 12E^3 \end{array}\right\} u^4 \left.\begin{array}{l} + 12AE^3 \\ + 80ADE \\ + 96CD \\ + 40CE^2 \end{array}\right\} uu \left.\begin{array}{l} + 4E^4 \\ - 32DE^2 \\ + 64D^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Haec ergo aequatio quatuor habet radices affirmativas, totidemque negativas, ipsis aequales; ita ut resolutio aequationis per aequationem biquadraticam perfici queat. Sunt autem A, B, C, D et E quantitates cognitae ex datis a, b, c, d determinatae; est nempe

$$A = a + b + c + d$$
$$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$
$$C = abc + abd + acd + bcd$$
$$D = abcd$$

itemque $E = \frac{1}{4}A^2 - B.$

Invento autem quocunque valore pro u erunt quantitates quaesitae

$$v = \frac{u - \sqrt{(uu - 4a)}}{2}, \qquad x = \frac{u - \sqrt{(uu - 4b)}}{2}$$
$$y = \frac{u - \sqrt{(uu - 4c)}}{2}, \qquad z = \frac{u - \sqrt{(uu - 4d)}}{2}.$$

Alia Solutio.

Problema etiam hoc modo solvi potest: Ex primis aequationibus est

$$a - b = (v - x)(y + z) \qquad b - c = (x - y)(v + z)$$
$$a - c = (v - y)(x + z) \qquad b - d = (x - z)(v + y)$$
$$a - d = (v - z)(x + y) \qquad c - d = (y - z)(v + x)$$

ex aequationibus prima et ultima nanciscimur

$$v - x = \frac{a-b}{y+z}, \qquad v + x = \frac{c-d}{y-z}.$$

Sit $\frac{a+b-c-d}{2} = h$, erit $h = vx - yz$ et facto $\frac{a+b+c+d}{2} = k$ erit

$$k = vx + vy + vz + xy + xz + yz, \quad \text{ergo} \quad k - h = 2yz + (v + x)(y + z),$$

seu $k - h = 2yz + \frac{(c-d)(y+z)}{y-z} = c + d$, ergo $2yz = \frac{2dy - 2cz}{y-z}$, seu $yyz - yzz = dy - cz$,

quae aequatio posito $yz = t$ abit in hanc

$$(d - t)y - (c - t)z = 0.$$

Ponatur nunc $dy - cz = u$, eritque

$$y = \frac{(c-t)u}{(c-d)t} \quad \text{et} \quad z = \frac{(d-t)u}{(c-d)t},$$

qui valores in $t = yz$ substituti praebent

$$t = \frac{(c-t)(d-t)uu}{(c-d)^2 tt},$$

unde prodit

$$u = \frac{(c-d)t\sqrt{t}}{\sqrt{(cd - (c+d)t + tt)}},$$

quo substituto in valoribus pro y et z supra inventis, habebimus

$$\text{I.}\quad y=\frac{(c-t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}\quad\text{et}\quad\text{II.}\quad z=\frac{(d-t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}};$$

ac addendo et subtrahendo

$$y+z=\frac{(c+d-2t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}\quad\text{et}\quad y-z=\frac{(c-d)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}.$$

Hinc porro deducitur

$$v+x=\frac{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{\sqrt{t}}\quad\text{et}\quad v-x=\frac{(a-b)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{(c+d-2t)\sqrt{t}}$$

unde, denuo addendo et subtrahendo, positisque brevitatis gratia,

$$b+c+d-a=m\quad\text{et}\quad a+c+d-b=n$$

prodeunt sequentes valores pro v et x

$$\text{III.}\quad v=\frac{(n-2t)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{2(c+d-2t)\sqrt{t}}\quad\text{et}\quad\text{IV.}\quad x=\frac{(m-2t)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{2(c+d-2t)\sqrt{t}}.$$

Cum autem supra invenerimus $h=vx-yz$, hinc substitutis pro v, x, y, z eorum valoribus et facta evolutione prodit, pro determinando valore ipsius t, haec aequatio quatuor dimensionum

$$4t(h+t)(c+d-2t)^2=(m-2t)(n-2t)(c-t)(d-t).$$

XIII.

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime invenienda.

1. Antequam Analyseos infinitorum principia essent perspecta, nulla alia via rationem peripheriae ad diametrum explorandi patebat, praeter considerationem polygonorum circulo cum inscriptorum tum circumscriptorum. Ex quo fonte primum Archimedes notissimam proportionem 22 ad 7, tum vero Metius veritati propiorem 355 ad 113 elicuit; donec tandem Ludolfus a Ceulen hanc proportionem ad 35 figuras in partibus decimalibus produxit, quem stupendum et molestissimum laborem certe vix ulterius prosequi licuisset. Deinde vero, cum, Analysis infinitorum ope, series idoneae rationem diametri ad peripheriam exprimentes essent exhibitae, multo minore labore ratio Ludolfiana multo longius, primo scilicet a Scharpio ad 72, tum vero a Machino ad 100, ac denique a Lagnio ad 128 figuras decimales est continuata; ex qua ratione si circumferentia circuli, cujus diameter distantiam stellarum fixarum maxime remotarum superaret, computaretur, ne millesima quidem pollicis parte a veritate aberraretur.

2. Assidui autem hi calculatores, quorum industria summam meretur laudem et admirationem, omnes usi sunt serie, qua arcus circuli ex tangente definitur, ita ut posita tangente $=t$, radio existente $=1$, arcus respondens sit

$$=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9-\text{etc.},$$

quae series utique maxime convergens reddi posset, si tangentem t pro lubitu diminuere liceret. Verum cum hinc ratio diametri ad peripheriam concludi nequeat, nisi arcus ille ad totam peripheriam assignabilem et cognitam teneat rationem, vix minorem arcum in hunc finem accipere licet, quam 30^0, cujus tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; unde denotante π peripheriam circuli, cujus diameter est $=1$, fit

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\frac{1}{11.3^5}+\text{etc.}\right),$$

seu $$\pi=\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\frac{1}{11.3^5}+\text{etc.}\right)\sqrt{12}.$$

Etsi enim angulus 18^0, cujus tangens est $\sqrt{(1-2\sqrt{\frac{1}{5}})}$, seriem multo magis reddat convergentem, duplex tamen irrationalitas calculum tantopere molestum reddit, ut nullum inde compendium sperari possit, quae molestia pro minoribus angulis multo magis increscit.

3. Exercitatissimus etiam calculator Lagnius, qui hunc calculum longissime est prosecutus, angulum 30° aliis minoribus in hoc negotio praeferendum censuit; verum antequam ipsius seriei terminos evolvere posset, ex numero 12 radicem quadratam ultra 128 figuras decimales exactam extrahere erat coactus; quem laborem certe 12 horarum spatio expedire haud potuit, quin potius crediderim auctorem ei aliquot adeo dies insudasse, quandoquidem summa, qua opus est, attentio, cum relaxationem tum revisionem pluriumque operationum repetitionem postulat. Hoc autem labore exanthlato ipsius seriei 265 terminos ad minimum evolvere debebat; primo igitur numerum $\sqrt{12}$ ad 128 figuras expressum continuo 265 vicibus per ternarium dividi oportebat, ad quod negotium, si cujusque figurae inventioni et scriptioni unum minutum secundum tribuamus, quinque horae vix sufficiebant. Deinde quotos hos singulos respective per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. dividi erat necesse, quae opera, ob divisores continuo majores, ad minimum tempus duplo majus, ideoque 10 horarum postulabat. Denique additio cum terminorum affirmativorum, tum negativorum utraque seorsim breviori quam quinque horarum spatio expediri haud poterat: sicque totus labor intra 37 horas omni adhibita diligentia neutiquam potuerat absolvi. Nullum autem est dubium, quin auctor tempus duplo imo triplo majus impenderit.

4. Quemadmodum autem hic labor mirifice sublevari potuisset, jam pridem ostendi, ubi angulum semirectum in duas pluresve partes dividere docui, quarum tangentes sint rationales. Ita cum sit $\frac{\pi}{4} = \text{Ang. tang } 1 = \text{Ang. tang } \frac{1}{2} + \text{Ang. tang } \frac{1}{3}$, erit per duas series

$$\pi = +2\left(1 - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.4^2} - \frac{1}{7.4^3} + \frac{1}{9.4^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} - \frac{1}{7.9^3} + \frac{1}{9.9^4} - \text{etc.}\right),$$

quarum adeo prior magis convergit, quam praecedens, ex tangente anguli 30° petita; neque hic ulla extractione radicis opus est, quae sola in calculo praecedenti laborem 12 horarum postulaverat. Deinde priores utriusque seriei termini saltem multo minore labore evolvuntur, cum vel paucis constent figuris, vel periodum in iis agnoscant, unde calculus admodum fit expeditus. Etsi autem hic duas series in unam summam colligi oportet, tamen quia magis convergunt, multo paucioribus opus est terminis: ita si fractionem decimalem pro π ad 128 figuras justam desideremus, prioris seriei terminos 210, posterioris vero 132 capi conveniet, qui totus labor, praecedente ratione aestimatus, vix 24 horas requirere videtur.

5. Deinde ex eodem principio, cum sit in genere

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{a} = \text{Ang. tang } \frac{1}{b} + \text{Ang. tang } \frac{b-a}{ab+1},$$

erit $\text{Ang. tang } \frac{1}{2} = \text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7}$, ideoque

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7},$$

unde per duas series magis convergentes fit

$$\pi = +\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} - \frac{1}{7.9^3} + \frac{1}{9.9^4} - \frac{1}{11.9^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{4}{7}\left(1 - \frac{1}{3.49} + \frac{1}{5.49^2} - \frac{1}{7.49^3} + \frac{1}{9.49^4} - \frac{1}{11.49^5} + \text{etc.}\right).$$

Hinc ergo si valor ipsius π ad 128 figuras justus colligi debeat, prioris seriei 132 terminos, posterioris vero tantum 75 terminos evolvisse sufficiet, horum autem 207 terminorum evolutio certe multo minorem operam requirit, quam calculus a Lagnio subductus, extractione radicis, quae sola tertiam partem insumebat, exclusa. Ex quo totus hic labor vix 18 horarum esset aestimandus, nisi divisio per numerum 49 aliquam molestiam crearet.

6. Simili modo loco Ang. tang $\frac{1}{3}$, si non satis parvus videatur, minores introducere poterimus, servatoque altero habebimus Ang. tang $\frac{1}{3}$ = Ang. tang $\frac{1}{7}$ + Ang. tang $\frac{2}{11}$, ideoque

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Ang. tang } \frac{2}{11} + 3 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7}, \quad \text{et}$$

$$\pi = +\frac{16}{11}\left(1 - \frac{4}{3.121} + \frac{4^2}{5.121^2} - \frac{4^3}{7.121^3} + \frac{4^4}{9.121^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{12}{7}\left(1 - \frac{1}{3.49} + \frac{1}{5.49^2} - \frac{1}{7.49^3} + \frac{1}{9.49^4} - \text{etc.}\right).$$

Verum etsi hic multo pauciores terminos assumsisse sufficiat, divisio tamen per majores numeros 49 et 121 omne fere lucrum adimere videtur. Neque adeo haec transformatio:

$$\text{Ang. tang } \frac{2}{11} = \text{Ang. tang } \frac{1}{7} + \text{Ang. tang } \frac{3}{79}, \quad \text{quae praebet}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7} + 2 \text{ Ang. tang } \frac{3}{79}$$

calculo contrahendo inserviet; etiamsi enim series pro altero angulo vehementer convergat, tamen indoles fractionis $\frac{3}{79}$ laborem non mediocriter adauget, ita ut praestare videatur seriebus longe minus convergentibus uti.

7. Quando autem calculo numerico est consulendum, non solum ad convergentiam serierum, quarum termini in summam colligi debent, respici convenit, sed potissimum ad facilitatem, qua singuli termini per operationes arithmeticas evolvantur: ita si seriei progressio geometrica sit admixta, calculus facillime expeditur, si hujus termini in ratione vel decupla, vel centupla, vel millecupla decrescant. Quamobrem seriei, qua angulus, cujus tangens est $= \frac{1}{7}$, ac multo magis ejus, cujus tangens est $= \frac{3}{79}$, termini non sine ingenti labore evolvuntur, qui forte tantus est, ut quilibet maluerit multo plures terminos serierum pro angulis, quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ expedire, nequaquam enim major convergentia laborem, quem singulorum terminorum postulat evolutio, compensare videtur. Sin autem ejusmodi angulis uti liceret, quorum tangentes essent $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$, etc. nullum est dubium, quin praeter majorem convergentiam, etiam calculus singulorum terminorum mirum in modum sublevaretur.

8. Hunc autem usum egregie praestat alia seriei forma, qua arcum circularem ex data ejus tangente exprimere licet. Deduxi autem hanc seriem ex consideratione formulae differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \quad \text{ponendo ejus integrale} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = z\sqrt{(1-xx)}.$$

Hinc enim fiet differentiando

$$dx = dz\,(1-xx) - xzdx, \quad \text{seu} \quad \frac{dz}{dx}(1-xx) - xz - 1 = 0.$$

Statuatur nunc $z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{etc.}$

atque hinc colligemus $\frac{dz}{dx} = A + 3Bxx + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \text{etc.}$

$$-\frac{xxdz}{dx} = \quad - Axx - 3Bx^4 - 5Cx^6 - 7Dx^8 - \text{etc.}$$

$$-xz = \quad - Axx - Bx^4 - Cx^6 - Dx^8 - \text{etc.}$$

$$-1 = -1.$$

Singulis ergo terminis ad nihilum redigendis invenitur

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{3}A, \quad C = \frac{4}{5}B, \quad D = \frac{6}{7}C, \quad E = \frac{8}{9}D, \text{ etc.}$$

ita ut sit $\quad \text{Ang.}\sin x = x\sqrt{(1-xx)}.\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2.4}{3.5}x^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^6 + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^8 + \text{etc.}\right).$

9. Sit jam $\frac{m}{n}$ tangens hujus anguli, cujus sinus positus est $= x$, eritque

$$x = \frac{m}{\sqrt{(mm+nn)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-xx)} = \frac{n}{\sqrt{(mm+nn)}},$$

ita ut irrationalitas jam ex calculo excedat fiatque

$$\text{Ang. tang}\frac{m}{n} = \frac{mn}{mm+nn}\left(1 + \frac{2mm}{3(mm+nn)} + \frac{2.4.m^4}{3.5(mm+nn)^2} + \frac{2.4.6m^6}{3.5.7(mm+nn)^3} + \text{etc.}\right),$$

quae series non solum magis convergit quam vulgaris ante usitata

$$\text{Ang. tang}\frac{m}{n} = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{m^4}{5n^4} - \frac{m^6}{7n^6} + \frac{m^8}{9n^8} - \text{etc.}\right),$$

sed etiam singuli termini fere pari facilitate evolvuntur, quoniam continua multiplicatio per fractiones $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, etc. non difficilius instituitur, quam divisio per numeros 3, 5, 7, 9, etc. Tum vero, in quo maximum commodum cernitur, in eo constat, si numeri $mm + nn$ ad dividendum fuerint aptiores, quam simplices potestates ipsius n, quod commodum imprimis in angulis supra exhibitis locum habet. Haud minimi etiam in hac nova serie est momenti, quod omnes terminos invicem addi conveniat, cum in vulgari alternatim debeant addi et subtrahi.

10. Secundum hanc igitur novam seriem angulos supra exhibitos evolvamus, atque obtinebimus:

$$\text{I.} \quad \text{Ang. tang}\frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\text{II.} \quad \text{Ang. tang}\frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\text{III.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{7}=\frac{7}{50}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{50^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{50^3}+\text{etc.}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{3}{79}=\frac{237}{6250}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{6250}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{9^2}{6250^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{9^3}{6250^3}+\text{etc.}\right),$$

quae series ad calculum arithmeticum manifesto multo magis sunt accommodatae quam praecedentes, cum prima exigat continuam divisionem per 5, secunda per 10, tertia per 50 et quarta per 6250, quae ideo est perquam commoda quod $\frac{9}{6250}=\frac{144}{100000}$: quam ob causam has series praecedentibus longissime anteferendas esse censeo.

11. Denotet more Newtoniano in quavis serie littera P terminum quemque praecedentem totum, quo facilius pateat, quibusnam operationibus inde elici oporteat terminum sequentem; atque prima forma $\pi = 4$ Ang. tang $\frac{1}{2}+4$ Ang. tang $\frac{1}{3}$ suppeditat has series

$$\pi=+\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{5}P+\text{etc.}$$
$$+\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}P+\text{etc.}$$

Secunda autem forma $\pi = 8$ Ang. tang $\frac{1}{3}+4$ Ang. tang $\frac{1}{7}$ dat

$$\pi=+\frac{24}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{10}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}P+\text{etc.}$$
$$+\frac{56}{100}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{50}P+\text{etc.}$$

at ex tertia $\pi = 20$ Ang. tang $\frac{1}{7}+8$ Ang. tang $\frac{3}{79}$ prodit

$$\pi=\frac{28}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{50}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{50}P+\text{etc.}$$
$$+\frac{948}{3125}+\frac{2}{3}\cdot\frac{144}{100000}P+\frac{4}{5}\cdot\frac{144}{100000}P+\frac{6}{7}\cdot\frac{144}{100000}P+\frac{8}{9}\cdot\frac{144}{100000}P+\text{etc.}$$

In his postremis seriebus prior ita convergit, ut quilibet terminus sit fere quinquagies minor praecedente; posterior vero ita, ut quilibet terminus sit fere septingenties praecedente minor; ex quo hoc commodi assequimur, ut non sit opus in terminis primum sequentibus cyphras antecedentes scribere, quoniam nullum est periculum, ut in locis decimalibus, ubi quivis terminus incipere debet, fallamur, hincque calculus non mediocriter sublevatur.

12. His perpensis non dubito pronunciare rationem peripheriae ad diametrum, seu valorem ipsius π, commodissime et promtissime obtineri ex his duabus seriebus

$$\pi=\quad 2,8+P\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100}+P\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{100}+P\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{100}+\text{etc.}$$
$$+0,30336+P\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{144}{100000}+P\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{144}{100000}+P\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{144}{100000}+\text{etc.},$$

neque enim certe aliae exhiberi possunt series, quae tantopere convergant, simulque singuli termini tam facile per calculum arithmeticum evolvantur. Hinc ergo speciminis loco valorem π tantum ad

20 notas decimales deducam, et quo calculus certior reddatur, eum ad 22 notas extendam, in singulis autem terminis finem tantum notabo, ut nota 22ᵃ sit ultima, quoniam hinc initium sponte patet. Prioris ergo seriei terminorum evolutio ita se habebit

I. . . .	2,800000000000000000000	div. per 3
	933333333333333333333	
	1866666666666666666666	mult. per $\frac{2}{100}$
II.	37333333333333333333	div. per 5
	7466666666666666666	
	29866666666666666666	mult. per $\frac{2}{100}$
III.	597333333333333333	div. per 7
	85333333333333333	
	512000000000000000	mult. per $\frac{2}{100}$
IV.	10240000000000000	div. per 9
	1137777777777777	
	9102222222222222	mult. per $\frac{2}{100}$
V.	1820444444444444	div. per 11
	165494949494949	
	1654949494949494	mult. per $\frac{2}{100}$
VI.	33098989898989	div. per 13
	2546076146076	
	30552913752913	mult. per $\frac{2}{100}$
VII.	611058275058	div. per 15
	40737218337	
	570321056721	mult. per $\frac{2}{100}$
VIII.	11406421134	div. per 17
	670965949	
	10735455185	mult. per $\frac{2}{100}$
IX.	214709103	div. per 19
	11300479	
	203408624	mult. per $\frac{2}{100}$
X.	4068172	div. per 21
	193722	
	3874450	mult. per $\frac{2}{100}$
XI.	77489	div. per 23
	3369	
	74120	mult. per $\frac{2}{100}$
XII.	1482	div. per 25
	59	
	1423	mult. per $\frac{2}{100}$
XIII.	28	

Hujus ergo seriei 13 termini sufficiunt pro viginti duabus notis expediendis, unde concludere licet, si calculum ad $22n$ notas continuari oporteret, omnino $13n$ notas sufficere: ex quo calculus ad 128 notas continuandus postulabit 76 terminos. Postremi autem proxime constituunt progressionem geometricam in ratione $1:50$ decrescentem, unde plures eorum evolvi non est opus.

13. Altera autem series sequenti calculo computabitur:

I. . . .	0,303360000000000000000	div. per 3
	101120000000000000000	
	202240000000000000000	mult. per $\frac{144}{100000}$
II.	29122560000000000000	div. per 5
	5824512000000000000	
	23298048000000000000	mult. per $\frac{144}{100000}$
III.	3354918912000000	div. per 7
	479274130285714	
	2875644781714285	mult. per $\frac{144}{100000}$
IV.	4140928485668	div. per 9
	460103165074	
	3680825320594	mult. per $\frac{144}{100000}$
V.	5300388461	div. per 11
	481853496	
	4818534965	mult. per $\frac{144}{100000}$
VI.	6938690	div. per 13
	533745	
	6404945	mult. per $\frac{144}{100000}$
VII.	9223	div. per 15
	615	
	8608	mult. per $\frac{144}{100000}$
VIII.	12	

Hujus ergo seriei pro viginti duabus notis tantum opus est octo terminis, unde $22n$ notae circiter postulabunt evolutionem $8n$ terminorum, hincque pro 128 notis sufficiet evolvisse 47 terminos.

14. Utriusque ergo seriei terminos inventos seorsim in summam colligamus, ac prior quidem summatio ita se habebit:

I.	2,8000000000000000000000
II.	373333333333333333333
III.	5973333333333333333
IV.	102400000000000000
V.	1820444444444444
VI.	33098989898989
	2,8379410920210101010101
VII.	611058275058
VIII.	11406421134
IX.	214709103
X.	4068172
XI.	77489
XII.	1482
XIII.	28
	2,8379410920832784562570

Simili modo addantur termini alterius seriei

I.	0,3033600000000000000000
II.	29122560000000000000
III.	335491891200000000
IV.	4140928485668
V.	5300388461
VI.	6938690
VII.	9223
VIII.	12
	0,3036515615065147822055
prior	2,8379410920832784562570
$\pi =$	3,1415926535897932384625

qui numerus sola ultima nota excepta justus deprehenditur, totusque hic calculus laborem unius circiter horae consumsit; ex quo intelligere licet, si quis tantum laborem, quantum **Lagnius** impendere velit, eum valorem peripheriae π facile ad 200 figuras decimales esse extensurum.

15. Ceterum ad calculi ulterius continuandi compendium notasse juvabit, in utriusque seriei terminis prioribus revolutiones notarum occurrere, quibus semel observatis hos terminos quousque libuerit, facillime continuare licebit, ita prioris seriei termini priores omissis in quoque cyphris initialibus, sequenti modo procedent, ubi notas periodicas deinceps continuo repetendas uncinulis inclusi:

I.	2,800 etc.
II.	37333 etc.
III.	597333 etc.
IV.	102400 etc.
V.	1820444 etc.
VI.	330 (98) (98) etc.
VII.	611 (058275) (058275) etc.
VIII.	11406 (421134) (421134) etc.
IX.	21470 (910370675076557429498605969194204488322135380958) (9103 etc.

Seriei autem posterioris termini priores in infinitum continuati sunt:

I.	0,3033600 etc.
II.	291225600 etc.
III.	335491891200 etc.
IV.	414092848566 (857142) (857142) etc.
V.	53003884616557 (714285) (714285) etc.
VI.	693869034980391 (896103) (896103) etc.
VII.	92231207111239784 (343656) (343656) etc.
VIII.	123958742357506270157 (874125) etc.

16. Colligamus nunc octo priores terminos in infinitum continuatos in unam summam, ut ea statim qui calculum ulterius continuare voluerit uti queat, et pariter revolutiones periodicas in utraque summa indicemus:

Summa 8 priorum terminorum seriei prioris

I.	2,80
II.	373333333333333 33333333333
III.	5973333333333 33333333333
IV.	10240000000 00000000000
V.	18204444444 44444444444
VI.	33098989 89898989898
	2,83794109202101010 1010101010
VII.	611058 27505827505
VIII.	11406 42113444113
	2,83794109208325 65,70629370629
seu	2,8379410920832565,706293,706293, etc.

Pro posteriori serie

I.	0,30336
II.	2912256
III.	3354918912
IV.	414092848566857142 etc.
	0,303651561505984048566857142857142857142 etc.
V.	530038846165577142857142857
	0,303651561506514087413022720000000000000
VI.	6938690349803918961038961 038961 038961 03
VII.	9223120711123978434365 634365 634365 63
VIII.	12395874235706270157 874125 874125 87
	6947925866389278645743484 547452 547452 54
	0,303651561506514087413022720000000000000 000000 000000 00
	0,3036515615065147822056093589278645743484,547452,547452,54

hinc summa octo priorum terminorum est

0,3036515615065147822056093589278645743484,547452, etc.

at terminus sequens nonus sub nota demum vigesima quarta quae est 9 incipit, unde facile accuratiores approximationes indagare licet.

17. In evolutione quidem terminorum ulteriorum divisio per majores numeros impares moram facessere potest, ita ut ad has operationes multo majus tempus sit impendendum, quam supra ad minores spectans divisores aestimavi. Verumtamen haec difficultas in serie vulgari ex angulo 30° petita multo est major, propterea quod ob plures terminos evolvendos, etiam majoribus divisoribus opus est conficiendum, praeterquam quod antequam haec operatio suscipi queat, tam taediosam radicis extractionem absolvi oportet. Quamobcausam dubium plane nullum superesse potest, quin calculator his binis novis seriebus utens longe facilius et promtius rationem peripheriae ad diametrum pro quovis praecisionis gradu definire queat, quam si calculum more consueto institueret; et quantumvis temporis spatium in hunc laborem insumere cogatur, certum est more solito tempus plus quam duplo majus requiri.

18. Ceterum observasse adhuc juvablt seriem hic pro arcu ex tangente traditam etiam directe ex serie consueta

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}$$

ut s sit arcus cujus tangens $= t$, elici posse; cum enim sit

$$tts = \qquad t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{5}t^7 - \frac{1}{7}t^9 + \text{etc.}$$

erit addendo $\quad (1+tt)s = \qquad t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3.5}t^5 + \frac{2}{5.7}t^7 - \frac{2}{7.9}t^9 + \text{etc.}$

Porro $\quad tt(1+tt)s = \qquad t^3 + \frac{2}{3}t^5 - \frac{2}{3.5}t^7 + \frac{2}{5.7}t^9 - \text{etc.}$

et addendo $\quad (1+tt)^2 s = t(1+tt) + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2.4}{3.5}t^5 - \frac{2.4}{3.5.7}t^7 + \frac{2.4}{5.7.9}t^9 - \text{etc.}$

simili modo reperitur ulterius:

$$(1+tt)^3 s = t(1+tt)^2 + \frac{2}{3}t^3(1+tt) + \frac{2.4}{3.5}t^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}t^7 - \frac{2.4.6}{5.7.9}t^9 + \text{etc.}$$

$$(1+tt)^4 s = t(1+tt)^3 + \frac{2}{3}t^3(1+tt)^2 + \frac{2.4}{3.5}t^5(1+tt) + \frac{2.4.6}{3.5.7}t^7 + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}t^9 - \text{etc.}$$

sicque continuo progrediendo evidens est hinc obtineri:

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

seu $\quad s = \frac{t}{1+tt}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{tt}{1+tt} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{t^4}{(1+tt)^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{t^6}{(1+tt)^3} + \text{etc.}\right)$

quae series ponendo $t = \frac{m}{n}$ cum ante exhibita congruit.

19. Quoniam seriei prioris terminum nonum exhibui, cujus revolutiones periodicae 48 figuras complectuntur, seriei quoque posterioris terminum nonum hic subjungam

IX. 16800055435025555673161 (293294940353763883175647881530234471410941999177) (293 etc.

cui 23 cyphrae sunt praefigendae, antequam ad comma, partes decimales a loco integrorum separans, perveniatur, ita ut prima hujus termini periodus in loco nonagesimo quarto terminuetur. Si loco

notarum periodicarum velimus fraçtionem ordinariam adjicere, hic terminus nonus ita finite exprimetur:

$$\text{IX.}\quad 16800055435025555673161\,\frac{713}{2431}\left[=\frac{9}{11}-\frac{3}{13}-\frac{5}{17}\right].$$

Simili autem modo prioris seriei terminus nonus expressus est

$$21470\,\frac{21002}{21879}.$$

Deinde summas octo terminorum supra exhibitas ita repraesentare licet

Prioris seriei

$$\text{Summa I}\ldots\text{VIII}\quad 2{,}8379410920832565\,\frac{101}{143}\left[=\frac{1}{11}+\frac{8}{13}\right]$$

$$\text{terminus IX}\quad 21470\,\frac{21002}{21879}\left[=\frac{5}{9}+\frac{4}{11}-\frac{2}{13}+\frac{2}{17}\right]$$

$$\text{summa I}\ldots\text{IX}\quad 2{,}8379410920832780 41\,\frac{12893}{21879}$$

Posterioris seriei

$$\text{I}\ldots\text{VIII}\quad 0{,}303651561506514782205609358927864574348 4\,\frac{548}{1001}$$

$$\text{IX}\quad 16800055435025555673161\,\frac{713}{2431}$$

$$\text{I}\ldots\text{IX}\quad 0{,}303651561506514782205611038933408076904022061 3\,\frac{14307}{17017}$$

ubi notetur esse

$$\frac{14307}{17017}=\frac{3}{7}+\frac{1}{11}+\frac{8}{13}-\frac{5}{17},$$

unde hujus fractionis evolutio est in promtu. Parique modo est prior fractio

$$\frac{12893}{21879}=\frac{5}{9}+\frac{5}{11}-\frac{7}{13}+\frac{2}{17}.$$

XIV.

Enodatio insignis cujusdam paradoxi circa multiplicationem angulorum observati.

---

1. Singularis est proprietas formularum, quibus cosinus angulorum multiplorum per cosinum anguli simpli exprimuntur. Si enim anguli simpli φ cosinus ponatur $= x$ angulorum multiplorum cosinus ita se habent:

$$\cos 0\varphi = 1$$
$$\cos 1\varphi = x$$
$$\cos 2\varphi = 2xx - 1$$
$$\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x$$
$$\cos 4\varphi = 8x^4 - 8xx + 1$$
$$\cos 5\varphi = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\cos 6\varphi = 32x^6 - 48x^4 + 18xx - 1$$
$$\cos 7\varphi = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$\cos 8\varphi = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32xx + 1$$

etc.

unde concluditur fore in genere

$$\cos n\varphi = 2^{n-1} x^n - 2^{n-3} n x^{n-2} + 2^{n-5} \frac{n(n-3)}{1.2} x^{n-4} - 2^{n-7} \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} x^{n-6} + \text{etc.},$$

seu

$$\cos n\varphi = 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4.8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12} x^{-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16} x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

ubi ratio progressionis facile perspicitur.

2. Neque vero hinc concludere licet, hanc seriem eadem lege in infinitum continuatam cosinum anguli $n\varphi$ exprimere, ita ut istius seriei infinitae summa futura sit $= \cos n\varphi$; sed quoties n est numerus integer, seriem eousque tantum continuari oportet, donec ad exponentes negativos ipsius x perveniatur, quippe qui termini omnes sunt rejiciendi, iis solis ab initio seriei terminis retentis, qui constant potestatibus positivis ipsius x, et numero absoluto, qui si n sit numerus par, est vel $+1$, vel -1. Nisi haec cautela observetur, in errorem delabimur, quin etiam casu $n = 0$ expressio generalis veritati adversatur; prodit enim $2^{-1} x^0 = \frac{1}{2}$, cum tamen sit $\cos 0\varphi = 1$, quod certe insigne est paradoxon.

3. Quo clarius etiam in reliquis casibus falsitas formae generalis perspiciatur, ponamus $n=1$, et haec forma evadet

$$x\left(1-\frac{1}{4}x^{-2}-\frac{1.2}{4.8}x^{-4}-\frac{1.3.4}{4.8.12}x^{-6}-\frac{1.4.5.6}{4.8.12.16}x^{-8}-\frac{1.5.6.7.8}{4.8.12.16.20}x^{-10}-\text{etc.}\right),$$

quae cum sit $< x$, cum veritate certe consistere nequit. Ut autem hujus seriei valor verus exploretur, ea ad hanc formam reducta:

$$x\left(1-\frac{1}{4}x^{-2}-\frac{1.1}{4.4}x^{-4}-\frac{1.1.3}{4.4.6}x^{-6}-\frac{1.1.3.5}{4.4.6.8}x^{-8}-\frac{1.1.3.5.7}{4.4.6.8.10}x^{-10}-\text{etc.}\right)$$

ita exhiberi potest:

$$x-\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1.1}{2.4}x^{-4}+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-6}+\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^{-8}+\text{etc.}\right).$$

Cum jam sit

$$\left(1-x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^{-2}-\frac{1.1}{2.4}x^{-4}-\frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^{-8}-\text{etc.}$$

nostra series hac finita forma continetur:

$$x-\frac{1}{2}x\left(1-(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{(xx-1)};$$

ita ut casu $n=1$, seriei nostrae generalis summa futura sit $=\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{2}$, cum tamen sit $\cos 1\varphi=x$. Quin etiam, cum sit $x<1$, patet seriei in infinitum continuatae summam adeo fore imaginariam.

4. Idem etiam de quolibet alio valore ipsius n ostendi potest, unde eo magis mirandum est, expressionem nostram generalem, si justa limitatione adhibeatur, ut omnes termini exponentes negativos ipsius x habituri rejiciantur, veritati esse consentaneam, et valorem ipsius $\cos n\varphi$ praebere; cum tamen omni extensione sumta et in infinitum continuata longe aliam atque adeo imaginariam summam sortiatur: cujusmodi singulare phaenomenon nescio an in aliis analyseos partibus jam sit observatum. Praeterea vero etiam, quod haud minus est mirandum, notari convenit, limitatione quoque illa adhibita, ut potestates negativae ipsius x rejiciantur, veritatem non obtineri, nisi n sit numerus positivus integer; si enim n esset numerus negativus, ob omnes potestates ipsius x prodeuntes negativas, error foret manifestissimus, cum sit $\cos(-n\varphi)=\cos n\varphi$.

5. Sin autem pro n accipiatur numerus positivus quidem seu fractus, nullo modo inde veritatem elicere licet. Sit enim $n=\frac{1}{2}$, et expressio nostra generalis hanc induet formam:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{8}x^{-2}-\frac{1.5}{8.16}x^{-4}-\frac{1.7.9}{8.16.24}x^{-6}-\frac{1.9.11.13}{8.16.24.32}x^{-8}-\text{etc.}\right)$$

unde etiamsi termini negativas potestates ipsius x complexuri, omnes scilicet, praeter primum, expungantur, tamen neutiquam inde obtinetur $\cos\frac{1}{2}\varphi$, quippe cum sit $\cos\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$. Multominus autem reliquis terminis admissis veritati consulitur, dum series prodit formulae $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ minime aequalis.

6. Hinc igitur abunde liquet, quid de forma illa canonica

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^{-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right).$$

apud plurimos auctores mirifice laudata, sit judicandum. Ea scilicet veritati nunquam est consentanea, nisi hae restrictiones adhibeantur: primo, ut n sit numerus integer positivus, ubi quidem etiam cyphra est excludenda; deinde, ut termini, in quibus exponens potestatis x fit negativus, penitus extinguantur. Qui huic formulae plus tribuunt, eamque adeo ad casus, quibus n est numerus negativus vel fractus, extendere volunt, maxime decipiuntur et in gravissimos errores illabuntur. Quae cum sint adeo manifesta, mirandum videtur, quod istae tam necessariae cautelae, quantum equidem memini, a nemine sint animadversae.

7. Haec consideratio occasionem mihi praebet duplicem investigationem suscipiendi. Primo scilicet in veram summam nostrae expressionis generalis, siquidem in infinitum continuetur, sum inquisiturus, ut pateat, quantum ea quovis casu a valore $\cos n\varphi$ discrepet. Deinde similem expressionem generalem investigabo, quae revera valorem $\cos n\varphi$ exhibeat, et nulla restrictione adhibita veros cosinus angulorum multiplorum ipsius φ praebeat, ita ut singulis casibus, quibus n est numerus integer, formulae initio allatae prodeant, simulque veritas, quando n est numerus fractus vel negativus, obtineatur.

8. Quo utrique instituto facilius satisfaciam, considero hanc formulam

$$s = A\,(x + \sqrt{(xx - 1)})^n$$

valorem ipsius s per seriem evoluturus, quae secundum potestates ipsius x procedat. Cum igitur sit

$$\sqrt{(xx - 1)} = x - \frac{1}{2x} - \frac{1.1}{2.4x^3} - \text{etc.}, \quad \text{ob} \quad s = A\left(2x - \frac{1}{2x} - \frac{1.1}{2.4x^3} - \text{etc.}\right)^n,$$

observo terminum primum futurum esse $= 2^nAx^n$; in sequentibus autem exponentes potestatis x continuo binario decrescere, ita ut series hujusmodi habitura sit formam

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} + \delta x^{n-6} + \varepsilon x^{n-8} + \text{etc.}$$

ubi quidem est $\alpha = 2^n A$.

9. Ad hanc autem seriem commodissime eruendam, observo aequationem assumtam per differentiationem in aliam converti oportere, in qua tam potestas indefinita quam omnis irrationalitas absit, simulque quantitas s ubique plus una dimensione non sit habitura; hujusmodi enim aequatio facillime per seriem certa lege procedentem resolvitur. Hunc in finem primo logarithmis sumendis obtineo

$$ls = lA + nl\,(x + \sqrt{(xx - 1)});$$

tum vero differentiando:

$$\frac{ds}{s} = \left(ndx + \frac{nxdx}{\sqrt{(xx-1)}}\right) : \left(x + \sqrt{(xx - 1)}\right) = \frac{ndx}{\sqrt{(xx-1)}}.$$

Hic sumtis quadratis erit

$$\frac{ds^2}{ss} = \frac{nndx^2}{xx-1}, \quad \text{seu} \quad (xx - 1)\,ds^2 = nnssdx^2,$$

quae aequatio denuo differentiata, sumto elemento dx constante, et per $2ds$ divisa dat

$$(xx-1)\,dds + xdxds = nnsdx^2,$$

quae jam formam habet desideratam, ita ut quantitas s nusquam plus una dimensione habeat, et quantitas x ab omni irrationalitate sit immunis.

10. Quia hic quantitas x in aliis terminis duas, in uno vero nullam tenet dimensionem, facta hujusmodi distinctione, ut sit

$$xxdds + xdxds - nnsdx^2 - dds = 0$$

ponamus $$s = \alpha x^m + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-4} \ldots\ldots + \mu x^{m-i} + \nu x^{m-i-2} + \text{etc.}$$

et facta substitutione, potestas x^{m-i-2} talem accipiet coëfficientem

$$\nu\,((m-i-2)(m-i-3) + m-i-2-nn) - \mu\,(m-i)(m-i-1),$$

qui cum evanescere debeat, quantitas ν ex μ ita definitur, ut sit

$$\nu = \frac{(m-i)(m-i-1)}{(m-i-2)^2-nn}\,\mu.$$

Statuatur jam pro initio $i=-2$, ut fiat $\nu=\alpha$ et $\mu=0$, proditque $\alpha = \frac{(m+2)(m+1)}{mm-nn}\,0$, quae littera ut maneat indefinita, esse oportet $mm=nn$, ideoque vel $m=n$, vel $m=-n$.

11. Nostro autem casu est, ut supra vidimus, $m=n$, atque $\alpha = 2^n A$, quare posito

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} \ldots\ldots + \mu x^{n-i} + \nu x^{n-i-2} + \text{etc.}$$

erit $$\nu = \frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-i-2)^2-nn}\,\mu = -\frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(2n-i-2)}\,\mu,$$

unde sequentes prodeunt coëfficientium determinationes:

$$\beta = \frac{-n(n-1)}{4(n-1)}\,\alpha = \frac{-n}{4}\,\alpha$$

$$\gamma = \frac{-(n-2)(n-3)}{8(n-2)}\,\beta = \frac{+n(n-3)}{4.8}\,\alpha$$

$$\delta = \frac{-(n-4)(n-5)}{12(n-3)}\,\gamma = \frac{-n(n-4)(n-5)}{4.8.12}\,\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{-(n-6)(n-7)}{16(n-4)}\,\delta = \frac{+n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}\,\alpha.$$

etc.

12. Posito ergo $s = A(x+\sqrt{(xx-1)})^n$, ob $\alpha = 2^n A$, habebimus hanc seriem, qua quantitas s exprimitur:

$$s = 2^n A x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^{-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right).$$

Quare si pro A capiatur $\frac{1}{2}$, orietur ipsa illa forma, quam initio pro $\cos n\varphi$ assignavimus, existente $x=\cos\varphi$, atque nunc quidem patet illius expressionis in infinitum continuatae verum valorem esse

$$\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{(xx-1)}\right)^n;$$

sicque ratio aberrationis a valore $\cos n\varphi$ est manifesta, atque nunc quidem evidens est, cur sumto $n=0$, prodeat summa nostrae seriei $=\frac{1}{2}$; reliquis vero casibus summa fiat imaginaria, si quidem sit $x<1$. At si sumatur $x=1$, quicunque numerus pro n accipiatur, summa semper est $=\frac{1}{2}$, eritque propterea

$$1=2^n\left(1-\frac{n}{4}+\frac{n(n-3)}{4.8}-\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}-\text{etc.}\right),$$

quod certe est theorema non inelegans.

13. Alio modo concinnius valor ipsius s exprimi potest; cum enim sit

$$x=\cos\varphi,\quad \text{erit}\quad \sqrt{(xx-1)}=\sqrt{-1}.\sin\varphi,$$

et ex notis sinuum proprietatibus

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}.\sin n\varphi.$$

Quare posito $\cos\varphi=x$, erit

$$\cos n\varphi+\sqrt{-1}.\sin n\varphi=2^n x^n\left(1-\frac{n}{4}x^{-2}+\frac{n(n-3)}{4.8}x^{-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^{-6}+\text{etc.}\right),$$

unde patet summam hujus seriei in infinitum continuatae esse imaginariam, nisi sit $x=1$, seu $\varphi=0$. Realis quidem semper erit dum sit $x>1$; sed his casibus non amplius ad sinus et cosinus referri potest. Veluti si $xx=2$, ob $s=A(1+\sqrt{2})^n$ erit

$$(\sqrt{2}+1)^n=2^{\frac{3n}{2}}\left(1-\frac{n}{8}+\frac{n(n-3)}{8.16}-\frac{n(n-4)(n-5)}{8.16.24}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{8.16.24.32}-\text{etc.}\right).$$

At si ponamus $x+\sqrt{(xx-1)}=y$, fit $x=\frac{yy+1}{2y}$, unde obtinetur sequens summatio non contemnenda:

$$\left(\frac{yy}{yy+1}\right)^n=1-\frac{n}{1}\cdot\frac{yy}{(yy+1)^2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\cdot\frac{y^4}{(yy+1)^4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\cdot\frac{y^6}{(yy+1)^6}+\text{etc.}$$

quae cum etiam vera sit sumto n negativo, erit

$$\left(\frac{yy+1}{yy}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{yy}{(yy+1)^2}+\frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\frac{y^4}{(yy+1)^4}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\cdot\frac{y^6}{(yy+1)^6}+\text{etc.}$$

Sit porro $\frac{yy+1}{yy}=z$, et habebitur

$$z^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{z-1}{zz}+\frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\frac{(z-1)^2}{z^4}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\cdot\frac{(z-1)^3}{z^6}+\text{etc.}$$

ubi pro n omnes numeros assumere licet.

14. Hinc etiam alteri requisito satisfacere poterimus, quo ejusmodi expressio infinita desideratur, quantitatem $\cos n\varphi$ sine ulla restrictione exhibens. Sumatur enim exponens n negative, et cum sit $\cos(-n\varphi)=\cos n\varphi$ et $\sin(-n\varphi)=-\sin n\varphi$, erit ex superiori forma

$$\cos n\varphi-\sqrt{-1}.\sin n\varphi=\frac{1}{2^n x^n}\left(1+\frac{n}{4}x^{-2}+\frac{n(n+3)}{4.8}x^{-4}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^{-6}+\text{etc.}\right)$$

addendis his formulis pars imaginaria tollitur, et summae semissis dabit

$$\cos n\varphi = +2^{n-1}x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^{-6} + \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2^{n+1}x^n}\left(1 + \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4.8}x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^{-6} + \text{etc.}\right).$$

Hae scilicet binae series conjunctae verum valorem ipsius $\cos n\varphi$, existente $\cos\varphi = x$, exprimunt, idque sine ulla restrictione, ita ut pro n omnes numeros tam negativos quam positivos, tam integros quam fractos assumere liceat. Ubi quidem per se est perspicuum, sive ipsi n tribuatur valor negativus quicunque, sive idem positivus, easdem binas series ordine mutato resultare.

15. Jam binae hae series conjunctae pro quovis numero integro n eosdem cosinus per formulas finitas exhibent, quos initio recensui. Pro casu quidem $n = 0$ res est manifesta, cum inde fiat $\cos 0\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Reliquos igitur casus simpliciores evolvamus:

I. Sit $n = 1$ eritque

$$\cos\varphi = x\left(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1.2}{4.8}x^{-4} - \frac{1.3.4}{4.8.12}x^{-6} - \frac{1.4.5.6}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{4x}\left(1 + \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1.4}{4.8}x^{-4} + \frac{1.5.6}{4.8.12}x^{-6} + \frac{1.6.7.8}{4.8.12.16}x^{-8} + \text{etc.}\right);$$

ubi potestates negativae ipsius x sponte se destruunt, uti ex sequente repraesentatione fit perspicuum:

$$\cos\varphi = x - \frac{1}{4}x^{-1} - \frac{1.2}{4.8}x^{-3} - \frac{1.3.4}{4.8.12}x^{-5} - \frac{1.4.5.6}{4.8.12.16}x^{-7} - \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1.1}{4.4}x^{-3} + \frac{1.1.4}{4.4.8}x^{-5} + \frac{1.1.5.6}{4.4.8.12}x^{-7} + \text{etc.,}$$

ita ut sit $\cos\varphi = x$.

II. Sit $n = 2$ eritque

$$\cos 2\varphi = 2xx\left(1 - \frac{2}{4}x^{-2} - \frac{2.1}{4.8}x^{-4} - \frac{2.2.3}{4.8.12}x^{-6} - \frac{2.3.4.5}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{8xx}\left(1 + \frac{2}{4}x^{-2} + \frac{2.5}{4.8}x^{-4} + \frac{2.6.7}{4.8.12}x^{-6} + \frac{2.7.8.9}{4.8.12.16}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

quae binae series ita ordinate exhibeantur:

$$\cos 2\varphi = 2xx - 1 - 2\cdot\frac{2.1}{4.8}x^{-2} - 2\cdot\frac{2.2.3}{4.8.12}x^{-4} - 2\cdot\frac{2.3.4.5}{4.8.12.16}x^{-6} - \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{8}x^{-2} \quad + \quad \frac{1.2}{8.4}x^{-4} + \quad \frac{1.2.5}{8.4.8}x^{-6} + \text{etc.,}$$

ubi potestates negativae omnes tolluntur, ita ut prodeat $\cos 2\varphi = 2xx - 1$.

III. Sit $n = 3$ eritque

$$\cos 3\varphi = 4x^3\left(1 - \frac{3}{4}x^{-2} - \quad 0x^{-4} - \frac{3.1.2}{4.8.12}x^{-6} - \frac{3.2.3.4}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{16x^3}\left(1 + \frac{3}{4}x^{-2} + \frac{3.6}{4.8}x^{-4} + \frac{3.7.8}{4.8.12}x^{-6} + \frac{3.8.9.10}{4.8.12.16}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

qui termini hoc modo in ordinem redigantur:

$$\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x + 0x^{-1} - 4\cdot\frac{3.1.2}{4.8.12}x^{-3} - 4\cdot\frac{3.2.3.4}{4.8.12.16}x^{-5} - \text{etc.}$$
$$+ \qquad \frac{1}{16}x^{-3} + \qquad \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}x^{-5} + \text{etc.}$$

hincque $\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x$.

16. His autem exemplis casu evenire videtur, ut potestates negativae se mutuo tollant, neque id pro terminis ulterioribus patet. Quamobrem, ne ullum dubium relinquatur, firma demonstratione evincendum est, singulas potestates negativas ipsius x in utraque serie paribus coëfficientibus signisque contrariis esse affectos, ita ut certum sit omnes se mutuo destruere. Hunc in finem utriusque seriei terminum generalem contemplemur, ac prioris quidem seriei ita repraesentatae

$$2^{n-1}x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} - \frac{n(3-n)}{4.8}x^{-4} - \frac{n(4-n)(5-n)}{4.8.12}x^{-6} - \frac{n(5-n)(6-n)(7-n)}{4.8.12.16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

terminus generalis colligitur fore:

$$-2^{n-1}x^{n-2\alpha}\cdot\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\ldots(2\alpha-1-n)}{4\,.\,8\,.\,12\,.\,16\ldots\ldots\ldots 4\alpha}$$

ita, ut potestatis $x^{n-2\alpha}$ coëfficiens sit

$$-2^{n-1}\cdot\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\ldots(2\alpha-1-n)}{4\,.\,8\,.\,12\,.\,16\ldots\ldots\ldots 4\alpha}.$$

Quando ergo haec potestas est negativa, seu $2\alpha > n$, patet hunc terminum evanescere his casibus: $2\alpha = n+1$, $2\alpha = n+2$, $2\alpha = n+3$, usque ad $2\alpha = 2n-2$, si quidem α fuerit numerus integer. Unde in priori serie omnium potestatum negativarum coëfficientes sponte evanescunt, nisi sit $2\alpha > 2n-2$, seu $\alpha > n-1$, quocirca docendum restat, si fuerit $\alpha > n-1$, istas potestates negativas per alteram seriem destrui, ita ut solae potestates positivae ipsius x relinquantur.

17. Alterius autem seriei, quae ita se habet

$$\frac{1}{2^{n+1}x^n}\left(1 + \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(3+n)}{4.8}x^{-4} + \frac{n(4+n)(5+n)}{4.8.12}x^{-6} + \frac{n(5+n)(6+n)(7+n)}{4.8.12.16}x^{-8} + \text{etc.}\right)$$

terminus generalis colligitur

$$\frac{x^{-n-2\beta}}{2^{n+1}}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\ldots(2\beta-1+n)}{4.8.12.16\ldots 4\beta}$$

unde potestatis negativae $x^{-n-2\beta}$ coëfficiens est

$$2^{-n-1}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\ldots(2\beta-1+n)}{4.8.12.16\ldots 4\beta}.$$

Statuatur jam haec potestas praecedenti $x^{n-2\alpha}$ aequalis, seu $n-2\alpha = -n-2\beta$, fitque $\alpha = n+\beta$; sicque ipsae illae potestates negativae majores prodeunt, quarum coëfficientes in priori serie non sponte evanescunt. Ostendi ergo oportet, harum potestatum coëfficientes ex utraque serie ortos inter se esse aequales et se mutuo destruere, ubi quidem jam sponte patet alterum esse positivum, alterum negativum, ex quo utriusque aequalitas demonstrari debet.

18. Cum sit $\alpha = n+\beta$, erit $n = \alpha-\beta$, ideoque demonstrandum est fore

$$2^{\alpha-\beta-1}\cdot\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{4.8.12.16\ldots4\alpha}=2^{\beta-\alpha-1}\cdot\frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{4.8.12.16\ldots4\beta},$$

seu utrinque per $2^{\alpha+\beta+1}$ multiplicando

$$2^{2\alpha}\cdot\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{4.8.12.16\ldots4\alpha}=2^{2\beta}\cdot\frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{4.8.12.16\ldots4\beta}.$$

Cum jam in priori forma factorum denominatoris numerus sit $=\alpha$, singulique per quaternarium sint divisibiles, hos factores ita repraesentare licet

$$4^{\alpha}.1.2.3\ldots.\alpha=2^{2\alpha}.1.2.3\ldots\alpha$$

simili modo denominator alterius formae ita exprimi poterit

$$4^{\beta}.1.2.3\ldots.\beta=2^{2\beta}.1.2.3\ldots.\beta$$

unde haec aequalitas ostendenda superest

$$\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{1.2.3.4\ldots\alpha}=\frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+\beta-1)}{1.2.3.4\ldots\beta},$$

quae per crucem multiplicata manifesto utrinque praebet idem productum

$$n.1.2.3.4\ldots.(\alpha+\beta-1).$$

19. Paradoxon ergo initio propositum satis distincte explicatum videtur, simulque ratio patet, cur haec aequatio:

$$\cos n\varphi=2^{n-1}x^{n}\left(1-\frac{n}{4}x^{-2}+\frac{n(n-3)}{4.8}x^{-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^{-6}+\text{etc.}\right)$$

tum demum sit veritati consentanea, quando n denotat numerum integrum positivum, simulque omnes potestates ipsius x exponentes negativos habiturae expungantur, et cur his restrictionibus non observatis, haec expressio in errorem praecipitet.

20. Nunc autem pro casibus, quibus n est numerus fractus, veras series exhibere possumus, quae cosinus angulorum submultiplorum exprimant. Quod ut ostendam, sit primo $n=\frac{1}{2}$, eritque

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{8}x^{-2}-\frac{1.5}{8.16}x^{-4}-\frac{1.7.9}{8.16.24}x^{-6}-\frac{1.9.11.13}{8.16.24.32}x^{-8}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2x}}\left(1+\frac{1}{8}x^{-2}+\frac{1.7}{8.16}x^{-4}+\frac{1.9.11}{8.16.24}x^{-6}+\frac{1.11.13.15}{8.16.24.32}x^{-8}+\text{etc.}\right),$$

quae in ordinem secundum potestates redacta dat

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8xx}+\frac{1}{2.8x^{3}}-\frac{1.5}{8.16x^{4}}+\frac{1.7}{2.8.16x^{5}}-\frac{1.7.9}{8.16.24x^{6}}+\frac{1.9.11}{2.8.16.24x^{7}}-\text{etc.}\right)$$

ubi, si quilibet coëfficiens per praecedentem dividatur, haec resultat series:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{5}{8},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{9}{12},\ -\frac{11}{14},\ \text{etc.}$$

unde fit $$\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}x^{-1}-\frac{1.1}{2.4}x^{-2}+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-3}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^{-4}+\text{etc.}\right)$$

ideoque manifesto habebitur $\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$, uti constat.

21. Evolvamus etiam casum $n=\frac{1}{3}$, ac reperimus

$$\cos\frac{1}{3}\varphi=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4}}\left(1-\frac{1}{12}x^{-2}-\frac{1.8}{12.24}x^{-4}-\frac{1.11.14}{12.24.36}x^{-6}-\frac{1.14.17.20}{12.24.36.48}x^{-8}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt[3]{2x}}\left(1+\frac{1}{12}x^{-2}+\frac{1.10}{12.24}x^{-4}+\frac{1.13.16}{12.24.36}x^{-6}+\frac{1.16.19.22}{12.24.36.48}x^{-8}+\text{etc.}\right),$$

quae binae series ita conjungantur:

$$\cos\frac{1}{3}\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{12\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{12\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{7}{3}}-\frac{1.8}{12.24\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{11}{3}}+\frac{1.10}{12.24\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{13}{3}}-\text{etc.}$$

Jam ad irrationalitatem tollendam statuatur $x^{\frac{1}{3}}=y\sqrt[3]{4}$, seu $x=4y^3$, ac prodibit

$$\cos\frac{1}{3}\varphi=y+\frac{1}{4y}-\frac{1}{12.4^2y^5}+\frac{1}{12.4^3y^7}-\frac{1.8}{12.24.4^4y^{11}}+\frac{1.10}{12.24.4^5y^{13}}-\frac{1.11.14}{12.24.36.4^6y^{17}}+\text{etc.}$$

Sit porro $y=\frac{z}{2}$, erit

$$\cos\frac{1}{3}\varphi=\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6z^5}+\frac{1}{6z^7}-\frac{1.8}{2.3.6z^{11}}+\frac{1.10}{2.3.6z^{13}}-\frac{1.11.14}{2.3.6.9z^{17}}+\frac{1.13.16}{2.3.6.9z^{19}}-\text{etc.}$$

seu $$2\cos\frac{1}{3}\varphi=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^5}+\frac{1}{3z^7}-\frac{1.8}{3.6z^{11}}+\frac{1.10}{3.6z^{13}}-\frac{1.11.14}{3.6.9z^{17}}+\frac{1.13.16}{3.6.9z^{19}}-\text{etc.}$$

22. In genere autem casus $x=\frac{1}{2}$, unde fit $\varphi=60^\circ$, seu $\varphi=\frac{1}{3}\pi$, denotante π semicircumferentiam circuli, cujus radius $=1$, omni attentione dignus videtur. Nam ob $2x=1$, fit

$$\cos\frac{n}{3}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-3)}{1.2}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{1}+\frac{n(n+3)}{1.2}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right),$$

ubi notari convenit utriusque seriei summam seorsim sumtam esse imaginariam, et quia utraque est divergens, minime licet eas pro lubitu combinare. Veluti si termini ordinate conjungerentur, prodiret

$$\cos\frac{n}{3}\pi=1+\frac{nn}{1.2}+\frac{9nn}{1.2.3}+\frac{nn(nn+107)}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

unde sequeretur fore $\cos\frac{n}{3}\pi>1$, quod tamen est absurdum. Interim tamen binarum illarum prioris summa est $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{n}{3}\pi+\sqrt{-1}.\sin\frac{n}{3}\pi\right)$, posterioris vero $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{n}{3}\pi-\sqrt{-1}.\sin\frac{n}{3}\pi\right)$, sicque nullum est dubium, quin ambae conjunctim praebeant $\cos\frac{n}{3}\pi$, etiam si non pateat, quemadmodum hic valor ex conjunctione facta elici possit. Hinc ergo denuo insigne paradoxon resultat, cujus explicatio haud parum ardua videtur; sine dubio autem ex serierum divergentia est petenda, et series signis alternantibus ita scribenda, terminorum numero neque pari neque impari reputato:

$$2\cos\frac{n}{3}\pi=2-\frac{n}{1}+\frac{n}{1}-\frac{n(3-n)}{1.2}+\frac{n(3+n)}{1.2}-\frac{n(4-n)(5-n)}{1.2.3}+\frac{n(4+n)(5+n)}{1.2.3}-\text{etc.}$$

ita ut sit

$$\frac{2-2\cos\frac{n}{3}\pi}{n}=\frac{3-n}{1.2}-\frac{3-n}{1.2}+\frac{(4-n)(5-n)}{1.2.3}-\frac{(4+n)(5+n)}{1.2.3}+\frac{(5-n)(6-n)(7-n)}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

Incommoda autem effugere non licet, nisi quantitas x indefinita relinquatur, ac seriei termini secundum ejus potestates disponantur.

23. Verum etiam hoc modo haud leves difficultates relinquuntur; si enim numerum n sumamus infinite parvum, ut sit $\cos n\varphi = 1-\frac{1}{2}nn\varphi\varphi$, ob

$$2^n x^n = 1+nl2x+\frac{1}{2}nn(l2x)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^n x^n}=1-nl2x+\frac{1}{2}nn(l2x)^2$$

habebimus, in singulis terminis potestates ipsius n quadrato altiores negligendo,

$$2-nn\varphi\varphi=+\left(1+nl2x+\frac{1}{2}nn(l2x)^2\right)\left(1-\frac{n}{4xx}-\frac{3n+nn}{4.8x^4}-\frac{20n+9nn}{4.8.12x^6}-\frac{210n+107nn}{4.8.12.16x^8}-\text{etc.}\right)$$

$$+\left(1-nl2x+\frac{1}{2}nn(l2x)^2\right)\left(1+\frac{n}{4xx}+\frac{3n+nn}{4.8x^4}+\frac{20n+9nn}{4.8.12x^6}+\frac{210n+107nn}{4.8.12.16x^8}+\text{etc.}\right).$$

Atque facta evolutione tam partes finitae quam infinite parvae ipso numero n affectae se mutuo destruunt, reliquae vero per nn divisae praebent

$$\varphi\varphi=2l2x\left(\frac{1}{4xx}+\frac{3}{4.8x^4}+\frac{20}{4.8.12x^6}+\frac{210}{4.8.12.16x^8}+\text{etc.}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{4.8x^4}+\frac{9}{4.8.12x^6}+\frac{107}{4.8.12.16x^8}+\text{etc.}\right)-(l2x)^2$$

existente $x=\cos\varphi$. Ad legem hujus progressionis clarius percipiendam, ponamus $2x=y$, ut sit

$$y=2\cos\varphi \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} \frac{3}{2}=A=\frac{3}{2}, & A\cdot\frac{1}{3} & =\alpha=\frac{1}{2} \\ \frac{4.5}{2.3}=B=\frac{10}{3}, & B\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) & =\beta=\frac{3}{2}=A \\ \frac{5.6.7}{2.3.4}=C=\frac{35}{4}, & C\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) & =\gamma=\frac{107}{24}=B+\frac{1}{2}AA \\ \frac{6.7.8.9}{2.3.4.5}=D=\frac{126}{5}, & D\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right) & =\delta=\frac{55}{4}=C+AB \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \varepsilon=D+AC+\frac{1}{2}BB \end{array}$$

eritque

$$\varphi\varphi=2ly\left(\frac{1}{yy}+\frac{A}{y^4}+\frac{B}{y^6}+\frac{C}{y^8}+\frac{D}{y^{10}}+\text{etc.}\right)$$

$$-2\left(\frac{\alpha}{y^4}+\frac{\beta}{y^6}+\frac{\gamma}{y^8}+\frac{\delta}{y^{10}}+\text{etc.}\right)-(ly)^2,$$

ubi si brevitatis gratia statuamus

$$P=\frac{1}{yy}+\frac{A}{y^4}+\frac{B}{y^6}+\frac{C}{y^8}+\text{etc.}$$

fit $\varphi\varphi=2Ply-PP-(ly)^2$, seu $\varphi\varphi=-(ly-P)^2$,

quod est absurdum.

24. Omnino autem notatu digna est relatio, quam hic inter numerorum A, B, C, D, etc. et numerorum α, β, γ, δ, etc. ordines observavi, et quae commodissime ita referri potest, ut sit

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = \frac{1}{2}(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})^2,$$

cujus demonstratio haud parum ardua videtur. Operae igitur pretium est indolem horum numerorum accuratius contemplari:

$$\begin{array}{l|l}
A = \frac{3}{2} = \frac{2.3}{2.2}\cdot 1 & \alpha = A\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \\
B = \frac{4.5}{2.3} = \frac{4.5}{3.3}A & \beta = B\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = 1\cdot A \\
C = \frac{5.6.7}{2.3.4} = \frac{6.7}{4.4}B & \gamma = C\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) = 1\cdot B + \frac{1}{2}AA \\
D = \frac{6.7.8.9}{2.3.4.5} = \frac{8.9}{5.5}C & \delta = D\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right) = 1\cdot C + AB \\
E = \frac{7.8.9.10.11}{2.3.4.5.6} = \frac{10.11}{6.6}D & \varepsilon = E\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right) = 1\cdot D + AC + \frac{1}{2}BB \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

25. Consideremus hanc proprietatem in solis numeris integris, ac formemus has binas progressiones:

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 & \\
\mathfrak{A} = 3 & \mathfrak{a} = \mathfrak{A}\cdot\frac{1}{3} \\
\mathfrak{B} = 4.5 & \mathfrak{b} = \mathfrak{B}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \\
\mathfrak{C} = 5.6.7 & \mathfrak{c} = \mathfrak{C}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) \\
\mathfrak{D} = 6.7.8.9 & \mathfrak{d} = \mathfrak{D}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right) \\
\mathfrak{E} = 7.8.9.10.11 & \mathfrak{e} = \mathfrak{E}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right) \\
\mathfrak{F} = 8.9.10.11.12.13 & \mathfrak{f} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right) \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

eritque ut sequitur

$$\mathfrak{a} = 2\cdot\frac{1.1}{2},\quad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{A},\quad \mathfrak{c} = 4\mathfrak{B} + 6\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{2},\quad \mathfrak{d} = 5\mathfrak{C} + 10\mathfrak{A}\mathfrak{B},\quad \mathfrak{e} = 6\mathfrak{D} + 15\mathfrak{A}\mathfrak{C} + 20\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{2},$$

$$\mathfrak{f} = 7\mathfrak{E} + 21\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 35\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

seu $$2\mathfrak{f} = 7\cdot 1\mathfrak{E} + \frac{7.6}{1.2}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{7.6.5}{1.2.3}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\mathfrak{C}\mathfrak{B} + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\mathfrak{D}\mathfrak{A} + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\mathfrak{E}\cdot 1,$$

unde lex progressionis est manifesta. Vel erit

$$\frac{\mathfrak{a}}{2} + \frac{\mathfrak{b}z}{2.3} + \frac{\mathfrak{c}zz}{2.3.4} + \frac{\mathfrak{d}z^3}{2.3.4.5} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{A}z}{2} + \frac{\mathfrak{B}zz}{2.3} + \frac{\mathfrak{C}z^3}{2.3.4} + \frac{\mathfrak{D}z^4}{2.3.4.5} + \text{etc.}\right)^2.$$

26. Pro insigni autem hac proprietate sequentem inveni demonstrationem, qua simul indoles hujusmodi formularum penitius perspicietur. Ponamus brevitatis gratia $2x = \frac{1}{y}$, ut sit $\cos\varphi = \frac{1}{2y}$, atque ex superioribus habebimus

$$\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi = y^n\left(1 + \frac{n}{1}y^2 + \frac{n(n+3)}{1.2}y^4 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}y^6 + \text{etc.}\right).$$

Evolvatur haec series secundum potestates indicis n, fingaturque

$$\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi = y^n(1 + nP + nnQ + n^3R + n^4S + \text{etc.}),$$

quae forma quo facilius intelligi possit, novo signandi modo utamur, scilicet propositis quotcunque numeris α, β, γ, δ, etc.

haec scriptio	denotat
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.})^{(1)}$	summam singulorum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.})^{(2)}$	summam productorum ex binis
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.})^{(3)}$	summam productorum ex ternis
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.})^{(4)}$	summam productorum ex quaternis
etc.	

ubi observo si index suffixus aequalis sit multitudini numerorum, hac scriptione omnium productum exprimi, tum vero semper esse $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.})^{(0)} = 1$. Hoc autem scribendi modo adhibito erit

$$P = \frac{1}{1}y^2 + \frac{(3)^{(1)}}{2}y^4 + \frac{(4.5)^{(2)}}{2.3}y^6 + \frac{(5.6.7)^{(3)}}{2.3.4}y^8 + \frac{(6.7.8.9)^{(4)}}{2.3.4.5}y^{10} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{(3)^{(0)}}{2}y^4 + \frac{(4.5)^{(1)}}{2.3}y^6 + \frac{(5.6.7)^{(2)}}{2.3.4}y^8 + \frac{(6.7.8.9)^{(3)}}{2.3.4.5}y^{10} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{(4.5)^{(0)}}{2.3}y^6 + \frac{(5.6.7)^{(1)}}{2.3.4}y^8 + \frac{(6.7.8.9)^{(2)}}{2.3.4.5}y^{10} + \text{etc.}$$

$$S = \frac{(5.6.7)^{(0)}}{2.3.4}y^8 + \frac{(6.7.8.9)^{(1)}}{2.3.4.5}y^{10} + \text{etc.}$$

$$T = \frac{(6.7.8.9)^{(0)}}{2.3.4.5}y^{10} + \text{etc.}$$

etc.

27. Nunc autem observo fore simili modo

$$\cos\lambda n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin\lambda n\varphi = y^{\lambda n}(1 + \lambda nP + \lambda^2n^2Q + \lambda^3n^3R + \text{etc.})$$

Cum autem sit, uti constat

$$\cos\lambda n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin\lambda n\varphi = (\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi)^\lambda,$$

erit quoque $\cos\lambda n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin\lambda n\varphi = y^{\lambda n}(1 + nP + n^2Q + n^3R + \text{etc.})^\lambda$

ideoque $1 + \lambda nP + \lambda^2n^2Q + \lambda^3n^3R + \text{etc.} = (1 + nP + n^2Q + n^3R + \text{etc.})^\lambda$,

quae aequalitas subsistere nequit, nisi sit

$$Q = \frac{1}{2}P^2,\quad R = \frac{1}{2.3}P^3,\quad S = \frac{1}{2.3.4}P^4,\quad T = \frac{1}{2.3.4.5}P^5,\quad \text{etc.}$$

Atque hinc porro colligere licet, cum sit

$$\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi = e^{-n\varphi\sqrt{-1}}$$

nunc autem invenerimus

$$\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi = y^n e^{nP} = e^{n(P+ly)}$$

fore $-\varphi\sqrt{-1} = P + ly$, ideoque $\varphi\varphi = -(P+ly)^2$, quod cum videatur absurdum, ita resolvi oportet, quod P semper sit quantitas imaginaria; sicque explicatur paradoxon supra § 22 allatum.

28. Verum ut ad propositum revertar, cum sit $Q = \frac{1}{2}PP$, si brevitatis gratia valores § 24 explicatos introducamus, erit

$$P = yy + Ay^4 + By^6 + Cy^8 + Dy^{10} + \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad Q = \alpha y^4 + \beta y^6 + \gamma y^8 + \delta y^{10} + \text{etc.}$$

unde valoribus Q et $\frac{1}{2}PP$ aequatis nanciscimur supra observatas relationes, scilicet

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \beta = A,\quad \gamma = B + \frac{1}{2}AA,\quad \delta = C + AB,\quad \varepsilon = D + AC + \frac{1}{2}BB$$

et ita porro. Hac igitur demonstratione confecta, aliarum similium formularum complicatarum resolutionem coronidis loco subjungam.

29. **Problema.** Hanc formulam $a(1+\sqrt{(1-x)})^n$ in seriem infinitam resolvere secundum potestates ipsius x progredientem.

Solutio. Statuatur $z = a(1+\sqrt{(1-x)})^n$ et posita serie, quae quaeritur,

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

evidens est fore $A = 2^n a$, unde sequentes coëfficientes simili modo ut supra definire licebit. Sumtis logarithmis habemus $lz = la + nl(1+\sqrt{(1-x)})$, et differentiando

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx}{2\sqrt{(1-x)}} : (1+\sqrt{(1-x)}).$$

Multiplicetur numerator ac denominator per $1-\sqrt{(1-x)}$ prodibitque

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx(1-\sqrt{(1-x)})}{2x\sqrt{(1-x)}} = \frac{ndx}{2x} - \frac{ndx}{2x\sqrt{(1-x)}}$$

et irrationalitatem tollendo

$$\left(\frac{ndx}{2x} - \frac{dz}{z}\right)^2 = \frac{nndx^2}{4xx(1-x)}.$$

Ponatur $z = x^{\frac{n}{2}} v$, ut sit $\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{ndx}{2x}$, fietque $\frac{dv^2}{vv} = \frac{nndx^2}{4xx(1-x)}$, seu

$4xx(1-x)dv^2 = nnvvdx^2$, quae aequatio differentiata et per $2dv$ divisa praebet

$$4xx(1-x)ddv + 2x(2-3x)dxdv - nnvdx^2 = 0.$$

Cum nunc sit $\frac{dv}{v} = \frac{dz}{z} - \frac{ndx}{2x}$, erit differentiando

$$\frac{ddv}{v} - \frac{dv^2}{vv} = \frac{ddz}{z} - \frac{dz^2}{zz} + \frac{ndx^2}{2xx} \quad \text{at}$$

$$\frac{dv^2}{vv} = \frac{dz^2}{zz} - \frac{ndxdz}{xz} + \frac{nndx^2}{4xx}, \quad \text{ergo}$$

$$\frac{ddv}{v} = \frac{ddz}{z} - \frac{ndxdz}{xz} + \frac{n(n+2)dx^2}{4xx}$$

unde facta substitutione:

$$\left.\begin{aligned} 4xx(1-x)\frac{ddz}{z} - 4nx(1-x)\frac{dxdz}{z} + n(n+2)(1-x)\,dx^2 \\ +2x(2-3x)\frac{dxdz}{z} - n(2-3x)\,dx^2 \\ -nndx^2 \end{aligned}\right\} = 0, \quad \text{seu}$$

$$4x(1-x)\,ddz - 4(n-1)\,dxdz + 2(2n-3)\,xdxdz - n(n-1)\,zdx^2 = 0.$$

Cum hic variabilis x partim unicam, partim duas dimensiones obtineat, distinguendo hos terminos

$$\begin{aligned} &+4xddz - 4(n-1)\,dxdz \\ &-4xxddz + 2(2n-3)\,xdxdz - n(n-1)\,zdx^2 = 0 \end{aligned}$$

statuamus $\quad z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \ldots + Mx^i + Nx^{i+1} + \text{etc.}$

et potestatis x^i coëfficiens erit

$$+N(4i(i+1) - 4(n-1)(i+1)) + M(-4i(i-1) + 2(2n-3)i - n(n-1)),$$

qui cum evanescere debeat, habebitur

$$N = \frac{(2i-n)(2i-n+1)}{4(i+1)(i-n+1)}M.$$

Nunc autem novimus esse $A = 2^n a$, quare sequentes coëfficientes erunt

$$B = -\frac{n(n-1)}{4(n-1)}A = -\frac{n}{4}A$$

$$C = -\frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)}B = +\frac{n(n-3)}{4.8}A$$

$$D = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}C = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}A$$

etc.

Sumatur $a = 2^{-n}$, ut fiat $A = 1$, eritque

$$\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n = 1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4.8}xx - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}x^4 - \text{etc.},$$

quae est series quaesita.

30. **Coroll. 1.** Sumto x negativo, sequentis seriei

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4.8}xx + \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}x^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}x^4 + \text{etc.}$$

summa erit $= \left(\frac{1+\sqrt{(1+x)}}{2}\right)^n$, ex cujus combinatione cum praecedente, alternis tantum terminis sumendis, summa assignari poterit.

31. **Coroll. 2.** Si exponens n negative capiatur, binae sequentes series ad summam revocabuntur

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4.8}xx + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}x^4 + \text{etc.},$$

hujus seriei summa est $= \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-n} = 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n$. Tum

$$1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4.8}xx - \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}x^4 - \text{etc.},$$

cujus summa est $= 2^n\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-1}{x}\right)^n$.

32. **Problema.** Hanc formulam $\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$ in seriem infinitam resolvere, cujus termini secundum potestates ipsius x progredirentur.

Solutio. Posito $z = \left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$ erit quadratis sumendis $zz = \left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^n$, hincque

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

quae forma in priori continetur, simodo ibi loco x et n scribatur xx et $\frac{n}{2}$, quocirca colligitur statim series quaesita:

$$1 - \frac{n}{8}xx + \frac{n(n-6)}{8.16}x^4 - \frac{n(n-8)(n-10)}{8.16.24}x^6 + \frac{n(n-10)(n-12)(n-14)}{8.16.24.32}x^8 - \text{etc.}$$

quippe cujus summa est $= \left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$.

33. **Coroll.** Sumto n negativo, ut prodeat haec series

$$1 + \frac{n}{8}xx + \frac{n(n+6)}{8.16}x^4 + \frac{n(n+8)(n+10)}{8.16.24}x^6 + \frac{n(n+10)(n+12)(n+14)}{8.16.24.32}x^8 + \text{etc.}$$

hujus summa erit $= \left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-n}$, quae reducitur ad hanc formam:

$$\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n.$$

34. **Scholion.** Omnes series istas, quarum summam hic assignavi, in hac forma complecti licet:

$$s = 1 + \frac{n}{1}y + \frac{n(n+3)}{1.2}yy + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}y^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}y^4 + \text{etc.}$$

eritque $s = \left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n}$; unde patet si fuerit $4y > 1$, seriei summam esse imaginariam; realem autem, si sit $4y < 1$. Casu autem $y = \frac{1}{4}$ erit, uti jam supra observavimus,

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16} + \text{etc.} = 2^n.$$

Verum illa series pluribus modis transformari potest, ex quibus hunc solum casum affero, qui oritur differentialibus sumtis, erit scilicet

$$\frac{ds}{dy} = n + \frac{n(n+3)}{1}y + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2}yy + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3}y^3 + \text{etc.}$$

At est
$$\frac{ds}{dy} = +n\left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}}.$$

Quare per n dividendo, hujus seriei

$$1 + \frac{n+3}{1}y + \frac{(n+4)(n+5)}{1.2}yy + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3}y^3 + \text{etc.}$$

$$\text{summa est } = \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n-1}.$$

Vel scribendo $n = m - 3$, hujus seriei

$$1 + \frac{m}{1}y + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}yy + \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{1.2.3}y^3 + \frac{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}{1.2.3.4}y^4 + \text{etc.}$$

$$\text{summa est } = \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-m+2}.$$

XV.

Vera aestimatio sortis in ludis.

Multis laborat difficultatibus mensura sortium, seu expectationum, quas habent collusores vel de deposito certantes, vel victi victori designatam pecuniae summam solvere obligati. Ea nimirum mensura, cujus fundamenta Paschalius posuit, et post eum Hugenius, Jac. Bernoulli aliique celeberrimi viri insigniter excoluerunt. Secundum horum sententiam non imprudenter ago, si ludum suscipio, quo aeque facile evenire potest, ut centum rublones vel accipiam, vel perdam. Sed si omnes meae opes tantum 100 R. valent, imprudentissime mihi acturum videor hunc ludum suscipiens, lucrum enim respectu damni, quod aeque facile accidere potest, nequaquam satis est grande. Casu secundo consequor 100 R., eoque ergo duplo ditior fio; casu adverso vero teneor meos 100 R. alteri tradere, hoc igitur in extremam paupertatem pervenio, et infinities pauperior fio. Quis autem sanus se extremae paupertati et deterrimae conditioni exponere volet, ut duplo tantum ditior reddatur? Sin vero bona mea multo essent majora et fere infinita, tunc minus dubitarem hujusmodi ludum inire, cum casu secundo tanto fere efficiar ditior quanto adverso pauperior.

Maxime hujus rei veritas evincitur sequenti ludo: Promittitur ipsi *A* jactus tessera instituenti, si numerus punctorum fuerit par, solvere 1 R.; si secundi jactus numerus punctorum fuerit par, pro eo solvere 2 R.; pro tertio, si punctorum numerus itidem par sit, 4 R., pro quarto 8 R. et ita porro, quoad impar accidat punctorum numerus, quo in casu nihil accipit *A*, ludusque finitur. Quaeritur expectatio ipsius *A*, seu quanti hanc conditionem alii vendere fas sit. Invenitur autem ex regula ab auctoribus citatis tradita, expectatio ipsius *A* valere infinitum rublonum numerum. Egregie vero hic interrogat clariss. Nicolaus Bernoulli, quis tam esset stolidus, qui non mallet 20 R. accipere, quam propositam conditionem. Ex quo maxime elucet discrepantia inter aestimationem sortis secundum regulas et eam, quam sanae mentis homo esset facturus, quippe regulae requirunt innumeros rublones tanquam aequivalens ludi propositi, hic vero viginti rublonibus merito se contentum esse posse putat, eumque amentem existimat, qui vel 20 R. tantum pro hac conditione soluturus esset. Sed in hac quaestione, ut in omnibus aliis praecipue attendere convenit ad opes ejus, cujus sors quaeritur, quo enim quisque plus habet, pluris etiam hujusmodi conditiones aestimabit, et cui infinitae sunt opes, is ludum

propositum infinito pecuniae numero emere ratione posset, parte tamen infinitesima tantum suarum opum. Regulae igitur aestimandarum sortium expositae ad opulentissimos pertinent homines, aut si id, quod ludo acquiri et amitti potest, rationem habet minimam ad opes collusorum. Si vero collusoribus opes sint finitae et lucra damnaque rationem finitam ad opes teneant, regulae illae correctionem desiderant. Nisi enim hoc praestatur, homines ad eas aestimandae sortis suae causas confugere tuto nequeunt, et ita illae nullius prorsus essent usus. Quocirca ad veram cujusque sortis existimationem indagandam necesse est, praeter ludi conditiones etiam opes ludentium considerare et conclusiones ab iis pendentes conficere. Is ergo ludus mihi non aequus videtur, quo a vel lucror vel perdo, sed is demum justus est censendus, quo a vicibus vel ditior vel pauperior reddor, siquidem utrumque aeque facile accidere potest, et in hoc casu mihi perinde est ludum sive suscipere sive recusare, ad illum vero ludum nullo modo accederem, nisi essem ditissimus. Sed id etiam multo magis est certum, eum esse stultissimum putandum, qui mecum secundum posteriorem conditionem ludum suscipere vellet, et mihi 100 v. gr. R. habenti, si lucrarer 100 R., solvere, si vero perderem tantum 50 R., a me recipere esset contentus. Ex hoc igitur injustitia omnium ludorum perspicitur, nisi instituantur ab hominibus infinite divitibus. Quantae autem cujusque sunt opes et divitiae, non tantum ex argenti et bonorum quantitate, sed praeterea ex ejus studiis et facultatibus, ex quibus ei quoque foenora affluere possunt. Hoc igitur modo cujusvis hominis opes determinari convenit, simulque pecuniae quantitas aequivalens definiri potest. Quamobrem opibus cujusvis certam quandam argenti quantitatem substituere licebit, quam status ejus nomine in sequentibus appellabo, atque propterea quispiam in duplo meliorem statum pervenire dicetur, cujus opes duplo fiunt majores, vel potius qui censet se duplo opulentiorem esse factum. Is enim demum duplo ditior est aestimandus, qui aeque proclivis est duplam argenti summam erogare in casu, quo antea simplam tantum expendere non dubitavit. His ergo praemissis, qui in ludo, vel negotio quodam duos casus habet objectos aeque proclives, quorum altero in statum b, altero in statum c reducitur, ejus status valere putandus est $\sqrt{bc}$. Hic enim status tanto esse debet minor altero b, quanto est major altero c. Qui igitur eum in statum $\sqrt{bc}$ collocare promiserit, ei sortem suam cedere jure potest. Simili modo, qui tres obvios habet casus, quorum unus ipsum in statum b, secundus in statum c, et tertius in statum d constituit, ejus status valere $\sqrt[3]{bcd}$ dicendus est, aut ab alio, ut illi sortem suam cedat, in hunc statum $\sqrt[3]{bcd}$ constitui debet.

Regula ex his habetur haec: omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in se invicem multiplicentur et ex facto radix dignitatis tanti gradus, quot sunt casus, extrahatur, erit haec valor status expectationi aequivalentis. Secundum methodum hactenus usitatam oportet omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in unam summam conjicere, eamque per casuum numerum dividere. Discrimen igitur inter has duas methodos in hoc consistit, quod nostra multiplicatione utitur, quando altera additione; item elevatione, quando haec ipsa multiplicatione; sive nos operationes geometrice instituimus, illi vero arithmetice, ita ut quas operationes hi ad ipsos status accommodant, nos easdem in statuum logarithmos transferamus, ejusque quod prodit logarithmi numerus respondens, nobis indicat statum ludentis quaesitum. Sint m casus, quibus in statum a, n casus, quibus in b,

p casus, quibus in c etc. constituor. Erit status meus medius, seu expectationem meam repraesentans

$$\sqrt[m+n+p]{a^m\, b^n\, c^p};$$

nam $m+n+p$ est numerus omnium casuum, et $a^m\, b^n\, c^p$ est factum omnium statuum, qui singulis casibus evenire possunt. Status medius vero ex regulis Hugenianis est

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

cui similis nostrae formulae logarithmus

$$\frac{mla+nlb+plc}{m+n+p}.$$

Valeat status meus A et oblati mihi sint casus m, quibus a lucror, seu quibus in statum $A+a$ constituor; casus vero n, quibus b lucror, seu in statum $A+b$ pervenio, casusque p, quibus c lucror, ideoque statum $A+c$ adipiscor, erit status meus expectandus

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m\,(A+b)^n\,(A+c)^p};$$

aestimandus igitur sum lucrari

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m\,(A+b)^n\,(A+c)^p}-A.$$

Si ponatur A esse infinities majus quam a, b et c, erit

$$(A+a)^{\frac{m}{m+n+p}}=A^{\frac{m}{m+n+p}}+\frac{mA^{\frac{-n-p}{m+n+p}}\,a}{m+n+p};$$

$$(A+b)^{\frac{n}{m+n+p}}=A^{\frac{n}{m+n+p}}+\frac{nA^{\frac{-m-p}{m+n+p}}\,b}{m+n+p} \quad \text{et}$$

$$(A+c)^{\frac{p}{m+n+p}}=A^{\frac{p}{m+n+p}}+\frac{pA^{\frac{-m-n}{m+n+p}}\,c}{m+n+p},$$

horum factum est $A+\frac{pc+nb+ma}{p+n+m}$, a quo si auferatur A habebitur

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

quod est valor lucri mei, atque eadem est formula, ac si lucrum expectationis meae ex regulis Hugenii deduxissem. Ex quo id perspicitur, quod initio annotavi, si status colludentium infinite sint magni, regulas traditas veram cujusque expectationem praebere. In formula vero nostra, expectandum statum praebente, facile perspicitur, si litterae a, b, vel c loco lucri detrimentum significent, iis signum $-$ praefigi debere.

Sit unus casus, quo ego bona A possidens adipiscor a, et unus, quo perdo b, erit status meus expectandus $=\sqrt{(A+a)(A-b)}$, qui valor, si major fuerit quam A, lucrari spero, et hic ludus statum meum meliorem efficere censendus est; gratis igitur conditionem hanc alii non cedo, sed ab eo postulo, ut mihi solvat $\sqrt{(A+a)(A-b)}-A$, quo in statum speratum collocer.

Contra autem si $\sqrt{(A+a)(A-b)}$ minor fuerit quam A, ludus ad meum damnum dirigitur, ideoque optarem ludum deserere, vel alium in meum locum constituere, cui ut suscipiat etiam $A-\sqrt{(A+a)(A-b)}$ persolverem, non vero majorem summam, quia vel hanc persolvere, vel in ludo manere mihi perinde esset. Quando vero

$$\sqrt{(A+a)(A-b)}=A,$$

tum ludus mihi prorsus est indifferens, neque dubito eum suscipere, neque alii relinquere. Accedit vero hoc, quando est

$$Aa=Ab+ab, \quad \text{vel} \quad A=\frac{ab}{a-b}$$

i. e. si excessus lucri super damnum est ad damnum, ut lucrum ad meum statum. Hujusmodi igitur ludus mihi aequus est existimandus, non is in quo est $a=b$. Si enim lucrum a aequale est damno b, aeque proclivi, ludum semper, nisi sint mea bona infinita, ad meum damnum suscipio, et tantum susceptio ludi aequiparanda est damno

$$A-\sqrt{(A^2-a^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{A}+\frac{1}{8}\cdot\frac{a^4}{A^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{a^6}{A^5}+\frac{5}{128}\cdot\frac{a^8}{A^7}+\text{etc.}$$

XVI.

Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie génoise.

(Lu à l'Académie de Berlin le 10 Mars 1763.)

Un Italien proposa autrefois un projet d'une espèce de loterie qui paraissait fort au goût de la plupart des hommes, à cause des gains très considérables qu'on y pouvait faire sans presque rien risquer. Le plan était entièrement différent des loteries ordinaires, parce que chacun pouvait déterminer non seulement sa mise, mais aussi la grandeur du gain auquel il voulait aspirer. Il y avait plutôt quelque ressemblance avec le jeu de Pharaon, à l'égard des mises arbitraires qu'on peut mettre sur telle carte qu'on veut; mais il est pourtant différent par rapport aux prix que chacun peut choisir à volonté. L'arrangement de cette loterie dépend uniquement du calcul de probabilité, et l'entrepreneur, au lieu d'en tirer un profit fixe, risque de perdre très considérablement, quoique selon le plan dont je viens de parler, il soit probable qu'il gagne une bonne partie de tout l'argent qui y aura été mis. C'est à peu près comme si je m'engageais à payer à un autre 100 écus pour un qu'il m'aurait donné, dans le cas qu'il jetterai avec trois dés, la première fois, trois *six*; il serait très possible que je perdisse à ce jeu 99 écus. Or la probabilité de gagner un écu étant 215 fois plus grande que celle de perdre 99 écus, l'avantage est de mon côté et est estimé valoir $\frac{29}{54}$ écus, ou un peu plus qu'un demi-écu. C'est à dire, si je m'engageais de cette manière envers 1000 personnes dont chacune m'aurait donné un écu, je pourrais estimer mon avantage à $537\frac{1}{27}$ écus, quoiqu'il soit possible que je perdisse 99000 écus. C'est sur ce pied qu'on pourra évaluer l'avantage de celui qui entreprendrait la loterie mentionnée, en comparant la mise de chacun avec la probabilité qu'il aura de gagner.

Description de cette loterie.

Cette loterie consiste en 90 billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à 90, desquels on se propose de tirer au hasard 5 à un temps fixé; et alors ces cinq numéros feront gagner ceux qui en auront auparavant choisi un, ou deux, ou trois, pour y attacher leurs mises. Car on peut participer à cette loterie de plusieurs manières différentes.

I. Ou on choisit à volonté un nombre qui ne surpasse point 90, et on paie aussi une somme d'argent qu'on jugera à propos. Alors quand ce nombre se rencontre parmi les cinq qui seront tirés, on retirera un prix qui sera un certain multiple de la mise.

II. Ou on choisit deux nombres à la fois, auxquels on attache une certaine mise, et en cas que tous les deux se trouvent ensuite parmi les cinq tirés, on recevra un prix assez considérable à proportion de la mise. Or si l'un d'eux seulement se trouve parmi les cinq, on reçoit aussi un prix moindre.

III. Ou on choisit trois nombres à la fois auxquels on attache à volonté une certaine mise, et l'on peut s'attendre à un prix quelques mille fois plus grand que la mise, en cas que tous les trois nombres se trouvent parmi les cinq tirés; mais les prix seront moindres, lorsque deux des nombres choisis, ou un seul s'y trouve.

Je ne me souviens plus de la grandeur des prix en détail qu'on paie en chaque cas, ce qui n'importe rien aux recherches que je me propose de faire; mais on comprend aisément qu'ils peuvent être très considérables pour le cas où trois nombres qu'on aura choisis, se rencontrent parmi les cinq tirés. Et si l'on voulait admettre des quaternaires, le prix fixé pour le cas où tous les quatre nombres se trouveraient dans les cinq billets sortis, pourrait au delà de 100000 fois surpasser la quantité de la mise.

Il est évident que ni le nombre 90 des billets, ni celui des 5 qu'on tire, n'est essentiel à la nature de cette loterie, et qu'il est absolument libre d'établir un nombre de billets quelconque, et d'en tirer enfin plus ou moins que cinq, ce qui me mène à des recherches plus générales qui peuvent servir ou à former d'autres plans de telles loteries, ou à examiner ceux qui pourront être proposés par d'autres.

Posons donc n pour le nombre de tous les billets marqués des nombres $1, 2, 3 \ldots . n$, et qu'on en tire au hasard t, et tout revient à déterminer la probabilité que d'un certain nombre de numéros qu'on aura choisis, il se trouve ou un seul, ou deux, ou trois, ou enfin tous dans les t billets qu'on va tirer. Or, selon le nombre des numéros, la détermination de la probabilité qu'on cherche, se réduit aux problèmes suivants:

1. **Problème 1.** Le nombre de tous les billets étant $= n$, dont on doit tirer au hasard t billets, trouver la probabilité qu'un nombre choisi à volonté s'y trouvera.

Solution. Il est évident, par les premières règles de la probabilité, que pour que le nombre choisi se trouve parmi les t billets qu'on va tirer, le nombre de tous les billets étant $= n$, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et pour qu'il ne s'y trouve pas, la probabilité est $= \frac{n-t}{n}$. Donc la solution fournit: que le nombre choisi

se trouve parmi les billets tirés, la probabilité est $\frac{t}{n}$

qu'il ne s'y trouve pas « « $\frac{n-t}{n}$.

2. **Corollaire 1.** Donc, si le nombre de tous les billets est 90, et qu'on en tire 5, comme dans le cas proposé au commencement,

qu'un nombre choisi	la probabilité est
se trouve parmi les 5 billets	$\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$
et qu'il ne s'y trouve point	$\frac{85}{90} = \frac{17}{18}$.

3. **Corollaire 2.** Si l'on établissait 100 billets, et qu'on en voulût tirer 10, ayant choisi un nombre à volonté, alors

que ce nombre se trouve	la probabilité est
parmi les 10 billets tirés	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
qu'il ne s'y trouve pas	$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$.

4. **Problème 2.** Le nombre de tous les billets étant $= n$ dont on va tirer t billets, si l'on a choisi deux nombres, trouver la probabilité ou que tous les deux à la fois, ou qu'un seul, ou qu'aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les deux nombres choisis, l'un par A, l'autre par B, et que A se trouve parmi les t billets tirés, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n}$. Supposons que A s'y trouve déjà, et pour voir si B s'y trouve aussi, ou non, il faut considérer que de $n-1$ billets on tire seulement $t-1$, et que B s'y trouve, la probabilité est $\frac{t-1}{n-1}$, et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n-1}$. Donc que tous les deux nombres A et B s'y trouvent à la fois, la probabilité est $= \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$, et que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est $= \frac{t(n-t)}{n(n-1)}$. La même probabilité est pour que le seul nombre B s'y trouve; donc que l'un ou l'autre s'y trouve sans distinction, la probabilité est $= \frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$. Or, qu'aucun des deux ne s'y trouve, ou que tous les deux restent parmi les $n-t$ nombres non tirés, la probabilité sera $= \frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$, d'où nous tirons les conclusions suivantes:

que de deux nombres choisis	la probabilité est
tous les deux s'y trouvent	$\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$
qu'un seul s'y trouve	$\frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$.

5. **Problème 3.** Le nombre de tous les billets étant $= n$, dont on va tirer au hasard t billets; si l'on a choisi trois nombres, déterminer la probabilité ou que tous les trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les trois nombres choisis par les lettres A, B, C, et que les deux, A et B, se trouvent parmi les billets tirés, la probabilité est $\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$, et qu'aucun ne s'y trouve, $= \frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$. Supposons que les deux nombres A et B s'y trouvent, et nous aurons encore à considérer $n-2$ billets, et à chercher la probabilité que le nombre C se trouve parmi les $t-2$ billets qui en sortiront; or, cette probabilité est évidemment $= \frac{t-2}{n-2}$, et que C n'y soit point, la probabilité est

$=\frac{n-t}{n-2}$. Donc, pour que tous les trois nombres A, B, C se trouvent parmi les billets tirés, la probabilité est $=\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$; or, que seulement A et B s'y trouvent, sans C, la probabilite est $=\frac{t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Mais il sera également probable qu'on y trouve seulement les deux A et C, ou les deux B et C; donc, pour que deux seulement, sans distinction, se trouvent dans les t billets tirés, la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Ensuite, que le nombre A s'y trouve, la probabilité est $=\frac{t}{n}$; mais que les deux autres B et C se trouvent parmi les billets restants $n-t$, le nombre de tous devant maintenant être regardé comme $n-1$, la probabilité est $=\frac{(n-t)(n-t-1)}{(n-1)(n-2)}$; donc, pour que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est $=\frac{t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$, et puisque chacun des deux autres, B et C, peut s'y trouver aussi problablement, la probabilité qu'un seul, quel qu'il soit, s'y trouve, est $=\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$. D'où nous concluons

que de trois nombres choisis	la probabilité est
tous les trois s'y trouvent . . .	$\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$
que deux seulement s'y trouvent	$\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'un seul s'y trouve	$\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

6. **Problème 4.** Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on va tirer t billets; si l'on a choisi quatre nombres, déterminer la probabilité, ou que tous les quatre, ou que trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun d'entre eux ne se trouve dans les billets tirés.

Solution. Désignons les quatre nombres choisis par les lettres A, B, C, D, et ayant déjà déterminé la probabilité que des trois nombres A, B, C, ou tous les trois, ou deux, ou un seul, ou aucun ne se trouve dans les billets tirés, nous n'avons qu'à combiner avec chacun de ces cas la probabilité que le quatrième nombre D s'y trouve aussi, ou non; ce qui nous fraiera le chemin de pousser aisément nos recherches à autant de nombres choisis qu'on voudra. Reprenons donc les formules trouvées pour trois nombres A, B, C, et joignons y la probabilité que le quatrième D s'y trouve, ou non:

que des nombres A, B, C il se trouve dans les billets tirés	la probabilité est	que le quatrième D s'y trouve	que le quatrième D ne s'y trouve pas
tous les trois	$\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-3}{n-3}$	$\frac{n-t}{n-3}$
deux seulement . . .	$\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-2}{n-3}$	$\frac{n-t-1}{n-3}$
un seul	$\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t-1}{n-3}$	$\frac{n-t-2}{n-3}$
aucun	$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\frac{t}{n-3}$	$\frac{n-t-3}{n-3}$

De là nous déduisons la probabilité:

I. que les trois A, B, C avec le quatrième D s'y trouvent

$$\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

II. que les trois A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouvent, et que deux des A, B, C avec le nombre D s'y trouvent

$$\frac{t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{3t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

donc que trois quelconques des quatre A, B, C, D s'y trouvent, la probabilité est

$$\frac{4t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

III. que deux seulement des trois A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouvent

la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

et qu'un seul des trois A, B, C avec le quatrième D s'y trouve

la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$,

donc que deux quelconques seulement des quatre nombres A, B, C, D se trouvent dans les billets tirés

la probabilité sera $=\frac{6t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$;

IV. qu'un seul des trois nombres A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouve

la probabilité est $=\frac{3t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

et que nul des trois A, B, C, mais le quatrième D seul s'y trouve

la probabilité est $=\frac{t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$,

donc qu'un seul quelconque de tous les quatre A, B, C, D, se trouve dans les billets tirés

la probabilité sera $=\frac{4t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$;

V. enfin, qu'aucun des trois A, B, C, ni le quatrième D ne se trouve dans les billets tirés

la probabilite sera $=\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)(n-t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

7. **Problème 5.** Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on va tirer t billets, si l'on a choisi autant de nombres qu'on veut, déterminer la probabilité de tous les cas possibles qui peuvent avoir lieu.

Solution. La méthode que je viens d'expliquer dans la solution du problème précédent sert à découvrir successivement les probabilités de plusieurs nombres choisis, et la loi de leur progres-

sion étant évidente, nous n'avons qu'à mettre ici devant les yeux les formules pour chaque nombre de numéros qu'on aura choisis. Mais pour abréger ces formules, puisque n marque le nombre de tous les billets, et t le nombre de ceux qu'on en va tirer, désignons par r le nombre de ceux qui restent, de sorte que $r = n - t$, ou $n = t + r$.

I. Ayant choisi un seul nombre:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouve ce nombre	$1.\frac{t}{n} = 1\,A^1$
qu'il ne s'y trouve pas . . .	$1.\frac{r}{n} = 1\,A^0$

II. Ayant choisi deux nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les deux . . .	$1.\frac{t(t-1)}{n(n-1)} = 1\,B^2$
un seul	$2.\frac{tr}{n(n-1)} = 2\,B^1$
nul	$1.\frac{r(r-1)}{n(n-1)} = 1\,B^0$

III. Ayant choisi trois nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les trois . . .	$1.\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1\,C^3$
deux seulement	$3.\frac{t(t-1)r}{n(n-1)(n-2)} = 3\,C^2$
un seul	$3.\frac{tr(r-1)}{n(n-1)(n-2)} = 3\,C^1$
nul	$1.\frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1\,C^0$

IV. Ayant choisi quatre nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les quatre . .	$1.\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1\,D^4$
trois seulement	$4.\frac{t(t-1)(t-2)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4\,D^3$
deux seulement	$6.\frac{t(t-1)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 6\,D^2$
un seul	$4.\frac{tr(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4\,D^1$
nul	$1.\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1\,D^0$

V. Ayant choisi cinq nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les cinq	$1.\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^5$
quatre seulement	$5.\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^4$
trois seulement	$10.\ \frac{t(t-1)(t-2)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^3$
deux seulement	$10.\ \frac{t(t-1)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^2$
un seul	$5.\ \frac{tr(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^1$
nul	$1.\ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^0$

VI. Ayant choisi six nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les six . . .	$1.\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 1F^6$
cinq seulement	$6.\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 6F^5$
quatre seulement	$15.\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 15F^4$
trois seulement	$20.\ \frac{t(t-1)(t-2)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 20F^3$
deux seulement	$15.\ \frac{t(t-1)r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 15F^2$
un seul	$6.\ \frac{tr(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 6F^1$
nul	$1.\ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = 1F^0$

etc.

Pour abréger, j'ai donné à chacune de ces formules une certaine marque dont je me servirai dans la suite. C'est donc de là qu'il faudra toujours tirer la signification de ces marques.

8. Corollaire 1. Il est évident, comment les valeurs des marques de chaque ordre se peuvent aisément trouver des valeurs des marques de l'ordre précédent. La manière suivante semble la plus simple:

$$B^2 = \frac{t-1}{n-1}A^1, \quad B^1 = \frac{r}{n-1}A^1, \quad B^0 = \frac{r-1}{n-1}A^0;$$

$$C^3 = \frac{t-2}{n-2}B^2, \quad C^2 = \frac{r}{n-2}B^2, \quad C^1 = \frac{r-1}{n-2}B^1, \quad C^0 = \frac{r-2}{n-2}B^0;$$

$D^4=\frac{t-3}{n-3}C^3$, $D^3=\frac{r}{n-3}C^3$, $D^2=\frac{r-1}{n-3}C^2$, $D^1=\frac{r-2}{n-3}C^1$, $D^0=\frac{r-3}{n-3}C^0$;

$E^5=\frac{t-4}{n-4}D^4$, $E^4=\frac{r}{n-4}D^4$, $E^3=\frac{r-1}{n-4}D^3$, $E^2=\frac{r-2}{n-4}D^2$, $E^1=\frac{r-3}{n-4}D^1$, $E^0=\frac{r-4}{n-4}D^0$;

$F^6=\frac{t-5}{n-5}E^5$, $F^5=\frac{r}{n-5}E^5$, $F^4=\frac{r-1}{n-5}E^4$, $F^3=\frac{r-2}{n-5}E^3$, $F^2=\frac{r-3}{n-5}E^2$, $F^1=\frac{r-4}{n-5}E^1$, $F^0=\frac{r-5}{n-5}E^0$.

etc.

9. **Corollaire 2.** Le calcul des valeurs de toutes ces marques pourra donc, dans chaque cas, aisément se faire par le calcul des logarithmes. C'est à cette fin, que j'ai séparé de chaque marque son coefficient numérique dont on tiendra facilement compte, après avoir trouvé la valeur de la marque.

10. **Corollaire 3.** Il faut donc bien prendre garde qu'on ne prenne point ces marques pour des puissances, puisque les nombres, qui tiennent lieu des exposants, ne sont pas de vrais exposants de puissances, mais ils marquent seulement le nombre des numéros dont il est probable qu'ils se trouvent, en chaque cas, parmi les billets tirés.

11. **Corollaire 4.** Puisque les probabilités, prises ensemble, de tous les cas possibles de chaque ordre, doivent donner une certitude complète, leur somme sera toujours égale à l'unité. Ainsi l'on aura:

$$1A^1+1A^0=1$$
$$1B^2+2B^1+1B^0=1$$
$$1C^3+3C^2+3C^1+1C^0=1$$
$$1D^4+4D^3+6D^2+4D^1+1D^0=1$$
etc.

12. **Problème 2.** Ayant établi une telle loterie de n billets, dont on va tirer t billets, déterminer les prix, conformément à la loi d'égalité, qu'on est obligé de payer aux participants dans chaque cas, par rapport à leur mise.

Solution. Puisque le prix est toujours proportionné à la mise, supposons la mise toujours d'un écu, de sorte que, pour chaque écu que le participant aura payé, il en retirera les prix que nous allons déterminer conformément aux règles de l'égalité. Pour cet effet, il faut considérer séparément les cas où le participant aura choisi un, ou deux, ou trois, ou quatre, etc. nombres, ce qui nous mène aux recherches suivantes:

I. Si le participant n'a choisi qu'un nombre, et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soit le prix
ce nombre se trouve	$1A^1$	a
qu'il ne s'y trouve pas	$1A^0$	0

La probabilité est donc A^1 qu'il retire a, et A^0 qu'il ne retire rien, d'où son avantage est $=A^1a$, qui selon les règles de l'égalité, lui doit valoir autant que sa mise 1. Il faut donc qu'il soit $A^1a=1$, et partant le prix doit être $a=\frac{1}{A^1}$.

II. Si le participant a choisi deux nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les deux	$1B^2$	a
un seul	$2B^1$	b
nul	$1B^0$	0

L'avantage du participant sera donc $1B^2a + 2B^1b$ qui doit être égalé à la mise 1, de sorte que nous ayons $1B^2a + 2B^1b = 1$, d'où l'on peut déterminer les deux prix a et b par une infinité de manières différentes, car, quelque valeur qu'on prenne pour l'un, on trouvera celle de l'autre. Mais, puisqu'il faut éviter les cas où l'un s'évanouirait, ou deviendrait même négatif, on remplira cette condition le plus commodément en partageant l'unité en deux parties α et β, de sorte qu'il soit $\alpha + \beta = 1$, et alors on aura les prix en général: $a = \frac{\alpha}{1B^2}$ et $b = \frac{\beta}{2B^1}$.

III. Si le participant a choisi trois nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les trois	$1C^3$	a
deux seulement	$3C^2$	b
un seul	$3C^1$	c
nul	$1C^0$	0

L'avantage du participant étant donc $1C^3a + 3C^2b + 3C^1c$, il faut qu'il soit équivalent à la mise 1. Pour cet effet, partageons la mise 1 à volonté en trois parties α, β, γ, de sorte qu'il y ait $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et de là nous aurons, en général, les déterminations suivantes des prix

$$a = \frac{\alpha}{1C^3}, \quad b = \frac{\beta}{3C^2}, \quad c = \frac{\gamma}{3C^1},$$

d'où l'on voit que ces trois prix peuvent être variés à l'infini.

IV. Si le participant a choisi quatre nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les quatre	$1D^4$	a
trois seulement	$4D^3$	b
deux seulement	$6D^2$	c
un seul	$4D^1$	d
nul	$1D^0$	0

Partageons maintenant l'unité en quatre parties égales ou inégales, comme on jugera à propos, ou posons $1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, et les valeurs des prix seront

$$a = \frac{\alpha}{1D^4}, \quad b = \frac{\beta}{4D^3}, \quad c = \frac{\gamma}{6D^2}, \quad d = \frac{\delta}{4D^1}.$$

V. Si le participant a choisi cinq nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les cinq	$1E^5$	a
quatre seulement . . .	$5E^4$	b
trois seulement	$10E^3$	c
deux seulement	$10E^2$	d
un seul	$5E^1$	e
nul	$1E^0$	0

Qu'on partage à volonté l'unité en cinq parties, de sorte qu'il soit $1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, et l'on aura, en général, la juste détermination de ces prix

$$a = \frac{\alpha}{1E^5}, \quad b = \frac{\beta}{5E^4}, \quad c = \frac{\gamma}{10E^3}, \quad d = \frac{\delta}{10E^2}, \quad e = \frac{\varepsilon}{5E^1}.$$

Cette détermination est si aisée, qu'il serait superflu d'aller plus loin, et il n'est pas probable qu'on fasse jamais usage de plus de 5 nombres, à cause des prix trop exorbitants qu'on devrait accorder.

13. **Corollaire 1.** Ce n'est donc que dans le premier cas que le prix est déterminé $a = \frac{1}{A^1}$; dans les autres cas, on peut d'autant plus varier les prix, que le nombre des billets choisis est grand. Cela dépend de la division de l'unité en autant de parties qu'il y a de prix en chaque cas.

14. **Corollaire 2.** La première manière de diviser l'unité est celle qui prend des parties égales, et alors on a

pour le second cas $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

pour le troisième $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$

pour le quatrième $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{4}$

pour le cinquième $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \frac{1}{5}$

d'où l'on tirera des prix déterminés pour chaque cas.

15. **Corollaire 3.** Si l'on juge que, de cette façon, les hauts prix des cas supérieurs deviennent trop grands, les coefficiens numériques nous fournissent une telle manière de diviser, qui en rendant les formules plus simples, semble produire une espèce d'égalité. On pourrait prendre

pour le II cas: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$

III cas: $\alpha = \frac{1}{7}$, $\beta = \frac{3}{7}$, $\gamma = \frac{3}{7}$

IV cas: $\alpha = \frac{1}{15}$, $\beta = \frac{4}{15}$, $\gamma = \frac{6}{15}$, $\delta = \frac{4}{15}$

V cas: $\alpha = \frac{1}{31}$, $\beta = \frac{5}{31}$, $\gamma = \frac{10}{31}$, $\delta = \frac{10}{31}$, $\varepsilon = \frac{5}{31}$.

16. **Corollaire 4.** Si l'on voulait diminuer d'avantage les hauts prix pour rendre plus considérables les autres, on pourrait se servir des divisions suivantes:

II cas: $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$.

III cas: $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = \frac{6}{16}$, $\gamma = \frac{9}{16}$

IV cas: $\alpha = \frac{1}{43}$, $\beta = \frac{8}{43}$, $\gamma = \frac{18}{43}$, $\delta = \frac{16}{43}$

V cas: $\alpha = \frac{1}{106}$, $\beta = \frac{10}{106}$, $\gamma = \frac{30}{106}$, $\delta = \frac{40}{106}$, $\varepsilon = \frac{25}{106}$.

17. **Scholie.** Représentons à la fois les prix que fourniront ces trois manières différentes de partager l'unité en chaque cas:

Ayant choisi	En cas que dans les billets tirés se trouvent	Les prix d'après la I manière	II manière	III manière
un nombre	le nombre	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$
	ou non	0	0	0
deux nombres	tous les deux	$\frac{1}{2B^2}$	$\frac{1}{3B^2}$	$\frac{1}{5B^2}$
	un seul	$\frac{1}{4B^1}$	$\frac{1}{8B^1}$	$\frac{2}{5B^1}$
	nul	0	0	0
trois nombres	tous les trois	$\frac{1}{3C^3}$	$\frac{1}{7C^3}$	$\frac{1}{16C^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{9C^2}$	$\frac{1}{7C^2}$	$\frac{2}{16C^2}$
	un seul	$\frac{1}{9C^1}$	$\frac{1}{7C^1}$	$\frac{3}{16C^1}$
	nul	0	0	0
quatre nombres	tous les quatre	$\frac{1}{4D^4}$	$\frac{1}{15D^4}$	$\frac{1}{43D^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{16D^3}$	$\frac{1}{15D^3}$	$\frac{2}{43D^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{24D^2}$	$\frac{1}{15D^2}$	$\frac{3}{43D^2}$
	un seul	$\frac{1}{16D^1}$	$\frac{1}{15D^1}$	$\frac{4}{43D^1}$
	nul	0	0	0
cinq nombres	tous les cinq	$\frac{1}{5E^5}$	$\frac{1}{31E^5}$	$\frac{1}{106E^5}$
	quatre seulement	$\frac{1}{25E^4}$	$\frac{1}{31E^4}$	$\frac{2}{106E^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{50E^3}$	$\frac{1}{31E^3}$	$\frac{3}{106E^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{50E^2}$	$\frac{1}{31E^2}$	$\frac{4}{106E^2}$
	un seul	$\frac{1}{25E^1}$	$\frac{1}{31E^1}$	$\frac{5}{106E^1}$
	nul	0	0	0

18. **Problème 7.** Ayant fixé les prix d'une telle loterie selon la loi de l'égalité, trouver la diminution de ces prix, afin que l'entrepreneur en retire un profit prescrit.

Solution. Par rapport aux frais que l'établissement d'une telle loterie exige, il faut rabattre quelque chose des prix que la loi de l'égalité a fournis, comme cela se pratique dans les loteries ordinaires. Outre cela, une telle loterie ne saurait être permise que pour des besoins importants, et à cet égard la diminution des prix doit être plus considérable. Mais, puisque le profit n'est pas certain, comme dans les autres loteries, et qu'il pourrait arriver que l'entrepreneur, malgré toute la probabilité, y perdît très considérablement, il est bien juste que le rabais des prix soit plus grand qu'à l'ordinaire où l'on se contente de 10 pour cent. Cependant, comme ce ne sont que les grands prix qui pourraient ruiner l'entrepreneur, il est raisonnable qu'on augmente le rabais seulement dans ceux-ci, et qu'on laisse celui des petits prix à dix pour-cent. Un plus grand rabais dans les petits prix sauterait aussi trop aux yeux, et dégoûterait les participants, au lieu que, dans les grands prix, on ne s'aperçoit presque point de la diminution, vu que peu de personnes sont en état d'en calculer la juste valeur. Or pour procurer à la caisse un profit de 10 pour-cent sur les moindres prix, on n'a qu'à les multiplier par $\frac{9}{10}$: ce seraient donc les prix de chaque cas qui répondent à un seul nombre. Pour les prix qui répondent à deux nombres, on pourrait bien les multiplier par $\frac{8}{10}$, ce qui produirait un profit de 20 pour-cent, sans qu'on s'en aperçoive aisément. Et lorsque trois nombres se rencontrent dans les billets tirés, on pourrait, avec autant de raison, multiplier les prix par $\frac{7}{10}$, et ceux qui conviennent à quatre nombres par $\frac{6}{10}$, et enfin celui qui convient à cinq nombres par $\frac{5}{10}$, ce qui est équivalent à un profit de 50 pour-cent. Mais, en chaque cas, on pourra régler la diminution des prix comme on jugera le plus à propos, et on aura principalement en vue d'arrondir les nombres autant qu'il sera possible. Ayant donc fait le plan sur les prix conformes à la loi de l'égalité, il sera aisé d'y appliquer les diminutions les plus convenables qui remplissent le mieux les conditions qu'on aura en vue.

19. **Problème 8.** Le nombre de tous les billets étant 90 dont on doit tirer en son temps 5, dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.

Solution. Ici est renfermée la loterie projetée autrefois et dont j'ai parlé au commencement. Nous verrons bientôt quels prix elle pouvait promettre, en assignant ceux que la loi d'égalité exige. Or, pour appliquer à ce cas nos formules générales, nous avons $n=90$, $t=5$, et partant $r=85$, d'où nous tirons d'abord $A^1=\frac{1}{18}$ et $A^0=\frac{17}{18}$, et ces deux valeurs nous mènent à celles de toutes les marques suivantes. Mais, puisque nous avons besoin de ces valeurs renversées, je m'en vais les exprimer en sorte, de même que leurs logarithmes, pour en faciliter ensuite le calcul:

$-lA^0=0,0248236$	$1:A^0=\ \ 1,0588$
$-lA^1=1,2552725$	$1:A^1=\ 18,0000$
$-lB^0=0,0499343$	$1:B^0=\ \ 1,1218$
$-lB^1=1,2752436$	$1:B^1=\ 18,8470$
$-lB^2=2,6026025$	$1:B^2=400,5000$

$-lC^0 = 0{,}0753389$	$1:C^0 = 1{,}1894$
$-lC^1 = 1{,}2954470$	$1:C^1 = 19{,}7445$
$-lC^2 = 2{,}6176663$	$1:C^2 = 414{,}6354$
$-lC^3 = 4{,}0699659$	$1:C^3 = 11748{,}054$
$-lD^0 = 0{,}1010443$	$1:D^0 = 1{,}262$
$-lD^1 = 1{,}3158882$	$1:D^1 = 20{,}695$
$-lD^2 = 2{,}6329063$	$1:D^2 = 429{,}44$
$-lD^3 = 4{,}0800649$	$1:D^3 = 12024{,}5$
$-lD^4 = 5{,}7084532$	$1:D^4 = 511038$
$-lE^0 = 0{,}1270578$	$1:E^0 = 1{,}340$
$-lE^1 = 1{,}3365728$	$1:E^1 = 21{,}705$
$-lE^2 = 2{,}6483267$	$1:E^2 = 444{,}96$
$-lE^3 = 4{,}0902841$	$1:E^3 = 12310{,}5$
$-lE^4 = 5{,}7135334$	$1:E^4 = 517051$
$-lE^5 = 7{,}6429517$	$1:E^5 = 43949268$

Voilà donc le plan de cette loterie selon les trois manières différentes:

		I manière	II manière	III manière
I cas	1	18	18	18
II cas	2	200,25	133,5	80,1
	1	4,712	6,282	7,539
III cas	3	3916,02	1678,29	734,25
	2	46,071	59,234	51,830
	1	2,1938	2,8206	3,7021
IV cas	4	127759,5	34069,2	11844,6
	3	751,53	801,63	559,28
	2	17,893	28,629	29,961
	1	1,2934	1,3791	1,9251
V cas	5	8789853,6	1417718,3	414615,7
	4	20682,04	16679,06	9755,68
	3	246,210	397,113	348,410
	2	8,899	14,353	16,791
	1	0,8682	0,7001	1,0238

A présent il est aisé de diminuer ces prix à proportion du profit qu'on veut procurer à l'entrepreneur.

20. **Corollaire 1.** Puisque ces trois manières sont également conformes à la loi de l'égalité, rien n'empêche qu'on ne mette en usage toutes les trois à la fois, et qu'on n'accorde aux partici-

pants la liberté de soumettre leur mise à celle qui leur plaira le mieux. Ainsi ceux qui choisiront deux ou plusieurs nombres, seront les maîtres de se déterminer ou pour la première manière, ou pour la seconde, ou pour la troisième.

21. Corollaire 2. Cependant, il sera de l'intérêt de l'entrepreneur, d'exclure entièrement la première manière, pour le cas où l'on choisit cinq nombres. Car, en cas qu'on attrapperait précisément tous les cinq nombres qui seront tirés dans les cinq billets, le prix de presque 9 millions fût-il diminué jusqu'à la moitié, pourrait ruiner la banque.

Scholie. Or en diminuant ces prix selon les règles expliquées ci-dessus et en arrondissant les nombres, on pourra former le plan suivant qui doit probablement apporter à l'entrepreneur un profit très considérable, sans qu'il paraisse désavantageux aux intéressés.

Plan d'une telle loterie à 90 billets dont on doit tirer 5.

Ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants:		
		écus	écus	écus
1 nombre	ce nombre	16	16	16
2 nombres	tous les deux	160	106	64
	un seul	4	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
3 nombres	tous les trois	2741	1174	513
	2 seulement	36	47	41
	un seul	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
4 nombres	tous les quatre	76655	20441	7130
	3 seulement	526	561	391
	2 seulement	14	$22\frac{1}{2}$	24
	un seul	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
5 nombres	tous les cinq	4394925	708859	207305
	4 seulement	12409	10007	5853
	3 seulement	172	278	243
	2 seulement	7	$11\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

On pourrait encore mieux arrondir ces nombres et augmenter, par ce moyen, insensiblement d'avantage le profit de l'entreprise.

23. Problème 9. Le nombre de tous les billets étant 100, dont on doit tirer en son temps 9, dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.

Solution. Le nombre des billets qu'on doit tirer, étant ici plus grand qu'auparavant, les prix pour le cas de 5 nombres choisis ne deviendront plus si exorbitants que dans le plan précédent, ce qui rendra l'exécution moins dangereuse.

Ayant donc ici $n = 100$, $t = 9$ et partant $r = 91$, nous avons d'abord $A^1 = \frac{9}{100}$ et $A^0 = \frac{91}{100}$, d'où nout tirerons les valeurs des marques suivantes.

$$-lA^0 = 0{,}0409586 \qquad 1:A^0 = 1{,}0989$$
$$-lA^1 = 1{,}0457575 \qquad 1:A^1 = 11{,}1111$$

$$-lB^0 = 0{,}0823513 \qquad 1:B^0 = 1{,}2087$$
$$-lB^1 = 1{,}0823513 \qquad 1:B^1 = 12{,}0879$$
$$-lB^2 = 2{,}1383027 \qquad 1:B^2 = 137{,}50$$

$$-lC^0 = 0{,}1241874 \qquad 1:C^0 = 1{,}3340$$
$$-lC^1 = 1{,}1193349 \qquad 1:C^1 = 13{,}1624$$
$$-lC^2 = 2{,}1704874 \qquad 1:C^2 = 148{,}077$$
$$-lC^3 = 3{,}2844308 \qquad 1:C^3 = 1925{,}0$$

$$-lD^0 = 0{,}1664764 \qquad 1:D^0 = 1{,}4671$$
$$-lD^1 = 1{,}1567166 \qquad 1:D^1 = 14{,}3455$$
$$-lD^2 = 2{,}2030166 \qquad 1:D^2 = 159{,}594$$
$$-lD^3 = 3{,}3121611 \qquad 1:D^3 = 2051{,}92$$
$$-lD^4 = 4{,}4930512 \qquad 1:D^4 = 31120{,}833$$

$$-lE^0 = 0{,}2092283 \qquad 1:E^0 = 1{,}6189$$
$$-lE^1 = 1{,}1945051 \qquad 1:E^1 = 15{,}6497$$
$$-lE^2 = 2{,}2358978 \qquad 1:E^2 = 172{,}146$$
$$-lE^3 = 3{,}3401898 \qquad 1:E^3 = 2188{,}72$$
$$-lE^4 = 4{,}5162810 \qquad 1:E^4 = 32830{,}8$$
$$-lE^5 = 5{,}7763524 \qquad 1:E^5 = 597520$$

De ces valeurs on formera, selon les trois manières, le plan suivant:

Cas	sortent	I manière	II manière	III manière
I	1	11,111	11,111	11,111
II	2	68,75	45,88	27,50
	1	3,022	4,029	4,835
III	3	641,66	275,00	120,3125
	2	16,453	21,154	18,509
	1	1,462	1,880	2,468
IV	4	7780,208	2074,722	723,740
	3	128,240	136,795	95,439
	2	6,649	10,639	11,134
	1	0,8966	0,9564	1,3344
V	5	119504,	19274,84	5636,981
	4	1313,232	1059,06	619,450
	3	43,774	70,604	61,945
	2	3,443	5,553	6,496
	1	0,626	0,505	0,738

24. **Corollaire 1.** Pourvu qu'une telle loterie ne soit tirée jusqu'à ce que le fonds ne se soit accru au delà de quelques centaines de milliers d'écus, l'entrepreneur ne risque pas trop de se ruiner, vu que les plus hauts prix, après être diminués, ne monteront pas à 100000 écus, supposé que la mise ne surpasse pas un écu.

25. **Corollaire 2.** Mais en cas qu'on voudrait former une telle loterie en petit, et que le fonds entier ne monterait pas à 100000 écus, on devrait bien retrancher la première manière du cas de cinq billets choisis.

26. **Corollaire 3.** Il faut aussi remarquer que de telles loteries doivent être tirées à plusieurs reprises, afin que si une avait trop favorisé les participants, les autres puissent dédommager l'entrepreneur. Or chaque fois on peut tirer la loterie, aussitôt que le fonds surpasse une certaine somme proportionnée aux prix qu'on veut admettre.

27. **Scholie 1.** Diminuons ces prix suivant les règles données ci-dessus, et nous obtiendrons ce

Plan d'une telle loterie à 100 *billets dont on doit tirer* 9.

ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants			
		écus	écus	écus	en général
1 nombre	ce nombre	10	10	10	a
2 nombres	tous les deux	55	36	22	b
	un seul	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{3}$	c
3 nombres	tous les trois	449	192	84	d
	2 seulement	13	17	15	e
	un seul	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{3}$	2	f
4 nombres	tous les quatre	4668	1245	434	g
	3 seulement	90	96	$66\frac{2}{3}$	h
	2 seulement	$5\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{2}$	9	i
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	k
5 nombres	tous les cinq	59752	9637	$2818\frac{1}{2}$	l
	4 seulement	788	635	$371\frac{2}{3}$	m
	3 seulement	$30\frac{1}{2}$	49	$43\frac{1}{3}$	n
	2 seulement	$2\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{4}$	5	p
	un seul	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	q

28. **Scholie 2.** Outre ces trois manières, on peut faire pour chaque cas, une infinité d'autres répartitions des prix que nous avons marqués en général dans ce plan, à côté, par les lettres a, b, c, d, etc. Si l'on veut que ces prix soient déjà diminués dans la même raison que nous avons diminué les autres, il faut les déterminer par les équations suivantes:

I. $\frac{10}{9}a.A^1 = 1$, ou $0{,}1a = 1$;

II. $\frac{10}{8}b.B^2 + \frac{10}{9}c.2B^1 = 1$, ou $0{,}0090909\,b + 0{,}1838383\,c = 1$;

III. $\frac{10}{7}d.C^3 + \frac{10}{8}e.3C^2 + \frac{10}{9}f.3C^1 = 1$, ou $0{,}000742115\,d + 0{,}02532467\,e + 0{,}2532467\,f = 1$;

IV. $\frac{10}{6}g.D^4 + \frac{10}{7}h.4D^3 + \frac{10}{8}i.6D^2 + \frac{10}{9}k.4D^1 = 1$, ou

$0{,}0000535547\,g + 0{,}002784845\,h + 0{,}04699425\,i + 0{,}3098139\,k = 1$.

V. $\frac{10}{5}l.E^5 + \frac{10}{6}m.5E^4 + \frac{10}{7}n.10E^3 + \frac{10}{8}p.10E^2 + \frac{10}{9}q.5E^1 = 1$, ou

$0{,}0000033471168\,l + 0{,}000253827\,m + 0{,}00652698\,n + 0{,}07261263\,p + 0{,}3549952\,q = 1$.

De ces formules on pourra tirer les prix suivants qui semblent commodes pour la pratique

$$a = 10$$
$$b = 50, \quad c = 3$$
$$d = 200, \quad e = 20, \quad f = 1$$
$$g = 1000, \quad h = 100, \quad i = 10, \quad k = \tfrac{2}{3}$$
$$l = 5000, \quad m = 500, \quad n = 50, \quad p = 5, \quad q = \tfrac{1}{2}.$$

Par un tel plan la banque ne risquerait pas tant que suivant la première ou la seconde manière.

XVII.

Analyse d'un problème du calcul des probabilités.

Il y a, dans une urne, quatre billets a, b, c, d, dont on tire un au hasard, et après l'avoir remis dans l'urne, on en tire un de nouveau, et cela à n reprises: on demande la probabilité que le billet a ne sera jamais tiré, ou qu'il ne sera tiré qu'une seule fois, ou deux fois etc. ou enfin, qu'il sorte à chacun des n tirages.

1. Le billet donné ne sortira point au premier tirage: *probabilité* . . . $\frac{3}{4}$

ni au second « « . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

ni au troisième « « . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

etc.

il ne sortira point du tout . . . . . $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2. Il ne sortira qu'une fois sur les n tirages . . . . $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.n$.

3. deux fois « « . . . . $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.\frac{n(n-1)}{1.2}$.

4. Il sortira à chacun des n tirages . . . . $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Si des quatre billets a, b, c, d, on en tire *deux* chaque fois, à n reprises différentes,

1. le billet donné a ne s'y trouvera jamais: *probabilité* . . . . $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

2. il s'y trouvera une fois « . . . . . . $n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Le nombre des billets a, b, c, etc. étant $= N$; qu'on en tire m billets à la fois et qu'on répète cette opération n fois:

1. le billet donné a ne se trouvera jamais parmi les billets tirés:

probabilité $\left(1-\frac{m}{N}\right)^n$,

2. il s'y rencontrera une fois « $n.\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-1}$,

3. « deux fois « $\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{m}{N}\right)^2\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-2}$,

4. « à chaque tirage « $\left(\frac{m}{N}\right)^n$.

Exemple. Le nombre des billets étant 50000 dont on tire à chaque reprise 8000, et cela cinq fois de suite. Il y aura donc

$$N = 50000, \quad m = 8000, \quad n = 5.$$

1.	Le billet donné a ne sortira point du tout.	*Probabilité:*	$\left(\frac{21}{25}\right)^5 = 0{,}4182120,$
2.	il se rencontrera dans un seul des cinq tirages	«	$5 \cdot \frac{4}{25}\left(\frac{21}{25}\right)^4 = 0{,}3982950,$
3.	« deux tirages	«	$10\left(\frac{4}{25}\right)^2\left(\frac{21}{25}\right)^3 = 0{,}151730,$
4.	« trois tirages	«	$10\left(\frac{4}{25}\right)^3\left(\frac{21}{25}\right)^2 = 0{,}028906,$
5.	« quatre tirages	«	$5\left(\frac{4}{25}\right)^4\left(\frac{21}{25}\right) = 0{,}002752,$
6.	« dans tous les cinq tirages	«	$\left(\frac{4}{25}\right)^5 = 0{,}000105,$

Le nombre des tirages, n, étant le même, on demande la probabilité que deux billets a et b ne se rencontrent jamais ensemble si, de N billets, on tire chaque fois $N - m$.

1.	Au premier tirage, a n'est pas au nombre des $N - m$ billets tirés.	*Probabilité:*	$\frac{m}{N}$,
	b n'y est pas non plus	«	$\frac{m(m-1)}{N(N-1)} = v,$
2.	les deux manquent au second tirage	«	$v^2,$
3.	« au troisième	«	$v^3,$
4.	« à tous les tirages	«	$v^n.$

On demande la probabilité que λ billets donnés ne se rencontrent dans aucun des n tirages. On n'a qu'à poser

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\lambda+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-\lambda+1)} = v$$

et la probabilité cherchée sera $= v^n$.

Dans l'exemple précédent on aurait $N = 50000$, $N - m = 8000$, $m = 42000$ et $n = 5$.

Si de 10 billets qui se trouvent dans une urne, on en tire 2, il en restera 8. Quand, après les avoir remis, on répète l'opération encore une fois, il est certain que six billets au moins ne seront pas tirés; mais il est possible que le nombre des non-tirés soit même 8. Il s'agit d'énumérer les cas, où 6, 7 et 8 billets seront restés intacts.

Il y en aura six. Supposons qu'au premier tirage soient sortis les numéros 1 et 2. Au second tour, les deux numéros doivent être de 3 à 10, donc la probabilité est $\frac{8.7}{10.9}$.

Il y en aura sept, lorsque 1 ou 2 sort de nouveau au second tirage, c'est à dire qu'on ait au second tirage

1, 3, ou 1, 4, ou 1, 5, etc. huit chances favorables
ou bien 2, 3, ou 2, 4, ou 2, 5, etc. autant de chances.

Or le nombre de tous les cas possibles étant $= \frac{10.9}{1.2}$, la probabilité sera $= 2 \cdot \frac{2.8}{10.9}$.

Il y en aura huit si, au second tour, sortent les mêmes numéros 1 et 2, qu'au premier: seule chance favorable dont la probabilité est $\frac{2.1}{10.9}$.

Donc, pour que le nombre des billets restés intacts soit 6, ou 7, ou 8

la probabilité respective sera $\frac{8.7}{10.9}$, $2.\frac{8.2}{10.9}$, $\frac{1.2}{10.9}$.

Quand on tire trois fois de suite, il y aura ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8 billets de non-tirés.

I. Que le nombre des non-tirés soit 8. Au premier tirage étant sortis les numéros 1 et 2, il faut que ces mêmes numéros sortent au second et au troisième tirage; la probabilité de la première de ces chances étant $\frac{1.2}{10.9}$, et celle des deux chances $\left(\frac{1.2}{10.9}\right)^2$.

II. Pour que le nombre des non-tirés soit 4, il faut qu'au second tirage il sorte deux billets différents des numéros 1 et 2, ce qui donne pour mesure de la probabilité $\frac{8.7}{10.9}$; et pour qu'au troisième tour il en vienne encore deux billets autres, que les quatre déjà tirés, la probabilité sera $=\frac{8.7}{10.9}\cdot\frac{6.5}{10.9}$.

III. Pour que le nombre des non-tirés soit 7, il faut considérer les quatre cas suivants:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ab*	*ac*	*ac*	*ac*
troisième «	*ac*	*ab*	*bc*	*ac*

la probabilité de chaque cas particulier est $2\cdot\frac{8.2.1.2}{10.9.10.9}$,

donc la probabilité totale est . . . . . $8\cdot\frac{8.2.1.2}{10.9.10.9}$.

IV. Pour que le nombre des non-tirés soit 6, il faut considérer les 7 cas suivants:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ab*	*cd*	*cd*	*ac*	*ac*	*cd*	*ac*
troisième «	*cd*	*ab*	*cd*	*ad*	*cd*	*ac*	*bd*

dont les probabilités respectives seront

$\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $\frac{8.7.2.1}{10.9.10.9}$, $2.\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2.\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2.\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$, $2.\frac{8.7.2.2}{10.9.10.9}$

et par conséquent, la probabilité totale sera

$$\frac{8.7.38}{10.9.10.9}.$$

V. Soit le nombre des non-tirés 5, les trois cas à considérer sont:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*
second «	*ac*	*cd*	*cd*
troisième «	*de*	*ae*	*de*

la probabilité de chacun de ces cas est $2.\frac{8.7.6.2}{10.9.10.9}$

et, par conséquent, la probabilité totale $6.\frac{8.7.6.2}{10.9.10.9}$.

En résumant tous ces cas, nous obtenons le tableau suivant:

Nombre des billets non-tirés	probabilité
4	$\frac{8.7.6.5}{(10.9)^2}$
5	$6.\frac{8.7.6.2}{(10.9)^2}$
6	$\frac{8.7.38}{(10.9)^2}$
7	$8.\frac{8.2.1.2}{(10.9)^2}$
8	$\frac{1.2.1.2}{(10.9)^2}$.

Si au lieu de 10 billets, il y en a n, dont on tire deux, à chaque reprise, on aura:

I. En tirant deux fois.

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1.2}{n(n-1)}$
$n-3$	$2.\frac{(n-2)2}{n(n-1)}$
$n-4$	$\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$.

Considérons maintenant les numérateurs de ces différents cas, et en posant, pour plus de simplicité, $n-2=m$, ils seront 2, $4m$ et $m(m-1)$; leur somme nous donne la valeur m^2+3m+2 et par conséquent, l'équation $A+Bm+m(m-1)=m^2+3m+2$, qui doit subsister pour toutes les valeurs de m, nous fournit les valeurs des coefficients A et B.

II. En tirant trois fois, on aura:

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1.2.1.2}{n^2(n-1)^2}$
$n-3$	$8.\frac{(n-2).2.1.2}{n^2(n-1)^2}$
$n-4$	$8.\frac{(n-2).2.(n-3).2+3.1.2.(n-2)(n-3)}{n^2(n-1)^2}$
$n-5$	$6.\frac{(n-2)(n-3)(n-4).2}{n^2(n-1)^2}$
$n-6$	$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^2(n-1)^2}$.

En posant de nouveau $n-2=m$, les numérateurs de ces différents cas seront

$$4,\quad 32m,\quad 38m(m-1),\quad 12m(m-1)(m-2)\quad \text{et}\quad m(m-1)(m-2)(m-3)$$

dont la somme nous donne la valeur $(m^2+3m+2)^2$ et, par conséquent, l'équation pour déterminer les coëfficients 4, 32, 38 et 12 sera

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)+m(m-1)(m-2)(m-3)=(m^2+3m+2)^2.$$

Conclusion.

Ainsi on peut conclure que, si le nombre des billets est n, dont on tire deux, à chaque reprise, le nombre des tirages étant $p+1$, on aura:

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{A}{n^p(n-1)^p}$
$n-3$	$\frac{B(n-2)}{n^p(n-1)^p}$
$n-4$	$\frac{C(n-2)(n-3)}{n^p(n-1)^p}$
$n-5$	$\frac{D(n-2)(n-3)(n-4)}{n^p(n-1)^p}$
etc.	etc.

et les coefficients A, B, C, D, etc. seront donnés par l'équation

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)m-2)+\ldots m(m-1)(m-2)\ldots(m-2p-1)=(m^2+3m+2)^p$$

qui est indépendante de $m=n-2$.

Ainsi en tirant quatre fois par deux, on trouve

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{8}{n^3(n-1)^3}$
$n-3$	$\frac{208(n-2)}{n^3(n-1)^3}$
$n-4$	$\frac{652(n-2)(n-3)}{n^3(n-1)^3}$
$n-5$	$\frac{576(n-2)(n-3)(n-4)}{n^3(n-1)^3}$
$n-6$	$\frac{188(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^3(n-1)^3}$
$n-7$	$\frac{24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{n^3(n-1)^3}$
$n-8$	$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n^3(n-1)^3}$.

Si on a n billets, dont on tire trois à chaque reprise, en tirant deux fois de suite, on aura

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-3$	$\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}$
$n-4$	$\frac{2.3.3.(n-3)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-5$	$9.\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-6$	$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$

En considérant les numérateurs, leur somme $6+18m+9m(m-1)+m(m-1)(m-2)$ se présentera sous la forme $(m+1)(m+2)(m+3)$, ici $m=n-3$ et par conséquent, l'équation identique, qui sert à déterminer les coefficients 6, 18 et 9 sera

$$A+Bm+Cm(m-1)+m(m-1)(m-2)=(m+1)(m+2)(m+3).$$

En tirant trois fois de suite, l'équation identique, pour déterminer les coefficients, sera de même

$$A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + Em(m-1)(m-2)(m-3) +$$
$$Fm(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) = \{(m+1)(m+2)(m+3)\}^2$$

et ainsi de suite.

Règle générale.

Toutes ces recherches nous conduisent à la règle suivante.

Si on a n billets, dont on tire p à chaque reprise, et cela q fois de suite, on demande les probabilités des différents nombres des billets non-sortants.

A cet effet, on commence par chercher les coefficients A, B, C, etc. de l'équation identique.

$$A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + \ldots \{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p(q-1)+1)\} =$$
$$\{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+p)\}^{q-1}$$

alors les numérateurs des probabilités respectives seront

$$A,\quad Bm,\quad Cm(m-1),\quad Dm(m-1)(m-2)\ldots\ldots m(m-1)(m-2)\ldots(m-p(q-1)+1)$$

m étant $= n - p$, et le dénominateur étant pour toutes le même

$$n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots\ldots(n-p+1)^{q-1}.$$

Voici le tableau:

Nombre des billets non-sortants	probabilités
$n-p$	$\dfrac{A}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-1$	$\dfrac{B(n-p)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-2$	$\dfrac{C(n-p)(n-p-1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-3$	$\dfrac{D(n-p)(n-p-1)(n-p-2)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}}$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$n-pq$	$\dfrac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-pq+1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots\ldots(n-p+1)^{q-1}}$

XVIII.

Institutionum Calculi differentialis Sectio III.

(Conf. Inst. C. D. Part. II. Cap. XI. §§ 282. 283. 286.)

Caput I.

De calculo differentiali ad lineas curvas applicato in genere.

1. Quanquam in libro praecedente jam insignis Calculi differentialis usus in ipsa analysi est ostensus, tamen ejus vis maxime perspicietur in doctrina de lineis curvis, quae post hujus calculi inventionem tanta accepit incrementa, ut quae antehac fuerunt detecta prae his fere penitus evanescant. Equidem in Introductione ad Analysin infinitorum plurimas linearum curvarum proprietates, quae vulgo calculi differentialis ope erui solent, per sola analysis finitorum praecepta invenire docui; verum et ibi quaedam non obscura calculi infinitorum vestigia latent, atque illa investigatio ita est comparata, ut nisi prius eadem alia methodo fuissent cognita, vix unquam reperiri potuisse videantur. Quin etiam in illo libro id mihi praecipue erat propositum, ut, cum quae vulgo per analysin infinitorum praestari solent, eadem sine hoc subsidio explicavissem, summus consensus universae analysis eo luculentius ob oculos ponatur.

2. Cum igitur principia calculi differentialis ex differentiis finitis functionum derivaverim, ex eodem fonte applicatio hujus calculi ad doctrinam de lineis curvis petenda videtur. Quae enim de functionibus sunt tradita, ea in lineis curvis amplissimum locum inveniunt. Nam etsi, sumta quapiam linea, puta abscissa, pro quantitate variabili, natura lineae curvae per indolem unius functionis, puta applicatae, determinatur; tamen in eadem linea curva innumerabiles aliae functiones concipi possunt. Quaelibet scilicet linea per curvam determinata, quae variata abscissa simul vel crescit vel decrescit, tanquam functio abscissae spectari poterit, cujusmodi sunt cordae seu subtensae, tangentes, normales, et lineae quaecunque aliae, quarum vel positio, vel magnitudo ex quantitate abscissae determinatur. Tum etiam ipsius curvae longitudo et area tanquam functiones spectari possunt, ac praeterea innumerabiles aliae quantitates, sive sint lineae, sive superficies, sive solida.

3. Ordiamur a simplicissimo et maxime consueto naturam curvarum exprimendi modo, qui relatione inter coordinatas orthogonales continetur. Sit (fig. 2.) recta AP axis, ad quem natura curvae refertur, in quo sumatur abscissa $AP = x$ et applicata ei normalis $PM = y$; natura autem curvae exprimatur aequatione quacunque inter x et y, ita ut sit y functio quaecunque ipsius x, quam primum assumam uniformem, ut singulis abscissis unica respondeat applicata. Dum igitur abscissa

x incrementum capit Δx, applicata y incrementum accipiet Δy, quod ex natura functionis y et quantitate incrementi Δx assignari poterit. Scilicet dum x abit in $x + \Delta x$, applicata y abibit in $y + \Delta y$. Quare si in figura capiatur abscissa alia $Ap = x + \Delta x$, erit applicata respondens $pm = y + \Delta y$. Cum vero sit $AP = x$ et $PM = y$, in figura erit $Pp = \Delta x$, sicque Pp denotabit incrementum abscissae Δx. Deinde si ex M axi parallela ducatur Mn, ob $pn = y$, erit $mn = \Delta y$, sicque linea mn repraesentabit incrementum applicatae Δy, quod convenit incremento abscissae $Pp = \Delta x$.

4. Quo haec facilius intelligantur, sit curva BM parabola hac aequatione expressa $ay = xx$. Cum igitur posito $x + \Delta x$ loco x, abeat y in $y + \Delta y$, habebitur haec aequatio

$$ay + a\Delta y = xx + 2x\Delta x + \Delta x\Delta x,$$

quae ob $ay = xx$ relinquet hanc

$$a\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x\Delta x.$$

Sumto ergo in axe abscissae incremento $Pp = \Delta x$, erit applicatae incrementum

$$\Delta y = \frac{2x\Delta x + \Delta x\Delta x}{a} \quad \text{seu} \quad mn = \frac{Pp\,(2AP + Pp)}{a} = \frac{Pp\,(AP + Ap)}{a}.$$

Perpetuo ergo si detur natura functionis y, ex ea relatio inter incrementa abscissae et applicatae inveniri poterit.

5. Non solum autem ad datum abscissae incrementum Δx inveniri poterit incrementum respondens applicatae y, sed etiam cujusvis alius quantitatis, quae per x et y definitur. Sic cum hypotenusa AM exprimatur per $\sqrt{(xx + yy)}$, postquam abscissa x incrementum Δx, et applicata y incrementum Δy accepit, hypotenusa $\sqrt{(xx + yy)}$ abibit in $\sqrt{((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2)}$, qua formula exhibebitur hypotenusa Am, quae cum sit $= \sqrt{(xx + yy)} + \Delta\sqrt{(xx + yy)}$, erit

$$\Delta\sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2)} - \sqrt{(xx + yy)},$$

hujusque ergo valor per methodum differentiarum supra expositam inveniri poterit. Si igitur centro A radio AM describatur arcus circuli Mq ab Am abscindens partem $Aq = AM$, erit pars residua $mq = \Delta\sqrt{(xx + yy)}$. Simul vero hinc patet, quomodo cujusvis alius quantitatis per x et y determinatae incrementum assignari atque in figura repraesentari debeat.

6. Quin etiam figura nobis exhibet incrementa quantitatum, quae saepenumero nequidem per x et y finito modo exprimi possunt. Sic si area curvae, abscissae AP respondens, ponatur $= P$, area respondens abscissae Ap erit $= P + \Delta P$. Verum si prior area a posteriori subtrahatur, remanebit figura mixtilinea $PMmp$, quae propterea erit incrementum areae P, seu erit $\Delta P = PMmp$. Haec area commode dividitur in duas partes, quarum altera est parallelogrammum rectangulum $PMnp = y\Delta x$, altera triangulum mixtilineum Mnm; eritque ergo $\Delta P = y\Delta x + Mnm$. Simili modo si longitudo curvae BM, seu potius, quae toti abscissae AP respondet, ponatur $= s$, erit incrementum hujus lineae curvae Δs aequale arcui Mm, qui cum sit major ejus subtensa $= \sqrt{(\Delta x\Delta x + \Delta y\Delta y)}$, erit utique $\Delta s > \sqrt{(\Delta x\Delta x + \Delta y\Delta y)}$.

7. Si curva BM circa axem AP converti concipiatur, ut inde oriatur solidum rotundum, hujus tam soliditas, quam superficies in considerationem veniunt, quarum utraque, dum abscissa ex P in p

extenditur, certum incrementum capiet. Facile enim patet, si figura $PMmp$ circa axem Pp rotetur, oriturum esse solidum, quo incrementum superioris solidi rotundi repraesentetur. Simili modo superficies conoidica, quae conversione arcus Mm circa axem Pp generatur, aequalis erit incremento superficiei solidi illius rotundi, quod conversione portionis curvae propositae, quae abscissae x respondet producitur, dum scilicet abscissa x incrementum capit $Pp = \Delta x$.

8. Ponamus nunc incrementum $Pp = \Delta x$, quod hactenus tanquam finitum consideravimus, fieri infinite parvum, seu in nihilum abire, atque exhibebit Pp differentiale ipsius abscissae x, seu erit $Pp = dx$. Hic quidem imprimis monendum est, cum in figura quantitates evanescentes repraesentari nequeant, iisdem nos quantitatibus, quae ante incrementa finita designabant, ad differentialia repraesentanda uti. Requiritur ergo ad hoc animi fictio, qua non tam ipsa linea Pp, quam ejus quasi pars infinitesima differentiale dx exprimere concipienda est. Punctum scilicet p continuo propius ad P admoveri fingendum est, et tum, cum in P revera incidit, atque adeo intervallum Pp evanescit, praebebit Pp differentiale dx. Quanquam ergo intervallum Pp in figura finitam habet magnitudinem, tamen id mente tanquam infinite parvum et evanescens concipi oportet, hocque modo quaevis differentialia, etiamsi revera sint nulla, per figuram repraesentare licebit.

9. Si igitur intervallum Pp tanquam infinite parvum concipiamus, ut sit $Pp = dx$, incrementum applicatae mn, quod ante erat finitum $= \Delta y$, nunc differentiale dy repraesentabit, ita ut sit $mn = dy$. Quamvis autem utraque linea Pp et mn sit infinite parva, tamen ratio, quae inter eas locum obtinet, erit finita, quoties differentiale functionis y ad differentiale dx finitam tenet rationem. Ratio enim $dy:dx$ plerumque est finita, atque eandem rationem habebit mn ad Pp seu Mn, etiamsi utraque concipiatur infinite parva seu nulla. Ex quo perspicuum est, etsi in calculo differentiali praecipue quantitates infinite parvae seu evanescentes tractentur, tamen ex iis quantitates finitas, quae scilicet rationes differentialium metiantur obtineri, sicque conclusiones, quae inde formantur, ad genus quantitatum finitarum vicissim revocari posse.

10. Quoniam igitur intervallum Pp evanescens concipitur, puncta curvae M et m infinite parum a se invicem distabunt, sicque elementum curvae Mm erit infinite parvum, ac propterea quavis assignabili quantitate minus. Unde hoc commodi nanciscimur, ut hoc curvae elementum Mm tanquam lineola recta considerari possit. Fingatur enim per puncta M et m duci corda Mm, hujus longitudo eo minus a longitudine arcus Mm discrepabit, quo magis arcus Mm diminuatur, hincque isto arcu in infinitum diminuto, omne discrimen inter ipsum et cordam subtendentem evanescet, abibitque ratio arcus ad cordam in rationem aequalitatis. Continuo enim diminuendo distantiam punctorum M et m, quamdiu curvatura in arcu Mm deprehenditur, ulterius distantia Mm diminuatur, ex quo manifestum est, si distantia haec in infinitum fuerit diminuta, rationem aequalitatis inter arculum Mm et ejus cordam intercedere debere.

11. Hac ergo consideratione ad infinite parva translata, triangulum Mnm, quod quamdiu in finitis versabamur, erat mixtilineum, nunc evadet rectilineum, ideoque ejus hypotenusa Mm per theorema pythagoricum assignari poterit. Cum enim in triangulo Mnm ad n rectangulo sit

$$Mn = Pp = dx, \quad \text{et} \quad mn = dy,$$

erit hypotenusa $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Exhibet autem haec lineola Mm differentiale ipsius lineae

lineae curvae BM, et hanc ob rem etsi ipsa linea curva plerumque per quantitates x et y exprimi nequit, tamen ejus differentiale per quantitatum x et y differentialia commode exprimitur. Quo commodo cum differentiae finitae careant, perspicuum est, quantam utilitatem analysis infinitorum sit allatura.

12. Cum y sit functio ipsius x, ejus differentiale dy hujusmodi formam pdx habebit, ubi p erit functio ipsius x per differentiationem cognoscenda. Quare ob $dy = pdx$, differentiale ipsius lineae curvae $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1+pp)}$. Quodsi ergo longitudinem curvae, abscissae $AP = x$ respondentem vocemus $= s$, etiamsi haec quantitas s plerumque finito modo per x et y exhiberi nequeat, tamen ejus differentiale facile assignatur, cum sit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$. Hinc igitur vicissim via patet ad longitudinem lineae curvae s inveniendam; id enim solum requiritur, ut quantitas investigetur, cujus differentiale sit $= dx\sqrt{(1+pp)}$, haecque quantitas longitudinem lineae curvae s exprimet. Hoc autem opus ad calculum integralem pertinet.

13. Quoniam in infinite parvis triangulum Mnm fit rectilineum, ejus area Mnm assignari poterit, eritque $= \frac{1}{2}dxdy$. Cum igitur totius areae, quae linea curva et coordinatis x et y includitur, differentiale seu incrementum infinite parvum sit trapezium $PMmp$, id quoque exhiberi poterit. Trapezium enim $PMmp$ constat duabus partibus, rectangulo $PMnp$, cujus area est $= ydx$, et triangulo $Mnm = \frac{1}{2}dxdy$, unde area trapezii, atque adeo differentiale areae erit $= ydx + \frac{1}{2}dxdy$. Ostensum autem est supra terminum $\frac{1}{2}dxdy$ prae altero ydx evanescere. Cum enim sit

$$ydx + \frac{1}{2}dxdy = (y + \frac{1}{2}dy)dx \quad \text{et} \quad y + \frac{1}{2}dy = y, \quad \text{ob} \quad dy = 0,$$

erit areae curvae differentiale $= ydx$; unde quantitas, cujus differentiale $= ydx$ exhibebit aream inter lineam curvam et coordinatas x et y contentam.

14. Hinc etiam infinitarum aliarum quantitatum, quae ipsae per x et y exprimi nequeunt, differentialia assignari poterunt. Concipiatur curva BM circa axem AP converti, ut generetur solidum rotundum, atque hac rotatione trapezium $PMmp$ generabit conum truncatum, cujus soliditas praebebit differentiale illius solidi rotundi; superficies autem convexa istius coni truncati differentiale superficiei solidi rotundi. Ad haec differentialia exprimenda sit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, seu radii ad semicircumferentiam, erit circuli, radio $PM = y$ descripti, peripheria $= 2\pi y$, et area πyy; circuli autem radio $pm = y + dy$ descripti peripheria $= 2\pi(y + dy)$ et area $= \pi(y + dy)^2$. Jam pro differentiali superficiei erit semisumma circumferentiarum utriusque basis coni truncati $= \pi y + \pi(y + dy) = 2\pi y$, quae per latus coni $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ multiplicata dabit differentiale superficiei solidi rotundi $= 2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi y dx\sqrt{(1+pp)}$, posito $dy = pdx$.

15. Soliditas autem hujus coni truncati, quae dat differentiale soliditatis solidi rotundi, secundum regulas stereometriae reperietur, si ad summam basium $\pi yy + \pi(y + dy)^2$ addatur media proportionalis inter easdem $\pi y(y + dy)$, eritque aggregatum $= 3\pi yy + 3\pi y dy + \pi dy^2 = 3\pi yy$, ob reliquos terminos prae $3\pi yy$ evanescentes. Deinde triens hujus summae πyy multiplicari debet per altitudinem coni scaleni $Pp = dx$, eritque productum $\pi yy dx$ soliditas coni truncati, simulque differentiale soliditatis solidi rotundi; unde ope calculi integralis vicissim tam volumen istius solidi rotundi quam ipsius superficiei inveniri poterit.

16. Praeterea hic quoque diligenter observandum est, in calculo omnia differentialia perpetuo tanquam affirmativa spectari. Scilicet quantitas variabilis quaecunque z in statu sequenti proxime semper in $z + dz$ abire assumitur, sive ea crescat sive decrescat; et cum differentiale sit differentia, quae remanet, si quantitas variabilis z a suo valore sequente $z + dz$ subtrahatur, erit $+ dz$ semper ejus differentiale. Nihilo tamen minus hoc modo omnium quantitatum, sive sint crescentes sive decrescentes, differentialia distincte exhibentur; si enim z crescat, ejus differentiale dz affirmativum, sin decrescat, negativum valorem habere invenitur. Sic si sit $z = \frac{1}{x}$ erit $+ dz = \frac{-dx}{xx}$, unde manifestum est quantitatem z decrescere, dum x crescit. Hac autem hypothesi innititur constantia regularum analysis infinitorum, unde summus usus in calculum redundat.

17. Quodsi autem figurae veritati conformiter delineentur, atque in iis differentialia modo ante exposito repraesententur, saepenumero ea a calculo discrepare videbuntur; neque tamen hinc ulla confusio, si ad principia sedulo attendamus, oriri poterit, quin potius, si ab hac lege recederemus, maximis difficultatibus implicaremur, unde nos extricare non possemus, nisi novis calculi differentialis regulis stabiliendis. Sic si quantitas variabilis x (Fig. 3) linea recta AP repraesentetur, eaque in situ proximo abeat in Ap, haec linea Ap per $x + dx$ designari debebit, eritque propterea $Pp = Ap - AP = -dx$. Si quis autem hoc decrementum Pp per dx exprimere velit, atque ideo $Ap = x - dx$ statuere, is contra principia calculi differentialis stabilita peccaret, vel aliis regulis ad calculum prosequendum uti deberet. Praeter necessitatem autem has regulas multiplicare ridiculum foret.

18. Omnis autem ambiguitas evitabitur, si, postquam singulas quantitates in calculum ingredientes suis litteris denominaverimus, easdem quantitates in situm proximum translatas iisdem litteris suis differentialibus auctis designemus. In figura autem, si lineis principalibus litteras majusculas adscripserimus, iisdem in statum proximum translatis, easdem litteras minusculas adscribemus. Sic si (Fig 4) in curva BM ad axem AP relata vocetur abscissa $AP = x$, et applicata $PM = y$, in situ proximo erit abcissa $Ap = x + dx$, et applicata $pm = y + dy$. Unde manifestum est fore $Pp = Ap - AP = dx$, et ducta mn axi parallela, erit particula $Mn = PM - pm = -dy$. Imprimis igitur attendendum est ad quantitatem variabilem primariam, cujus reliquae tanquam functiones spectantur, qua cautela adhibita omnes difficultates, quae alias subnasci possent, sponte evanescent.

19. Neque etiam opus est, ut omnes quantitates variabiles ab eodem axis puncto initium trahant, a quo abscissae computantur; sed nihil impedit, quominus reliquae quantitates variabiles ad aliud principium referantur. Sic etiamsi abscissarum AP (Fig. 2) initium in axis puncto A collocetur, fieri potest ut, exempli gratia, area curvae BPM ab alio puncto fixo B aestimetur. Positis enim coordinatis $AP = x$, $PM = y$, si vocetur area $BPM = v$, erit puncto P in situm proximum p promoto, $Ap = x + dx$, $pm = y + dy$, et area $Bpm = v + dv$, unde cum sit $dv = PMmp$, erit ut ante $dv = ydx$. Simili modo, si (Fig. 4) sumtis abscissa $AP = x$, $PM = y$, area $CDMP$ a puncto fixo C computetur et ponatur $= v$, fiet omnibus in situm proximum translatis, area $CDmp = v + dv$, eritque ergo $dv = -PMmp = -ydx$. Atque si arcus DM positus fuerit $= s$, erit $Dm = s + ds$, et $ds = -Mm = -\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Haeque animadversiones sufficiunt ad calculum cum figura conjungendum.

20. Quae hactenus de differentialibus applicatarum, arearum et arcuum curvae sunt tradita proprie tantum ad ejusmodi curvas pertinent, quarum applicatae sunt functiones uniformes abscissarum, ita ut unicuique abscissae unica tantum applicata respondeat. Si enim eidem abscissae plures applicatae respondeant, alii abscissae, priore scilicet quapiam quantitate aucta, totidem applicatae respondebunt, atque applicatae incrementum multiplex esse oportebit: quaelibet namque applicatarum priorum, a quolibet posteriorum subtracta, relinquet residuum, quod applicatae incrementum repraesentabit. Simili modo hoc casu eidem abscissae plures respondebunt areae, ac propterea eidem abscissae incremento multo plura arearum incrementa; sicque apparet functionum multiformium incrementa esse quoque functiones multiformes. His ergo casibus, si ex dato abscissae incremento quaeratur incrementum applicatae vel areae, quaestio non erit determinata, sed plures responsiones postulabit.

21. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus applicatam y esse functionem triformem ipsius abscissae x, seu eidem abscissae (Fig. 5) $AP = x$ respondeant tres applicatae PM, PM' et PM'', quae omnes in valore litterae y contineantur, quod evenit si y per hujusmodi aequationem cubicam exprimatur $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, existentibus P, Q, R functionibus quibuscunque ipsius x. Hujus ergo aequationis pro abscissa $AP = x$ tres radices erunt PM, PM' et $-PM''$, propterea quod ultima in regionem negativam cadit. Quare ex natura aequationum erit

$$P = PM + PM' - PM''$$
$$Q = PM \,.\, PM' - PM \,.\, PM'' - PM' \,.\, PM''$$
$$R = -PM \,.\, PM' \,.\, PM''.$$

22. Ponamus jam abscissam x incremento, ac primo quidem finito Δx augeri, ita ut sit $Ap = x + \Delta x$ et $Pp = \Delta x$. Applicata ergo y abibit in $y + \Delta y$, quae in figura denotabit tres applicatas pm, pm', $-pm''$. Cum igitur y designet quamvis ex applicatis PM, PM' et $-PM''$, differentia Δy exhibere debet singulas differentias inter has et illas applicatas, unde Δy sequentes novem denotabit valores:

1. $pm - PM$,	4. $pm' - PM$,	7. $-pm'' - PM$
2. $pm - PM'$,	5. $pm' - PM'$,	8. $-pm'' - PM'$
3. $pm + PM''$,	6. $pm' + PM''$,	9. $-pm'' + PM''$.

Quamobrem necesse est ut Δy per aequationem noni gradus determinetur. Scilicet si ipsa quantitas y eliminetur, prodibit aequatio, in qua quantitas Δy ad nonum gradum ascendet.

23. Ad hanc aequationem inveniendam ponatur in aequatione pro curva $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, $x + \Delta x$ loco x, et $y + \Delta y$ loco y; et cum sint P, Q et R functiones ipsius x, eae, si pro x ponatur $x + \Delta x$, abeant in $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ et $R + \Delta R$. Sicque prodibit haec aequatio

$$\left.\begin{aligned}
&y^3 + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3\\
&-Py^2 - 2Py\Delta y - P\Delta y^2\\
&-y^2\Delta P - 2y\Delta P\Delta y - \Delta P\Delta y^2\\
&+Qy + Q\Delta y\\
&+y\Delta Q + \Delta Q\Delta y\\
&-R\\
&-\Delta R
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Si jam ex hac aequatione cum priori conjuncta littera y eliminetur, et Δy tanquam incognita spectetur, orietur aequatio novem dimensionum, cujus radices erunt novem illae differentiae supra exhibitae.

24. Si quis hunc eliminationis laborem in se suscipere velit, revera ad aequationem novem dimensionum perveniet. Neque vero hac eliminatione est opus; cum enim y per priorem aequationem cubicam detur, unde tres nanciscitur valores, qui si tanquam cogniti spectentur, ex altera aequatione pariter cubica incognita Δy erui poterit, quae pariter ternos sortietur valores. Quia autem in hos tres valores ingredietur variabilis y, quae jam per se triplicem habet valorem, si ejus loco hi valores seorsim substituantur, omnino novem ipsius Δy provenient valores, qui erunt ii ipsi valores, quos supra exhibuimus. Ad hoc autem commodius paestandum prior aequatio a posteriori subtrahi poterit, sicque relinquetur sequens aequatio

$$\left.\begin{array}{l} -y^2\Delta P + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3 \\ + y\,\Delta Q - 2Py\Delta y - P\Delta y^2 \\ - \quad \Delta R - 2y\Delta P\Delta y - \Delta P\Delta y^2 \\ \qquad\quad + Q\Delta y \\ \qquad\quad + \Delta Q\Delta y \end{array}\right\} = 0.$$

25. Quemadmodum igitur, si y fuerit functio triformis ipsius x, seu si definiatur per aequationem cubicam, ejus incrementum Δy novem induit valores, ita si aequatio, qua applicata y determinatur, habuerit quatuor dimensiones, ejus incrementum Δy, quod pariter, nisi y eliminetur, ad quatuor dimensiones exsurgit, omnino sedecim habebit valores diversos. Atque in genere si applicata y per aequationem n dimensionum definiatur, ejus incrementum Δy aequatione totidem dimensionum determinatum reperietur, totidemque habebit valores, in quibus etiamnum inerit y, quae cum ipsa habeat n valores, incrementum Δy omnino nn sortietur valores, qui erunt differentiae inter singulos valores ipsarum y et $y + \Delta y$.

26. Ne igitur tanta sit valorum incrementi Δy multitudo, consideremus aequationem quadratam, quae duos tantum ipsius y exhibeat valores, sitque

$$yy - 2Py + Q = 0$$

ubi P et Q sint functiones quaecunque abscissae x, et y denotet applicatam. Ex hac ergo aequatione commode ambo valores ipsius y exhiberi possunt, qui sunt

$$y = P + \surd(P^2 - Q) \text{ et } y = P - \surd(P^2 - Q).$$

Crescat nunc abscissa x incremento Δx, hincque ejus functiones P et Q incrementis ΔP et ΔQ, applicatae vero y incrementum sit Δy, quod propterea hac aequatione exponetur

$$\left.\begin{array}{lll} yy & + 2y\Delta y & + \Delta y^2 \\ - 2Py & - 2P\Delta y & \\ - 2y\Delta P & - 2\Delta P\Delta y & \\ + Q & & \\ + \Delta Q & & \end{array}\right\} = 0$$

vel priori aequatione ablata, hac

$$\left.\begin{array}{l}-2y\Delta P + 2y\Delta y + \Delta y^2\\ +\Delta Q \quad -2P\Delta y\\ \quad -2\Delta P\Delta y\end{array}\right\} = 0.$$

27. Quodsi jam ex hac aequatione quaeratur incrementum Δy, reperietur

$$\Delta y = -y + P + \Delta P \pm \sqrt{(y^2 - 2yP + P^2 + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$

qui bini valores, si loco y ejus valores ambo ante inventi substituantur, abibunt in quatuor valores ipsius Δy, qui his binis formulis continebuntur

$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} + \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$
$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} - \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$

seu in unica formula erit

$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} \pm \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}.$$

28. Ponamus jam incrementum ipsius x, quod in his valoribus finitum est assumtum, fieri infinite parvum, eruntque functionum P et Q incrementa ΔP et ΔQ pariter infinite parva, abibuntque in dP et dQ. Hinc erit

$$\sqrt{(P^2 - Q + 2PdP + dP^2 - dQ)} = \sqrt{(P^2 - Q)} + \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$

unde quaterni ipsius Δy valores erunt

$$\Delta y = 2\sqrt{(P^2 - Q)} + dP + \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = -2\sqrt{(P^2 - Q)} + dP - \frac{2PdP + dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = dP + \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = dP - \frac{2PdP + dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}.$$

Ex his apparet binos priores valores ipsius Δy non obstante incrementi dx parvitate infinita, esse finitae magnitudinis, binos autem posteriores esse infinite parvos; hisque casibus ob $\sqrt{(P^2 - Q)} = y - P$,

$$\text{erit} \quad \Delta y = dP + \frac{2PdP - dQ}{2y - 2P} = \frac{2ydP - dQ}{2y - 2P}$$

qui valor quoque per differentiationem consuetam eruitur.

29. Scilicet si ponamus binos ipsius y valores in figura esse PM et PM', qui abscissae $AP = x$ respondeant, atque abscissae suo differentiali auctae $Ap = x + dx$ respondere applicatas pm et pm', quae per $y + \Delta y$ exprimentur, incrementum Δy hos quatuor habebit valores

$$1.\ pm - PM, \quad 3.\ pm' - PM$$
$$2.\ pm - PM', \quad 4.\ pm' - PM'$$

quorum duo, nempe secundus et tertius, erunt finitae magnitudinis, primus autem et quartus infinite parvi. Illi ergo duo valores, cum sint finiti, non pro differentiali ipsius y haberi, neque per dy exprimi poterunt, sed soli duo posteriores, qui cum sint infinite parvi, differentialia utriusque applicatae repraesentabunt. Ductis nimirum axi AP parallelis lineolis Mn et $M'n'$, erit mn differentiale applicatae PM, et $-m'n'$ differentiale alterius applicatae PM'.

30. Simili modo, si uti in figura applicata y tres habeat valores, tum ex novem valoribus ipsius Δy tres erunt infinite parvi, siquidem pro incremento abscissae sumatur ejus differentiale dx. Isti scilicet tres ipsius Δy valores infinite parvi erunt: $pm - PM = mn$, $pm' - PM' = -m'n'$ et $-pm'' + PM'' = -m''n''$, quia videlicet applicatae pm'' et PM'' sunt negativae. Hae igitur tres lineolae mn, $-m'n'$, $-m''n''$, praebent valores differentialis ipsius y, ideoque per dy designari possunt. Reliqui autem sex valores ipsius Δy hic in considerationem non veniunt. Atque in hoc ipso denuo insignis calculi differentialis usus includitur, quod valores ipsius Δy ad propositum facientes facile a reliquis inutilibus segregare liceat; nam nisi differentia Δx infinite parva statuatur, tam facile ex novem illis ipsius Δy valoribus, qui omnes essent finiti, ii, qui differentias duarum applicatarum in eodem curvae ramo sumtarum denotant, separari non possent.

31. Cum igitur hic ii tantum ipsius Δy valores requirantur, qui sint infinite parvi, et locum ipsius dy tenere queant, ponamus dy loco Δy, et dP, dQ et dR pro ΔR, ΔQ et ΔR, neglectisque in aequatione (21) inventa terminis, in quibus differentialia plures obtinent dimensiones, habebitur ista aequatio

$$-y^2 dP + y dQ - dR + 3y^2 dy - 2Py\,dy + Q dy = 0,$$

ex qua fit

$$dy = \frac{y^2 dP - y dQ + dR}{3y^2 - 2Py + Q}.$$

Quanquam autem hic unicus duntaxat pro dy valor invenitur, tamen quia ipsa applicata y triplicem habet valorem, hinc etiam tres valores pro dy oriuntur. Scilicet si pro y ponatur PM, tum prodit $dy = mn$; sin ponatur PM' pro y, fiet $dy = -m'n'$; at si pro y substituatur $-PM''$, invenietur $dy = -m''n''$.

32. Hinc perspicitur has applicatarum differentias infinite parvas dy, quae prodeunt dum abscissa x suo differentiali dx augetur, per regulas consuetas calculi differentialis inveniri. Si enim aequatio proposita

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

differentietur, prodibit

$$3yy\,dy - 2Py\,dy - y^2 dP + Q dy + y dQ - dR = 0,$$

unde oritur, uti modo invenimus:

$$dy = \frac{y^2 dP - y dQ + dR}{3yy - 2Py + Q}.$$

Quocirca calculus differentialis etiam functionum multiformium ea ipsa praebet differentialia, quibus opus habemus. Neque enim quasvis requirimus differentias inter singulos applicatarum valores praecedentes et sequentes, sed eas tantum, quae ad unum eundemque ramum pertinent. Ex his enim differentiis determinari debet positio tangentium et normalium aliarumque quantitatum a curvatura pendentium.

33. Quotcunque ergo applicatae in eadem linea curva eidem abscissae respondeant, uniuscujusque incrementum vel decrementum assignari, sicque plures rami, ex quibus linea curva componitur, tanquam totidem lineae simplices considerari possunt. Quaecunque enim fuerit aequatio inter abscissam x et applicatam y, ejus differentialis erit hujusmodi $dy = Z dx$, denotante Z functionem ipsarum

x et y. Quodsi ergo valores ipsius y fuerint p, q, r, s, etc., si in functione Z pro y ponatur valor p, prodibit incrementum applicatae p; similique modo si pro y successive ponantur valores q, r, s, etc. quantitas Zdx harum applicatarum differentialia exhibebit. Hinc ergo magis confirmantur et illustrantur, quae in libro superiori de differentiatione functionum multiformium sunt tradita.

34. Quoniam ergo pro differentiali dy totidem valores nanciscimur, quot ipsa applicata y diversos sortitur valores, totidem inde quoque resultabunt expressiones pro differentialibus singulorum curvae ramorum. Scilicet cum ante invenerimus elementum seu differentiale lineae curvae per $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exprimi, si pro dy substituatur valor mn, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ praebebit elementum Mm, quod est differentiale arcus EM; sin autem pro dy substituatur $-m'n'$, eadem expressio dabit differentiale arcus DM'; ac si fiat $dy=-m''n''$, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exhibebit differentiale arcus EM''. Simili ergo modo quotcunque linea curva habuerit ramos, eidem abscissae respondentes, hinc singulos istos ramos seorsim dimetiri licebit; quod argumentum fusius pertractabitur, ubi de dimensione linearum curvarum sermo instituetur.

35. Quae hactenus explicavimus ad eos tantum casus, quibus natura curvae aequatione inter binas coordinatas orthogonales exprimitur, pertinent. Interim tamen ex his quoque facile perspicitur, quemadmodum, si coordinatae non fuerint normales inter se, sed ad datum quemvis angulum inclinatae, differentialia ad figuras transferri debeant. Quin etiam, si natura curvae alio quocunque modo exprimatur, applicatio calculi ad figuram nullam fere habebit difficultatem; atque si ulla supersit, ea in sequenti tractatione prorsus tolletur. Caeterum in hujusmodi investigationibus omnis vis in eo est posita, quod differentiale ipsius lineae curvae tanquam lineola recta spectari possit; idem enim modus, quo hoc pro coordinatis orthogonalibus est ostensum, aeque ad omnes alios modos naturam curvarum exprimendi patet.

Caput II.

De tangentibus linearum curvarum.

1. In capite praecedente vidimus particulas infinite parvas cujusvis lineae curvae tanquam lineolas rectas spectari posse. Hancobrem omnis linea curva instar figurae rectilineae, cujus latera sint infinite parva, considerari poterit; definitio autem nostra infinite parvorum, qua ea prorsus evanescentia nihiloque aequalia statuimus, omnes difficultates, quae vulgo contra hanc propositionem allegari solent, penitus tollit. Quando enim dicimus lineam curvam per multisectionem in infinitum repetitam in particulas rectas secari, nihil aliud affirmamus, nisi hoc sectionis modo nunquam prorsus ad particulas, quae sint lineolae rectae, perveniri; sicque ab iis non dissentimus, qui negant ullas linearum curvarum particulas, quantumvis sint exiguae, unquam recte pro lineolis rectis haberi. Quamprimum autem particulae infinite parvae considerantur, eae a particulis infinite parvis lineae rectae omnino discrepare non possunt.

2. Quo haec clarius intelligantur, primo quidem nullum est dubium, quin omnes partes lineae rectae, quantumvis sint parvae, sint pariter lineolae rectae. Quocirca quando dicimus particulas

infinite parvas linearum curvarum pro lineolis rectis haberi posse, nihil aliud dicimus, nisi particulas infinite parvas linearum curvarum a particulis infinite parvis lineae rectae non differre. Quo ulterius enim linea curva dividitur et in minores particulas secatur, eo magis discrimen a curvedine ortum diminuitur; si enim arcus cujusvis curvae corda subtendatur, quantumvis sit discrimen inter arcum et ejus cordam, hoc discrimen continuo fiet minus, quo minor arcus capiatur. Hincque recte concluditur, si arcus in infinitum diminuatur, discrimen inter eum ejusque cordam penitus evanescere, atque adeo particulam infinite parvam cujusque lineae curvae pro lineola recta infinite parva haberi posse.

3. Hujus principii etiam insignis solet esse usus in geometria elementari. Ubi enim quadratura circuli investigatur, ibi assumitur area circuli aequari polygono infinitorum laterum, circulo vel inscripto, vel circumscripto. Dum enim circulo polygona regularia inscribuntur, mox apparet omnia quidem circulo esse minora; interim tamen quo plura ea habeant latera, eo minus ea a circulo discrepare. Unde colligitur, si numerus laterum polygoni in infinitum augeatur, tum discrimen inter ejus aream et aream circuli omnino evanescere; quae convenientia quoque contrario modo in polygonis circumscriptis locum habet. Neque vero solum area polygoni infinitorum laterum sive inscripti sive circumscripti aequalis est areae circuli, sed etiam ejus perimeter aequalis censetur peripheriae circuli; quod admitti non posset, nisi arculi circuli infinite parvi suis cordis essent aequales.

4. Contra hanc arculorum circuli infinite parvorum cum suis cordis convenientiam ab iis, qui in mechanica sunt versati, grave argumentum allegari solet. Cum enim descensus corporis gravis super arcu circuli usque ad ejus imum punctum investigatur, deprehenditur tempus descensus non evanescere, etiamsi arcus in infinitum diminuatur, quo casu suae subtensae fit aequalis. Deinde omnes descensus corporis super singulis cordis in imo circuli puncto terminatis aeque diuturni inveniuntur, neque tamen si et arcus et corda infinite parva statuantur, tempus descensus super arcu aequale est tempori descensus super corda. Hocque vero casu is valde falleretur, qui arcum et cordam, etiamsi utrumque sit infinite parvum, inter se confundere vellet. Verum cum hic tempus descensus super arcu quamvis infinite parvo, tamen sit finitum, hoc ipso investigatio ab infinite parvis ad finita est traducenda, ita ut haec objectio in praesenti instituto nullam vim retineat. Hic enim plus non affirmamus, quam inter arcus et cordas evanescentes rationem aequalitatis intercedere, quam ista objectio non infringit.

5. Quamvis elementa infinite parva cujusque lineae curvae aliter nisi puncta concipi nequeant, ideoque in illis nullae dentur partes ullam longitudinem constituentes; tamen calculus nobis cujusvis elementi directionem exhibet. Dum enim (Fig. 2) triangulum Mnm continua diminutione intervalli Pp in infinitum diminuitur atque in rectilineum abit, ob rationem inter ejus latuscula finitam, anguli ad M, n et m erunt cogniti, hincque inclinatio elementi Mm ad elementum Mn, quod axi AP parallelum concipitur, innotescet. Etiamsi igitur revera elementum Mm tanquam punctum in se nullam habeat directionem, tamen si cum sequente consideretur, plaga, secundum quam cum eo connectitur, directionem determinabit. Hanc directionem quoque hoc modo concipere licet, dum triangulum Mnm adhuc est finitum, intelligatur in eo ducta corda Mm cujus directio ergo erit nota; jam triangulum Mnm diminuendo, directio cordae continuo mutabitur. Sed ita tamen ad certam quandam

directionem jugiter propius accedet, quam attingere censenda erit tum, cum triangulum in infinitum erit diminutum.

6. Omnes autem difficultates penitus evanescent, si genesin linearum curvarum ita imaginemur, ut motu puncti super plano incedentis describantur. Sic enim linea curva BM erit quasi via, secundum quam punctum ex B in M est progressum. Hoc modo linea recta describitur, si punctum in motu suo perpetuo eandem servat directionem; linea curva autem, si ejus directio continuo immutatur. In quovis autem lineae curvae BM loco punctum istud describens certam habebit directionem, sine qua motus consistere non posset; atque in triangulo infinite parvo Mnm hypotenusa Mm repraesentabit directionem, secundum quam punctum illud, cum in M pervenerit, motum suum prosequitur. Hancobrem angulus mMn monstrabit inclinationem illius directionis ad axem AP; ex angulo autem Mmn constabit, quantum directio puncti lineam curvam describentis ad applicatam PM inclinetur.

7. Ducatur, per punctum curvae M linea recta indefinita TMV, quae ad axem AP (Fig. 6) vel rectam ei parallelam Mn eandem teneat inclinationem, quam in triangulo infinite parvo Mmn habet hypotenusa Mm ad basin Mn, atque haec recta TMV ita exprimet directionem puncti motu suo lineam curvam AM describentis, ut si hoc punctum eandem directionem, quam in M habet, invariatam retineret, ipsam lineam rectam MV descripturum esset. Hujus ergo lineae rectae TMV elementum infinite parvum Mm, quia ad Mn eandem habet inclinationem, quam tenet elementum lineae curvae Mm, cum hoc elemento congruet, atque adeo elementum Mm commune erit lineae rectae TMV et curvae AM. Quamobrem ista linea recta TMV tanget lineam curvam in puncto M; linea recta enim tangens lineam curvam ita definitur, ut cum linea curva in eo puncto, ubi est contactus, eandem directionem habere dicatur.

8. Si igitur pro coordinatis orthogonalibus AP et PM vocetur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$, in triangulo infinite parvo Mnm erit $Mn = Pp = dx$, $mn = dy$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et angulus mMn metietur inclinationem tangentis TMV ad axem AP, eritque si tangens axem in puncto T secare ponatur, angulus $PTM = mMn$, unde ob angulos ad P et n rectos, triangula TMP et Mmn inter se erunt similia, ac propterea latera proportionalia. Fiet ergo

$$mn\,(dy) : Mn\,(dx) = MP\,(y) : PT\left(\frac{ydx}{dy}\right), \quad \text{ideoque} \quad PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Hinc in axe definiri potest punctum T, ex quo, si per punctum M agatur linea recta TMV, ea futura sit tangens lineae curvae in puncto M. Vocari autem haec linea PT solet substangens.

9. Inventa ergo pro quavis curva, cujus natura aequatione inter coordinatas orthogonales exprimitur, subtangente $PT = \frac{ydx}{dy}$, tangens curvae in puncto M expeditissime ducitur, ducendo scilicet per puncta T, M linea recta TMV. Longitudo autem ipsius lineae tangentis MT erit $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$. Aliis quoque modis punctum T, quo tangens determinatur, assignari potest: sic ejus distantia a puncto A, seu intervallum AT erit $= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. Sin autem punctum T nimis longe excurrat, commodius in linea recta AB ad axem normali definitur punctum S, per quod tangens transit. Namque ob triangula similia TAS, Mnm, erit $dx : dy = AT : AS$, ideoque ob

$$AT = \frac{ydx - xdy}{dy}, \text{ erit } AS = \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}.$$

Vel ducta MQ axi AP parallela, ob $AQ = PM = y$, erit $QS = \frac{xdy}{dx}$. Hinc invento puncto S, linea recta per ambo puncta M et S ducta curvam in M tanget.

10. Cognita tangente ad curvam, facile linea recta duci poterit, quae cum curva angulum quemcunque constituat; quaevis enim recta ad lineam curvam in dato puncto aeque inclinata censetur, atque ad tangentem in eo puncto. Sic si per punctum M linea recta duci debeat, quae sit ad curvam normalis, totum negotium absolvetur, si ad tangentem MT in puncto M normalis educatur MN. Hujusmodi recta MN, quae in geometria sublimiori frequentissime occurrit, normalis appellari solet, et portio axis PN, inter applicatam et occursum normalis cum axe intercepta, subnormalis vocatur. Cum jam triangula Mmn, MNP sint pariter similia, erit

$$dx : dy = PM : PN \quad \text{ideoque} \quad PN = \frac{ydy}{dx}.$$

Facile ergo per differentiationem invenitur subnormalis PN, hincque recta per puncta M et N ducta erit normalis ad curvam in puncto M, quoniam ad tangentem est perpendicularis.

11. Ponamus ad curvam in puncto M duci debere rectam MO, quae cum curva angulum quemcunque datum OMT constituat. Sit iste angulus $TMO = \varphi$, et ponatur angulus $TMP = \omega$, ita ut sit

$$\sin\omega = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} \quad \text{et} \quad \cos\omega = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

erit in triangulo PMO angulus $PMO = \varphi - \omega$, atque $\cos(\varphi - \omega) : y = \sin(\varphi - \omega) : PO$, unde fit

$$PO = y \operatorname{tang}(\varphi - \omega) = \frac{y(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\omega)}{1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\omega}.$$

At est $\quad \operatorname{tang}\omega = \frac{dx}{dy}, \quad$ ergo $\quad PO = \frac{y(dy\operatorname{tang}\varphi - dx)}{dy + dx\operatorname{tang}\varphi}, \quad$ seu $\quad PO = \frac{y(dy\sin\varphi - dx\cos\varphi)}{dy\cos\varphi + dx\sin\varphi}.$

Hinc sequitur si angulus $OMT = \varphi$ debeat esse rectus, ob $\sin\varphi = 1$ et $\cos\varphi = 0$, fore $PO = PN = \frac{ydy}{dx}$. Sin autem angulus φ debeat esse nullus, seu MO in ipsam tangentem incidere, ob $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = 1$, erit $PO = -\frac{ydx}{dy} = -PT$, uti pro tangente invenimus.

12. Hoc modo non solum tangentes et aliae lineae rectae ad curvam utcunque inclinatae duci possunt, si applicata fuerit functio uniformis ipsius abscissae, sed etiam quotcunque curvae puncta eidem abscissae puncto P respondeant, ad quodvis punctum duci poterit tangens. Si enim applicata y tres habeat valores, puta PM, PM' et $-PM''$ (Fig. 5), ex aequationis resolutione non solum singuli cognoscentur, sed etiam cujusque differentiale dy. Habebuntur ergo tam pro y quam pro dy tres valores, qui in formula $\frac{ydx}{dy}$ substituti dabunt subtangentem pro quovis puncto. Vel si sit $dy = pdx$, existente p functione rationali ipsarum x et y, formula $\frac{y}{p}$, si ponatur $y = PM$, dabit subtangentem pro puncto M; sin autem pro y substituatur vel valor PM' vel PM'', prodibit subtangens vel pro puncto M', vel pro puncto M''.

13. Regulam pro inveniendis tangentibus, si natura curvae exprimatur aequatione inter coordinatas orthogonales, aliquot exemplis illustrasse juvabit:

Exemplum 1. *Sit igitur curva* AM (Fig. 6) *parabola Appolloniana, cujus natura inter coordinatas* AP $= x$ et PM $= y$ *hac aequatione* $yy = 2ax$ *exprimitur.*

Cum sit $yy = 2ax$, erit differentiando $ydy = adx$, ideoque $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a}$, et subtangens

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a} = 2x, \text{ ob } yy = 2ax.$$

Tenet ergo perpetuo subtangens PT ad abscissam AP rationem duplam. Deinde cum sit subnormalis $PN = \frac{ydy}{dx}$, ob $ydy = adx$, fiet $PN = a$; ideoque in parabola subnormalis perpetuo aequalis est semissi lateris recti. Cum porro sit resecta $AT = AP = x$, erit $AS = \frac{1}{2}y$; hinc si in puncto S ad tangentem MT ducatur normalis SF, erit $AF = \frac{1}{4}yy : x = \frac{1}{2}a$; ideoque punctum F est fixum et incidit in focum parabolae. Quae proprietates, cum aliunde sint notissimae, veritatem regulae non mediocriter confirmant.

Exemplum 2. *Sit curva* AM *parabola altioris gradus hac aequatione* $y^{m+n} = a^m x^n$ *expressa, cujus tangentem invenire oporteat.*

Si aequatio differentietur, prodit $(m+n)y^{m+n-1}dy = na^m x^{n-1}dx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}} \text{ et subtangens } PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n}}{na^m x^{n-1}}.$$

Jam ob $y^{m+n} = a^m x^n$ erit $PT = \frac{m+n}{n}x$, et $AT = \frac{m}{n}x$; ideoque abscissa AP ad resectam AT rationem habet constantem ut n ad m. Tum vero erit substangens PT ad abscissam AP ut $m+n$ ad n. Praeterea cum sit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{na^m x^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-1}}, \text{ erit subnormalis } PN = \frac{ydy}{dx} = \frac{na^m x^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-2}} = \frac{na^m x^n y^2}{(m+n)xy^{m+n}}.$$

Substituatur hic $a^m x^n$ loco y^{m+n} fietque $PN = \frac{ny^2}{(m+n)x}$.

Exemplum 3. *Sit* (Fig. 7) *curva* AMB *circulus centro* C *radio* AC = a *descriptus, cujus natura inter* AP = x *et* PM = y *hac aequatione* yy = 2ax − xx *exprimitur.*

Haec aequatio differentiata dat $ydy = adx - xdx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a-x} \text{ et substangens } PT = \frac{yy}{a-x} = \frac{2ax - xx}{a-x} = \frac{x(2a-x)}{a-x}.$$

Quoniam vero est $AB = 2a$, erit $BP = 2a - x$, et ob $CP = a - x$, erit $PT = \frac{AP \cdot BP}{CP}$. Deinde est resecta

$$AT = \frac{2ax - xx}{a-x} - x = \frac{ax}{a-x} = \frac{AC \cdot AP}{CP}.$$

Porro erit

$$CT = \frac{ax}{a-x} + a = \frac{aa}{a-x} = \frac{AC^2}{CP}.$$

Denique cum sit $ydy = adx - xdx$, erit subnormalis $\frac{ydy}{dx} = a - x = CP$, unde patet normalem per centrum C transire. Quanquam hic pro abscissa $AP = x$ applicata y duplicem habet valorem, alterum PM, alterum $-PM'$, tamen quia neque in expressione subtangentis neque subnormalis inest y, tam utraque tangens MT et $M'T$ axem in eodem puncto T secat, quam utraque normalis MC et $M'C$ per centrum C transibit. Quae quidem sunt notissimae circuli proprietates.

Exemplum 4. *Si natura curvae* AM (Fig. 6) *hac aequatione exprimatur* yy = X, *existente* X *functione quacunque ipsius* x, *ejus tangentem in quovis puncto* M *invenire.*

Sit $dX = Pdx$, et aequatio differentiata dabit $2ydy = Pdx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{P}, \text{ et subtangens } PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{P} = \frac{2X}{P}.$$

Deinde cum sit $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}P$, subnormalis erit $PN = \frac{1}{2}P$, qui valores tam subtangentis quam subnormalis pro utroque applicatae valore $\pm\sqrt{X}$ valebunt, quod quidem per se est perspicuum, cum partes curvae ad utramque axis partem sitae sint inter se similes et aequales.

* **Exemplum 5.** *Positis* (Fig. 8) *abscissa* $AP = x$ *et applicata orthogonali* $= y$, *sit natura curvae hac aequatione expressa* $yy = 2ay + 2xy - aa + xx$, *ita ut unicuique abscissae* $AP = x$ *binae respondeant applicatae* PM *et* $-PM'$.

Aequatio differentiata dabit

$$ydy = ady + xdy + ydx + xdx$$

unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-a-x}{y+x},$$

ideoque erit subtangens

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{yy-ay-xy}{y+x} = \frac{ay+xy-aa+xx}{y+x}, \quad \text{atque resecta} \quad \frac{ydx}{dy} - x = \frac{a(y-a)}{y+x}.$$

Jam ob binos valores ipsius y duo reperiuntur puncta T et T', quorum illud tangenti in M, hoc vero tangenti in M' respondet. Erit nempe, si $y = PM$, $AT = \frac{a(PM-a)}{AP+PM}$; sin autem $y = -PM'$, erit $AT' = -\frac{a(PM'+a)}{AP-PM'}$. Simili modo ob $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-a-x}$, erit subnormalis

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{yy+yx}{y-a-x} = \frac{2ay+3yx-aa+xx}{y-a-x},$$

quae praebebit intervallum PN si ponatur $y = PM$; sin autem ponatur $y = -PM'$, prodibit intervallum PN' respondens puncto M'.

Exemplum 6. *Invenire subtangentem in lineis tertii ordinis hac aequatione contentis*

$$y^3 + \alpha y^2x + \beta yx^2 + \gamma x^3 + \delta y^2 + \varepsilon yx + \zeta xx + \eta y + \theta x + \iota = 0.$$

Aequatione hac differentiata obtinebitur

$$dy(3yy + 2\alpha yx + \beta xx + 2\delta y + \varepsilon x + \eta) + dx(\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta) = 0$$

unde fit subtangens

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-3y^3 - 2\alpha y^2x - \beta yxx - 2\delta yy - \varepsilon yx - \eta y}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}, \quad \text{seu}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{\alpha y^2x + 2\beta yxx + 3\gamma x^3 + \delta yy + 2\iota yx + 3\zeta xx + 2\eta y + 3\theta x + 3\iota}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}.$$

Si hinc abscissa x subtrahatur, remanebit resecta

$$\frac{ydx}{dy} - x = \frac{\delta yy + \varepsilon yx + \zeta xx + 2\eta y + 2\theta x + 3\iota}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}.$$

Quodsi jam hic pro y ejus varii valores substituantur, prodibunt axis portiones AT pro singulis curvae punctis abscissae x respondentibus.

14. Formula $\frac{ydx}{dy}$ non solum quantitatem subtangentis, quae est portio axis inter applicatam et tangentem intercepta, ostendit, sed etiam ejus positionem demonstrat. Si enim $\frac{ydx}{dy}$ affirmativum habeat valorem, punctum T ad eandem partem applicatae PM cadit, in qua reperitur initium abscissarum. Scilicet si abscissae AP a puncto A dextrorsum capiantur, subtangens $\frac{ydx}{dy}$, si ejus valor fuerit affirmativus, a puncto P sinistrorsum capi debebit, et contra, si valor ipsius $\frac{ydx}{dy}$ fuerit negativus.

Subnormalis autem $PN = \frac{ydy}{dx}$ si fuerit affirmativa, a puncto P dextrorsum capi debebit, siquidem abscissae x ab initio A dextrorsum progrediantur; hocque casu subnormalem, si fuerit negativa, sinistrorsum sumi oportet.

15. Nullum autem dubium relinquetur, si punctorum T et N distantiae ab initio abscissarum A computentur, unde in unam axis plagam abscissae affirmativae, in alteram negativae vergunt. Ponamus (Fig. 9) tam punctum T quam N in regionem abscissarum affirmativarum incidere, et cum, positis

$$AP = x,\quad PM = y,\quad \text{sit}\quad PT = \frac{ydx}{dy}\quad \text{et}\quad PN = \frac{ydy}{dx},\quad \text{erit}\quad AT = x - \frac{ydx}{dy}\quad \text{et}\quad AN = x + \frac{ydy}{dx}.$$

Quoties ergo expressio $\frac{xdy - ydx}{dy}$ affirmativum tenet valorem, toties intervallum AT a puncto A in regione abscissarum affirmativarum capi debet. Sin autem $\frac{xdy - ydx}{dy}$ habeat valorem negativum, seu $\frac{ydx - xdy}{dy}$ affirmativum, intervallum AT in regionem abscissarum negativarum incidet. Simili modo distantia $AN = \frac{xdx + ydy}{dx}$, si sit affirmativa, in regione axis affirmativa, sin autem sit $\frac{xdx + ydy}{dx}$ negativa quantitas, in regione axis negativa capienda erit. Cujus discriminis aliquot exempla subjungamus.

Exemplum 1. *Sit* (Fig. 7) *propositus circulus centro* C *radio* AC = a *descriptus, et abscissae* CP = x *a centro sinistrorsum capiantur, ut sit* yy = aa − xx, *invenire subnormalem et subtangentem.*

Cum sit $yy = aa - xx$, erit $ydy = -xdx$ et $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$, unde fit

$$\frac{ydx}{dy} = -\frac{yy}{x}\quad \text{et}\quad CT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xx + yy}{x} = \frac{aa}{x};$$

quae expressio cum sit affirmativa, punctum T in parte axis affirmativa sumi debet. Sin autem abscissa x sumatur negativa, quantitas $\frac{aa}{x}$ pariter fit negativa, ideoque in axe a puncto C dextrorsum capi debet. Deinde pro normali cum sit $ydy + xdx = 0$, erit quoque $\frac{ydy + xdx}{dx} = 0$, unde patet normalem perpetuo per ipsum punctum C, quod est abscissarum initium simulque centrum circuli, transire.

Exemplum 2. *Sit* (Fig. 10) *linea curva ellipsis super axe* AB *centro* C *descripta, unde sumtis coordinatis* CP = x *et* PM = y, *ejus natura hac aequatione* aayy = aacc − ccxx *exprimatur.*

Erit ergo a semiaxis transversus CA vel CB, et c semiaxis conjugatus. Differentiata aequatione erit

$$aaydy = -ccxdx\quad \text{et}\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{aay}{ccx},\quad \text{atque}\quad \frac{ydx}{dy} = -\frac{aayy}{ccx},$$

unde fit

$$CT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{aayy + ccxx}{ccx} = \frac{aa}{x};$$

cadit ergo intervallum CT in partem axis abscissis affirmativis destinatam. Deinde cum sit

$$\frac{ydy}{dx} = -\frac{ccx}{aa},\quad \text{erit}\quad CN = \frac{ydy + xdx}{dx} = \frac{(aa - cc)x}{aa}.$$

Hoc est, si fuerit $a > c$, intervallum CN erit affirmativum, sin autem sit $a < c$, intervallum CN sinistrorsum sumi debet.

Exemplum 3. *Sit* (Fig. 11) *linea curva hyperbola, cujus natura inter coordinatas orthogonales* AP = x, PM = y *hac aequatione exprimatur:* $yy = 2xy + aa$.

Hic unicuique abscissae x duae respondent applicatae PM et PM' eritque

$$PM = x + \sqrt{(aa + xx)} \quad \text{et} \quad -PM' = x - \sqrt{(aa + xx)},$$

atque in initio A fit $$AB = AB' = a.$$

Ad tangentes jam in punctis M et M' inveniendas differentietur aequatio, prodibitque

$$ydy = xdy + ydx, \quad \text{unde fit} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y}, \quad \text{et subtangens} \quad PT = y - x.$$

Unde si $y = PM$, erit $PT = PM - AP$; sin autem $y = -PM'$, quia punctum T' in regionem oppositam cadit, erit $-PT' = -PM' - AP$, seu $PT' = PM' + AP$. Cum autem sit

$$y = x \pm \sqrt{(aa + xx)}, \quad \text{erit subtangens} = \pm \sqrt{(aa + xx)},$$

cujus ambigui valoris prior $+\sqrt{(aa+xx)}$ dat subtangentem PT, alter $-\sqrt{(aa+xx)}$ subtangentem $-PT'$, erit ergo $PT = PT'$. Subnormalis porro

$$PN = \frac{yy}{\sqrt{(aa + xx)}} = \frac{aa + 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} + 2x,$$

et altera subnormalis

$$-PN' = \frac{-aa - 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} + 2x, \quad \text{seu} \quad PN' = \frac{aa + 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} - 2x.$$

Exprimi quoque potest tam subtangens quam subnormalis per applicatam y. Cum enim sit

$$x = \frac{yy - aa}{2y}, \quad \text{erit} \quad PT = \frac{yy + aa}{2y}, \quad AT = \frac{aa}{y} \quad \text{et} \quad PN = \frac{2y^3}{yy + aa},$$

unde pro duplici valore ipsius y gemini quoque valores pro punctis T et N inveniuntur.

* **Exemplum 4.** *Sit curva* BM (Fig. 9) *logarithmica ad suam asymtotam* AP *tanquam axem relata, cujus positis coordinatis* AP $= x$, PM $= y$, *natura hac aequatione exprimatur* $x = c\,l\,\frac{y}{a}$.

Differentiata hac aequatione erit $dx = \frac{cdy}{y}$, ideoque $\frac{ydx}{dy} = c$, unde subtangens logarithmicae $PT = \frac{ydx}{dy}$ ubique ejusdem est quantitatis, quae est hujus curvae proprietas notissima. Hinc cum subnormalis semper sit tertia proportionalis ad subtangentem et applicatam, erit subnormalis $PN = \frac{yy}{c}$. Ex hoc autem exemplo perspicitur, quomodo curvarum transcendentium tangentes inveniri oporteat.

16. Vulgo in elementis linea tangens ita definiri solet, ut omnia puncta praeter unicum, quod punctum contactus vocatur, extra lineam curvam posita habere dicantur. Haec autem definitio non nisi in circulo et sectionibus conicis aliisque curvis, quae a lineis rectis in pluribus quam duobus * punctis secari nequeunt, justam tangentis ideam praebet. Ita si (Fig. 12) curva AMN alicubi cursum suum inflectat, linea recta TMN eam in puncto M tangere potest, etiam si eadem alibi in N curvam secet; hocque modo fieri potest, ut eadem linea recta curvam tangat simulque in pluribus punctis intersecet. Casus autem iste nostram definitionem non turbat, qua diximus lineam tangentem in uno puncto cum linea curva ita convenire, ut ibi utraque communem habeat directionem. Seu cum etiam in minimo curvae elemento directio agnosci debeat, linea tangens nil aliud erit, nisi hoc elementum utrinque productum.

17. Alias quoque idea tangentis ex idea linearum secantium derivari solet, ita ut (Fig. 13) linea secans TMm in tangentem abire censeatur, cum binae intersectiones M et m in unum punctum conveniunt. Haec idea non solum cum ea, quam supra dedimus, perfecte congruit, sed etiam eandem regulam pro inveniendis tangentibus suppeditat. Posita abscissa $AP = x$, sit applicata respondens $PM = y$ functio quaecunque ipsius x; tum consideretur recta TMm per punctum quodpiam axis T ducta quaecunque, eritque posita $AT = t$ aequatio pro recta ista hujusmodi $y = n(t + x)$, quae ob y functionem ipsius x, tot habebit radices, quot fuerint intersectiones hujus rectae cum linea curva. Si jam ponamus duas intersectiones in unum punctum coalescere, aequatio $y = n(t + x)$ duas habebit radices aequales; ac propterea per ea, quae in praecedente libro de aequalitate duarum radicum sunt demonstrata, erit aequationem $y = n(t + x)$ differentiando, posita sola quantitate x ejusque functione y variabili, $dy = ndx$, unde fit $n = \frac{dy}{dx}$. Qui valor si loco n in illa aequatione substituatur, erit $y = \frac{(t + x)\,dy}{dx}$ et $(t + x) = PT = \frac{ydx}{dy}$, quae est eadem expressio, quam supra pro subtangente PT invenimus.

18. Patet ergo ex hoc consensu, si elementum lineae curvae, quod etiamsi sit infinite parvum, tamen determinata directione non caret, utrinque producatur in directum, lineam rectam hoc modo oriundam fore tangentem lineae curvae in eo elemento. Quamobrem perpetuo positio lineae tangentis ex directione elementi curvae, quae per minimum triangulum Mnm (Fig. 6) determinatur, recte definietur. Cum igitur hoc praestiterimus, quando natura curvae per aequationem inter coordinatas orthogonales definitur, superest, ut quoque alios modos naturam curvarum exprimendi perpendamus, et quemadmodum lineae tangentes inveniri queant, ostendamus. Cognita autem tangente, simul omnes aliae lineae, quarum positio ab ea pendet, cujusmodi sunt normales in curvam, aliaeque lineae ad curvam utcunque inclinatae, facillime innotescent.

19. Quoniam hactenus applicatas ad axem normales assumsimus, faciant nunc applicatae MP cum axe AP angulum quemcunque constantem APM, qui sit $= \zeta$; voceturque abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$. Sumatur jam alia abscissa aliquanto major $Ap = x + \Delta x$, sitque respondens applicata $pm = y + \Delta y$. Ducta ergo linea Mn axi parallela, erit $Mn = Pp = \Delta x$, et $mn = \Delta y$, atque triangulum mixtilineum Mnm abibit in rectilineum, si incrementum Δx statuatur infinite parvum. Fiat igitur $\Delta x = dx$ et $\Delta y = dy$, atque in triangulo rectilineo Mnm, ob data $Mn = Pp = dx$, $mn = dy$ et angulum $Mnm = \zeta$, dabitur positio lateris Mm, quae producta praebebit tangentem curvae MT in puncto M, quae si axi in T occurrat, triangula Mnm et TPM erunt similia, unde oritur $mn\,(dy) : Mn\,(dx) = PM\,(y) : PT$, erit ergo intervallum $PT = \frac{ydx}{dy}$, sicque innotescit punctum T, per quod si ex M ducatur recta MT, ea futura sit curvae tangens quaesita, unde patet subtangentem PT ab angulo ζ non pendere.

20. Definiri hinc quoque possunt differentialia tam areae quam arcus curvae. Si enim ponatur area $APM = u$, erit area $Apm = u + du$, ideoque $du =$ trapezio $PpmM$, quod cum constet duabus partibus, parallelogrammo scilicet $PpnM$ et triangulo Mnm, erit area parallelogrammi $PpnM = ydx \sin\zeta$ et area trianguli $Mnm = \frac{1}{2}dxdy\sin\zeta$; hincque fit elementum areae $du = ydx\sin\zeta + \frac{1}{2}dxdy\sin\zeta$, quod est differentiale areae completum. In quo cum terminus posterior prae priori evanescat, erit

$du = y dx \sin\zeta$. Deinde, si arcus curvae AM ponatur $= s$, erit $Mm = ds$; verum ex triangulo Mnm reperitur

$$Mm = \sqrt{(dx^2 - 2dxdy\cos\zeta + dy^2)}, \text{ unde erit } ds = \sqrt{(dx^2 - 2dxdy\cos\zeta + dy^2)}.$$

Quodsi ergo quantitates assignari possent, quarum differentialia sint

$$y dx \sin\zeta \quad \text{et} \quad \sqrt{(dx^2 - 2dxdy\cos\zeta + dy^2)},$$

earum altera aream curvae u, altera arcum s esset exhibitura.

21. Ex cognita positione tangentis MT determinari poterit angulus, quem linea utcunque per punctum M ducta cum linea curva constituit, quaevis enim linea cum curva eundem angulum constituere censetur, atque cum tangente. Hinc ergo vicissim duci poterit recta MO, quae cum curva in M angulum datum constituat. Sit iste angulus $TMO = \theta$, ac ponatur tantisper angulus $TMP = Mmn = \varphi$, erit angulus $PMO = \theta - \varphi$, atque ob $APM = \zeta$, erit $AOM = \zeta - \theta + \varphi$. Hinc ob cognitum in triangulo PMO, praeter omnes angulos, latus $PM = y$, erit

$$\sin AOM : PM = \sin PMO : PO, \quad \text{ideoque fiet} \quad PO = \frac{y\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\zeta - \theta + \varphi)} = \frac{y \operatorname{tang}(\theta - \varphi)}{\sin\zeta - \cos\zeta \operatorname{tang}(\theta - \varphi)}.$$

At est $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} Mmn = \frac{dx\sin\zeta}{dy - dx\cos\zeta}$, ideoque

$$\operatorname{tang}(\theta - \varphi) = \frac{dy \operatorname{tang}\theta - dx\cos\zeta \operatorname{tang}\theta - dx\sin\zeta}{dy - dx\cos\zeta + dx\sin\zeta\operatorname{tang}\theta} = \frac{dy\sin\theta - dx\sin(\zeta + \theta)}{dy\cos\theta - dx\cos(\zeta + \theta)}.$$

Quamobrem reperietur

$$PO = \frac{y(dy\sin\theta - dx\sin(\zeta + \theta))}{dy\sin(\zeta - \theta) + dx\sin\theta}.$$

Si ergo linea MO ad curvam debeat esse normalis, ob $\theta = 90^\circ$, erit $PO = \frac{y(dy - dx\cos\zeta)}{-dy\cos\zeta + dx}$, unde si normalis MN ad alteram partem applicatae MP cadat, erit

$$PN = \frac{y(dx\cos\zeta - dy)}{dx - dy\cos\zeta}.$$

Exemplum. Sit curva AM (Fig. 10) ellipsis, vel alia sectio conica quaecunque, cujus sit AB diameter et PM applicata alteri diametro conjugatae parallela. Positis ergo $AP = x$, $PM = y$ et angulo $APM = \zeta$, erit ex natura sectionum conicarum: $yy = 2ax - nxx$. Hinc fit

$$y dy = a dx - nx dx, \quad \text{seu} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a - nx}{y}.$$

Quare erit subtangens

$$PT = \frac{y dx}{dy} = \frac{yy}{a - nx}, \quad \text{ideoque} \quad PT = \frac{x(2a - nx)}{a - nx}.$$

Sit C centrum sectionis conicae, erit $AC = \frac{a}{n}$, et $AB = \frac{2a}{n}$, ex quibus obtinetur

$$PT = \frac{x(AB - x)}{AC - x} = \frac{AP \cdot BP}{CP}, \quad \text{et} \quad CT = \frac{aa}{n(a - nx)} = \frac{AC^2}{CP}.$$

Deinde si MN fuerit ad curvam normalis, erit

$$PN = \frac{y(a - nx - y\cos\zeta)}{y - (a - nx)\cos\zeta},$$

cujus lineae valor erit duplex, prout y significet vel applicatam superiorem PM, vel inferiorem PM'. Quia autem inferior superiori est aequalis, pro puncto M' fiet y negativa, eritque ergo pro subnormali puncto M' respondente

$$PN' = \frac{y(a - nx + y\cos\zeta)}{y + (a - nx)\cos\zeta},$$

unde in lineis erit

$$PN = \frac{PM(CP.PM - AP.BP\cos\zeta)}{AP.BP - CP.PM\cos\zeta} \quad \text{et} \quad PN' = \frac{PM(CP.PM + AP.BP\cos\zeta)}{AP.BP + CP.PM\cos\zeta}.$$

22. Sit jam (Fig. 15) angulus APM, quem applicata PM cum axe AP constituit, utcunque variabilis, seu exprimatur per functionem quampiam abscissae AP, cujus cum quoque applicata PM sit functio, pro assumta qualibet abscissa AP, tam angulus APM quam longitudo applicatae PM determinabitur, sicque punctum curvae M innotescet. Sit ergo abscissa $AP = x$, angulus $APM = \varphi$ et applicata $PM = y$, atque si tam φ quam y detur per x, hinc facile aequatio pro curva inter coordinatas orthogonales eruetur. Nam demissa ex M in axem AP perpendiculari MQ, ponatur $AQ = p$ et $QM = q$, eritque $q = y\sin\varphi$ et $p = x - y\cos\varphi$, unde aequatio inter p et q elicietur, qua inventa positio tangentis MT sine difficultate definietur. Cum enim sit $QT = \frac{qdp}{dq}$, ob $q = y\sin\varphi$, $dp = dx - dy\cos\varphi + yd\varphi\sin\varphi$ et $dq = dy\sin\varphi + yd\varphi\cos\varphi$, erit

$$QT = \frac{y\sin\varphi(dx - dy\cos\varphi + yd\varphi\sin\varphi)}{dy\sin\varphi + yd\varphi\cos\varphi}.$$

Addatur $PQ = y\cos\varphi$ prodibitque intervallum

$$PT = \frac{y(dx\sin\varphi + yd\varphi)}{dy\sin\varphi + yd\varphi\cos\varphi}.$$

23. Definiamus autem sine subsidio hujus reductionis positionem tangentis MT, ex sola consideratione differentialium. In hunc finem concipiatur applicata proxima pm, ita ut sit

$$Pp = dx, \quad \text{ang.}\, Apm = \varphi + d\varphi \quad \text{et} \quad pm = y + dy.$$

Producantur hae ambae applicatae, donec sibi occurrant in V, et cum in triangulo PVp sit $Pp = dx$, anguli $VPp = \varphi$, $VpB = \varphi + d\varphi$, et propterea angulus $V = d\varphi$, fiet

$$\sin d\varphi : dx = \sin(\varphi + d\varphi) : PV = \sin\varphi : pV.$$

Quare ob $\sin d\varphi = d\varphi$, $\sin(\varphi + d\varphi) = \sin\varphi + d\varphi\cos\varphi$, eo quod $\cos d\varphi = 1$, erit

$$PV = \frac{dx\sin\varphi + dxd\varphi\cos\varphi}{d\varphi} \quad \text{et} \quad pV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}.$$

Ducta jam Mn axi AP parallela erit $PV : pV = PM : pn$, hincque

$$pn = \frac{ydx\sin\varphi}{dx\sin\varphi + dxd\varphi\cos\varphi} = \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = y - \frac{yd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

deinde ob $PV : dx = VM : Mn$ erit $Mn = dx + \frac{yd\varphi}{\sin\varphi}$. Est vero $pm = y + dy$, ideoque erit

$$mn = dy + \frac{yd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Jam triangula Mmn et TMP sunt inter se similia, quia discrimen inter triangula TMP et Tmp est infinite parvum, seu nullum; hincque erit

$$mn \; : \; Mn \; = PM \; : \; PT$$

$$dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} : dx + \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi} = y : \frac{y\,(dx\sin\varphi + y\,d\varphi)}{dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi},$$

quae congruit cum expressione ante inventa.

24. Ex hoc ratiocinio intelligitur quantitates infinite parvas prae finitis non semper abjici licere; quanquam enim inveneramus $PV = \frac{dx}{d\varphi}(\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi)$, tamen in altero factore $\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi$ posterius membrum prae priori perperam negligeretur. Negligi quidem sine errore posset, si lineae PV quantitas absoluta quaereretur. At cum differentia inter eam et lineam pV in computum sit ducenda, ob $pV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, si idem valor pro PV quoque assumeretur, differentia prodiret nulla, neque propterea cum differentiali Pp comparari posset. Hinc ergo simul perspicitur, quibus casibus differentialia prae finitis quantitatibus rejicere liceat; hoc scilicet fieri potest, si valor absolutus quantitatis cujuspiam finitae investigatur. Verum si quantitas ejusmodi sit definienda, cujus deinde discrimen ab alia finita sibi aequali considerari debeat, isthac rejectione uti non licebit. Non magis enim pro valore lineae VP accipi potest $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, cum sit revera $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi} + \frac{dx\,d\varphi\cos\varphi}{d\varphi}$, quam pro $Ap = x + dx$ valor x. Quoniam enim comparatio inter infinite parva est instituenda, etsi ea revera sint nulla, tamen suis debitis expressionibus designari debent, ut comparatio institui possit. Contra vero in determinando valore lineolae Mn pro PV recte adhibitus est valor $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, quia nusquam differentia inter eam et aliam sibi aequalem in computum ingreditur.

25. Cum in triangulo Mnm sit $Mn = dx + \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi}$ et $mn = dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$ atque ang. $Mnm = \varphi$, erit area hujus trianguli

$$= \frac{1}{2} Mn \,.\, mn \sin\varphi = \frac{(dx\sin\varphi + y\,d\varphi)(dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi)}{2\sin\varphi},$$

quae quia est differentialis secundi ordinis, prae differentialibus primi ordinis evanescit. Quare si hujus curvae area APM ponatur $= u$, erit

$$du = \text{trapezio } PMnp = \frac{1}{2}(Pp + Mn)\,MQ,$$

unde erit

$$du = y\,dx\sin\varphi + \frac{1}{2}yy\,d\varphi.$$

Si porro arcus curvae AM dicatur $= s$, erit $ds = Mm$, cujus valor ex triangulo Mnm reperitur

$$= \sqrt{(Mn^2 - 2\,Mn.mn.\cos\varphi + mn^2)} = \sqrt{(dx^2 - 2\,dx\,dy\cos\varphi + dy^2 + 2y\,dx\,d\varphi\sin\varphi + y^2\,d\varphi^2)} = ds.$$

Definiamus nunc quoque normalem MN in curvam, quae ex coordinatis superioribus $AQ = p$, $QM = q$, ita est assignata ut sit

$$QN = \frac{q\,dq}{dp} = \frac{y\sin\varphi\,(dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi)}{dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi},$$

qui valor a $PQ = y\cos\varphi$ subtractus relinquit:

$$PN = \frac{y\,(dx\cos\varphi - dy)}{dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi}.$$

26. Denique notari meretur pro quavis abscissa punctum V, ex quo applicatae divergunt; erit autem

$$PV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi} \quad \text{et recta} \quad MV = y + \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}.$$

Ad hoc punctum alio modo determinandum demittatur ex eo in axem perpendiculum VX, eritque ob $PV = \frac{dx \sin\varphi}{d\varphi}$ et $VPX = \varphi$, $VX = \frac{dx \sin^2\varphi}{d\varphi}$ et $PX = \frac{dx \sin\varphi \cos\varphi}{d\varphi}$; unde fit $AX = x + \frac{dx \sin\varphi \cos\varphi}{d\varphi}$. Cognito autem puncto hoc V, subtangens PT ita definietur, ut sit $PT = \frac{y \cdot MV \cdot d\varphi}{dy \sin\varphi + y\, d\varphi \cos\varphi}$. Hinc apparet, si fuerit $x = a + \frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$, ob $dx = -\frac{b\, d\varphi}{\sin^2\varphi}$, fore $VX = -b$ et $AX = a$, ita ut hoc casu omnes applicatae se mutuo constanter in eodem puncto V decussent. Quod idem quoque hinc intelligitur, si ob punctum V constans ponatur $AX = a$ et $VX = -b$, erit enim $PV = -\frac{b}{\sin\varphi}$ et $PX = -\frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$; ideoque $AP = x = a + \frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$, uti ante assumseramus.

27. Cum relatio inter abscissam $AP = x$ et angulum $APM = \varphi$ data ponatur, ex ea cognoscetur pro quavis abscissa $AP = x$ (Fig. 16) punctum V, quia est $PV = \frac{dx \sin\varphi}{d\varphi}$, hincque tangentis TM positio ita simplicius exprimitur, ut sit $PT = \frac{MV \cdot y\, d\varphi}{dy \sin\varphi + y\, d\varphi \cos\varphi}$. Ponamus nunc applicatam $PM = y$ perpetuo esse constantis magnitudinis, ex qua hypothesi conchois vulgaris resultat, si punctum V statuatur fixum. Quamvis autem hoc punctum V utcunque sit variabile, dummodo sit $PM = y = c$, tamen tangens expedite determinatur; nam ob $dy = 0$, erit $PT = \frac{MV}{\cos\varphi}$. Ducatur ergo ad MV normalis MS, et per V axi AP parallela VS, illi MS occurrens in S, erit $VS = \frac{MV}{\cos\varphi}$, quare si ex S rectae VM parallela agatur ST, fiet $PT = \frac{MV}{\cos\varphi}$, atque recta MT curvam in puncto M tanget. Hinc si punctum V praeterea statuatur fixum, tangens conchoidis facillime invenitur.

28. Si natura curvae exprimatur aequatione inter rectam CM (Fig. 17) ex puncto quodam fixo C ad curvam ductam, et angulum ACM, quem ista recta CM cum recta data CA pro axe assumta constituit, hic casus quidem in praecedente continebitur; verum quia saepissime natura curvarum hoc modo exhiberi solet, methodum ducendi tangentes hic seorsim trademus. Sit igitur recta $CM = y$ et angulus $ACM = \varphi$; concipiatur ducta proxima Cm, erit $Cm = y + dy$ et $ACm = \varphi + d\varphi$, ideoque angulus $MCm = d\varphi$. Centro C radio CM describatur arculus Mn, qui cum sit infinite parvus, pro lineola recta haberi poterit, quae simul in Cm erit perpendicularis. Erit ergo $mn = dy$, et cum sit $\frac{Mn}{CM} = d\varphi$, erit $Mn = y\, d\varphi$, atque triangulum Mnm erit rectilineum simulque ad n rectangulum, cujus hypotenusa Mm producta dabit positionem tangentis MT.

29. Demittatur nunc ex C in tangentem MT perpendiculum CP, et si triangula CmP, Mmn inter se comparentur, ea similia deprehendentur, propterea quod ambo sunt rectangula et angulum ad m communem habent. Quia vero triangulum CMP a triangulo CmP infinite parum tantum, hoc est nihil differt, triangulum quoque CMP simile erit triangulo Mnm. Cum igitur in triangulo Mmn sit $Mm = \sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}$, erit $Mm : CM = Mn : CP = mn : MP$ ideoque

$$CP = \frac{yy\, d\varphi}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}} \quad \text{et} \quad MP = \frac{y\, dy}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}}.$$

Si ergo super CM tanquam diametro describatur semicirculus, in eoque ex M corda applicetur

$$MP = \frac{y\, dy}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}},$$

dabit ea tangentem curvae in puncto M.

30. Alio autem modo facilius punctum T in axe inveniri potest, per quod tangens MT transeat. In hunc finem ducatur per M recta Mt axi parallela, atque ob angulum $CMt = \varphi$, et $Mtm = \varphi + d\varphi$, in triangulo CMt erit

$$\sin Mtm : CM = \sin MCt : Mt = \sin CMt : Ct$$
$$\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi : y = d\varphi : \frac{yd\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = \sin\varphi : \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi}$$

Erit ergo $Mt = \frac{yd\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = \frac{yd\varphi}{\sin\varphi}$; quia enim differentia lineolae Mt ab alia sibi aequali nusquam in computum venit, in denominatore terminum $d\varphi\cos\varphi$ prae $\sin\varphi$ tuto rejicimus. At cum Ct subtrahere debeamus ab Cm, et differentia haec ipsa sit infinite parva, praecedentem omissionem facere non licet, eritque $Ct = \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = y - \frac{yd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Quare cum sit

$$Cm = y + dy, \text{ fiet } mt = dy + \frac{yd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Nunc igitur triangula mtM et MCT similia dabunt $mt : Mt = MC : CT$, unde obtinetur

$$CT = \frac{yyd\varphi}{dy\sin\varphi + yd\varphi\cos\varphi}.$$

* 31. Exprimatur nunc (Fig. 18) natura curvae BM aequatione inter rectam CM, ex puncto quodam fixo C ad curvam ductam, et portionem rectae AP positione datae, quae a recta illa CM abscinditur. Consideratur scilicet haec recta AP instar axis, in quo punctum A, ubi recta CA ad axem est normalis, pro initio assumatur, voceturque $AP = x$ et $CM = y$. Ducatur recta Cm ipsi CM proxima, eritque $Ap = x + dx$, ideoque $Pp = dx$ et $Cm = y + dy$. Jam ex triangulo CAP rectangulo, posito $CA = a$, erit $CP = \sqrt{(aa + xx)}$, et ex natura differentialium

$$Cp = \sqrt{(aa + xx)} + \frac{xdx}{\sqrt{(aa + xx)}}.$$

Hinc ducta Mn axi parallela, ob triangula CPp et CMn similia, erit $CP : CM = Pp : Mn = Cp : Cn$, unde fit

$$Mn = \frac{ydx}{\sqrt{(aa + xx)}} \quad \text{et} \quad Cn = y + \frac{yxdx}{aa + xx}.$$

Hanc ob rem erit $mn = dy - \frac{yxdx}{aa + xx}$. Cum nunc ducta tangente MT triangulum pmT ideoque et PMT simile sit triangulo nmM, erit $mn : Mn = PM : PT$, ideoque

$$PT = \frac{(y - \sqrt{(aa + xx)})ydx}{dy\sqrt{(aa + xx)} - \frac{yxdx}{\sqrt{(aa + xx)}}}.$$

32. Ponatur $PM = z$, dataque sit aequatio inter x et z, unde aeque ac in casu praecedente, curva cognoscetur et construetur. Erit ergo $y = z + \sqrt{(aa + xx)}$ et $dy = dz + \frac{xdx}{\sqrt{(aa + xx)}}$, quibus valoribus substitutis obtinebitur $PT = \frac{zdx(z + \sqrt{(aa + xx)})}{dz\sqrt{(aa + xx)} - zxdx : \sqrt{(aa + xx)}}$. Si statuatur z constans sive affirmativa, sive negativa, curva erit conchois vel exterior, vel interior; hocque casu si ponatur $z = c$ ob $dz = 0$, fiet $PT = \frac{c(c + \sqrt{(aa + xx)})}{-cx : \sqrt{(aa + xx)}} = \frac{-c\sqrt{(aa + xx)} - aa - xx}{x}$, seu erit $PT = -\frac{CM . CP}{AP}$, ita ut sit $AP : CP = CM : -PT$, unde pro tangente conchoidis invenienda eadem oritur constructio, quam jam ante dedimus.

* 33. Referatur nunc (Fig. 19) proposita curva EM ita ad duo puncta fixa A et B ceu polos, ut inde ad quodvis curvae punctum M ductis rectis AM et BM relatio inter istas rectas exprimatur aequatione

quacunque. Sit igitur $AM = x$, $BM = y$, et concipiatur punctum m ipsi M proximum, ad quod ductis rectis Am et Bm erit $Am = x + dx$ et $Bm = y + dy$. Tum centris A et B descriptis arculis Ma, Mb, qui cum sint infinite parvi, pro lineolis rectis in Am et Bm normalibus haberi poterunt, erit $ma = dx$ et $mb = dy$; sicque super communi hypotenusa Mm duo habebuntur triangula rectangula Mam et Mbm. Jam ex quovis tangentis puncto T demittantur in AM et BM perpendicula TP et TQ, quae cum quoque in Am et Bm futura sint normalia, erunt triangula Tpm seu TPM et Mam, itemque triangula Tqm seu TQM et Mbm inter se similia, ideoque $Mm : MT = ma : MP = mb : MQ$, unde erit $MP : MQ = ma : mb = dx : dy$. Cum igitur ex aequatione inter x et y detur ratio $dx : dy$, in eadem ratione capiantur intervalla MP et MQ; quo facto, ex punctis P et Q ad AM et BM normaliter ducantur PT et QT, sese in puncto T intersecantes, eritque recta MT curvae tangens in puncto M.

34. Quantitas autem elementi curvae Mm sequenti modo determinabitur: Sit angulus AMB seu $AmB = \varphi$, qui ex distantia punctorum AB dabitur; si enim ponatur haec distantia

$$AB = a, \quad \text{erit} \quad \cos\varphi = \frac{xx + yy - aa}{2xy}.$$

Tum juncta ab ob angulum $amb = \varphi$, erit $ab = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}$. Describatur nunc (Fig. 20) super diametro Mm semicirculus, erunt puncta a et b in ejus peripheria, et in cordam ab ex centro c demittatur perpendiculum cd, erit ang. $acd = amb = \varphi$, ideoque $\frac{ad}{ac} = \frac{ab}{Mm} = \sin\varphi$; hinc erit $Mm = \frac{ab}{\sin\varphi}$. Quare habebitur elementum curvae (Fig. 19) $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}}{\sin\varphi}$.

35. Invento elemento $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}}{\sin\varphi}$, reperietur $Ma = \frac{dx\cos\varphi - dy}{\sin\varphi}$ et $Mb = \frac{dx - dy\cos\varphi}{\sin\varphi}$, qui iidem valores geometrice quoque inveniuntur, si ex a in Bm, item ex b in Am demittantur perpendicula puta $a\alpha$ et $b\beta$, quae quidem in figura non sunt expressa. Erit autem

$$m\alpha = dx\cos\varphi \quad \text{et} \quad b\alpha = dx\cos\varphi - dy \quad \text{atque} \quad \frac{b\alpha}{Ma} = \sin\varphi,$$

similique modo erit $m\beta = dy\cos\varphi$ et $a\beta = dx - dy\cos\varphi$ atque $\frac{a\beta}{Mb} = \sin\varphi$. Jam ob triangula MPT et maM similia, si MP pro lubitu capiatur, atque ex P ad AM normalis usque ad tangentem MT ducatur, erit $ma : Ma = MP : PT$, ideoque $PT = MP \cdot \frac{dx\cos\varphi - dy}{dx\sin\varphi}$. Hinc ergo angulus AMT cognoscitur, quippe cujus tangens $= \frac{dx\cos\varphi - dy}{dx\sin\varphi}$; similique modo anguli BMT tangens erit $= \frac{dx - dy\cos\varphi}{dy\sin\varphi}$. Bisecetur angulus AMB recta MC, et cum sit angulus $AMC = \frac{1}{2}\varphi$, erit

$$\operatorname{tang} CMT = \frac{(dx - dy)\cos\frac{1}{2}\varphi}{(dx + dy)\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad \text{seu} \quad \operatorname{tang} CMT \cdot \operatorname{tang} AMC = \frac{dx - dy}{dx + dy}.$$

Quia vero est $\cos\varphi = \frac{xx + yy - aa}{2xy}$, erit $\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\frac{(x + y + a)(x + y - a)}{(a - x + y)(a + x - y)}}$, ideoque

$$\operatorname{tang} CMT = \frac{dx - dy}{dx + dy}\sqrt{\frac{(x + y + a)(x + y - a)}{(a - x + y)(a + x - y)}}.$$

Exemplum 1. Sit $mx + ny = b$, erit curva, si $m = \pm n$, sectio conica circa focos A et B descripta; in genere ergo cum sit $mdx + ndy = 0$, fiet $dx : dy = n : -m$. Quare sumtis in rectis AM, BM portionibus $MP : MQ = n : -m$, concursus normalium PT, QT in puncto T dabit

tangentem. Quod si autem angulus AMB ponatur $= \varphi$, erit

$$\operatorname{tang} AMT = \frac{n \cos\varphi + m}{n \sin\varphi} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} BMT = \frac{-n - m\cos\varphi}{m \sin\varphi}.$$

Ducta vero recta MC angulum AMB bisecante, erit $\operatorname{tang} CMT = \frac{(m+n)\cos\frac{1}{2}\varphi}{(n-m)\sin\frac{1}{2}\varphi}$; unde patet si $m = n$, quod fit in ellipsi, angulum CMT esse rectum; sin autem $m = -n$, quod fit in hyperbola, ipsa tangens MT angulum AMB bisecabit, uti ex elementis constat.

Exemplum 2. Sit $mxx + nyy = bb$, erit $mxdx + nydy = 0$, ideoque $dx : dy = ny : -mx$, unde si capiatur $MP : MQ = n . BM : -m . AM$, concursus perpendiculorum in T determinabit positionem tangentis MT. Posito autem angulo $AMB = \varphi$, qui ex aequatione $\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}$ datur, erit $\operatorname{tang} AMT = \frac{ny\cos\varphi + mx}{ny\sin\varphi}$ et $\operatorname{tang} BMT = \frac{-ny - mx\cos\varphi}{mx\sin\varphi}$. Dicatur ang $AMT = \theta$, ut sit $\operatorname{tang}\theta = \frac{ny\cos\varphi + mx}{ny\sin\varphi}$, et angulus $BAM = p$, ut sit $\cos p = \frac{a^2 + x^2 - y^2}{2ax}$, atque concipiatur recta CM ad tangentem MT normalis, erit angulus $AMC = 90^\circ - \theta$ et $BCM = 90^\circ - \theta + p$. Hinc erit $\sin BCM : AM = \sin AMC : AC$, seu $AC = \frac{x\cos\theta}{\cos(\theta - p)} = \frac{x}{\cos p + \sin p \operatorname{tang}\theta}$. At est $\sin\varphi : \sin p = a : y$, ideoque $\sin p = \frac{y\sin\varphi}{a}$, unde fit $\sin p \operatorname{tang}\theta = \frac{ny\cos\varphi + mx}{na} = \frac{mx}{na} + \frac{xx + yy - aa}{2ax}$, hincque porro $\cos p + \sin p \operatorname{tang}\theta = \frac{mx}{na} + \frac{x}{a} = \frac{(m+n)x}{na}$. Ex quibus efficitur $AC = \frac{na}{m+n}$ et $BC = \frac{ma}{m+n}$. Punctum ergo C in recta AB erit fixum, ex quo cum omnes rectae ad curvam ductae in eam simul sint normales, manifestum est hanc curvam esse circulum centro C descriptum; quod idem ex elementis facile demonstratur. Radius ergo hujus circuli erit recta CM, cujus longitudo reperitur ex analogia hac:

$$\sin AMC : AC = \sin p : MC, \quad \text{unde fit} \quad MC = \frac{na\sin p}{(m+n)\cos\theta} = \frac{ny\sin\varphi}{(m+n)\cos\theta}.$$

Est vero

$$\cos\theta = \frac{ny\sin\varphi}{\sqrt{(m^2x^2 + n^2y^2 + 2mnxy\cos\varphi)}}, \text{ seu } \cos\theta = \frac{ny\sin\varphi}{\sqrt{(m(m+n)xx + n(m+n)yy - mnaa)}} = \frac{ny\sin\varphi}{\sqrt{((m+n)bb - mnaa)}},$$

ergo erit radius

$$CM = \frac{\sqrt{((m+n)bb - mnaa)}}{m+n}.$$

Denique cum sit $dx : dy = ny : -mx$, erit elementum curvae

$$Mm = \frac{dx\sqrt{(n^2y^2 + m^2x^2 + 2mnxy\cos\varphi)}}{ny\sin\varphi} = \frac{dx\sqrt{((m+n)bb - mnaa)}}{ny\sin\varphi},$$

est vero

$$y\sin\varphi = \frac{\sqrt{(2(m+n)bbxx - 2n(m-n)aaxx - (bb - naa)^2 - (m+n)^2x^4)}}{2na}.$$

36. Referatur nunc quidem, ut ante, curva ad duos polos fixos A et B, quorum distantia sit $AB = a$; verum detur relatio inter angulos $BAM = p$ et $ABM = q$. Hinc angulus AMB, quem ante vocavimus φ, nunc erit $= 180^\circ - p - q$, ita ut sit

$$\sin\varphi = \sin(p + q) \quad \text{et} \quad \cos\varphi = -\cos(p + q).$$

Ex triangulo ergo AMB erit

$$AM = x = \frac{a\sin q}{\sin(p + q)} \quad \text{et} \quad BM = y = \frac{a\sin p}{\sin(p + q)}.$$

Hinc erit

$$\frac{dx}{a} = \frac{dq \sin p - dp \sin q \cos (p+q)}{\sin^2 (p+q)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{a} = \frac{dp \sin q + dq \sin p \cos (p+q)}{\sin^2 (p+q)},$$

qui valores in formulis supra inventis substituti dabunt

$$\text{tang}\, AMT = \frac{dp}{(dp+dq)\cot (p+q) - dq \cot q}, \quad \text{tang}\, BMT = \frac{dq}{dp \cot p - (dp+dq)\cot (p+q)}.$$

Quodsi autem tangens MT eousque producatur, donec cum AB producta concurrat, atque angulus iste ponatur $= t$, reperietur

$$\text{tang}\, t = \frac{dq \sin^2 p + dp \sin^2 q}{dq \sin p \cos p - dp \sin q \cos q}.$$

Ex hoc angulo t vicissim relatio inter incrementa angulorum p et q cognoscetur, erit enim

$$dp : dq = \sin p \sin (t - p) : \sin q \sin (t + q).$$

At elementum curvae, si in superiori expressione loco dx et dy valores hic inventi substituantur, reperietur

$$Mm = \frac{a\sqrt{(dp^2 \sin^2 q + dq^2 \sin^2 p - 2dp\,dq \sin p \sin q \cos (p+q))}}{\sin^2 (p+q)}.$$

Sin autem angulus AMB recta MC bisecetur, erit

$$\text{tang}\, CMT = \frac{dq \sin p - dp \sin q}{dq \sin p + dp \sin q} \cot \tfrac{1}{2}(p+q).$$

Exemplum. Sit summa angulorum p et q perpetuo eadem, puta $p+q=\theta$, seu $q=\theta-p$, erit

$$\text{tang}\, AMT = \frac{1}{\cot (\theta - p)} = \text{tang}\, q;$$

ideoque ang. $AMT =$ ang. ABM et ang. $t = p - q$, quae cum sit proprietas circuli, manifestum est curvam esse circulum per puncta ambo A et B transeuntem, quippe quae circuli proprietas ex elementis constat.

Caput III.

De tangentibus linearum curvarum, quae per alias lineas curvas utcunque determinantur.

1. Curvas, quarum tangentes in capite praecedente invenire docuimus, vel per coordinatas, sive orthogonales sive obliquangulas, vel per alias lineas rectas, utcunque ductas determinatas assumsimus, ita ut in determinationem illarum curvarum solae lineae rectae exclusis curvis ingrederentur. Cum autem saepenumero constructio linearum curvarum jam alias lineas curvas requirat, in hoc capite methodum trademus earum quoque linearum curvarum tangentes inveniendi, quarum natura per alias lineas curvas determinatur: quod, cum innumerabilibus modis fieri possit, hic tantum praecipuos commemorabimus, quibus tam plerarumque linearum adhuc tractatarum proprietates continentur, quam simul via aperiatur ad alias quasvis determinationum rationes enodandas.

2. Sit igitur (Fig. 21) data curva quaecunque AL ad axem AP applicatis LP sive normalibus sive ad datum angulum inclinatis relata. Ex hac autem curva ita generetur alia AM, ut ejus applicatae PM ad illius curvae applicatas PL datam teneant rationem, siquidem ad eandem abscissam AP referantur. Si jam ponamus curvae datae AL tangentes LT in quovis puncto L esse cognitas, hinc positionem

tangentium alterius curvae genitae AM investigemus. Ponamus igitur abscissam $AP = x$, quae utrique curvae est communis, applicatam curvae datae $PL = u$, ejus subtangentem $PT = t$, erit, sive applicatae sint normales sive ad datum angulum inclinatae, $t = \frac{udx}{du}$. Pro curva autem genita AM vocetur applicata $PM = y$; et quia ratio $PM:PL$ est constans, sit ea $= n:1$ eritque $y = nu$, unde, quicunque valor numero n tribuatur, ex curva data AL altera curva genita AM facile construitur.

3. Cum igitur sit $y = nu$, erit $dy = ndu$, ideoque elementa applicatarum mn et lk inter se eandem tenent rationem, quam ipsae applicatae. Subtangens itaque curvae genitae AM, quae est $= \frac{ydx}{dy}$, ob $y = nu$ et $dy = ndu$, abit in $\frac{udx}{du} = t$, unde patet utramque curvam AL et AM communem habere subtangentem PT, pro eadem abscissa AP, atque tangentes in L et M axi in eodem puncto T occurrere. Cum igitur curvae AM subtangens $PT = \frac{udx}{du}$ non a ratione $n:1$ pendeat, si ex curva AL infinitae hujusmodi curvae AM concipiantur genitae, omnes pro eadem abscissa AP eandem habebunt subtangentem. Si curva AL fuerit semicirculus, curvae hoc modo genitae erunt semi-ellipses super eodem axe descriptae, quae igitur omnes eandem habebunt subtangentem, uti constat.

4. Curvae autem datae erit subnormalis $PK = \frac{udu}{dx}$, curvae genitae autem subnormalis erit $PN = \frac{ydy}{dx}$. Cum igitur sit $y = nu$, erit $PN = \frac{nnudu}{dx}$, seu erit $PN:PK = nn:1 = PM^2:PL^2$; subnormales ergo multo magis sunt inaequales quam applicatae PM et PL. Porro cum areae APL elementum sit $= udx$, et areae APM elementum $= ydx = nudx$, haec elementa arearum eandem inter se rationem tenent, quam ipsae applicatae, quae quia est constans, areae quoque ipsae eandem inter se rationem habebunt, eritque area APM: aream $APL = n:1$. Quare si curvae datae area APL assignari poterit, curvae quoque genitae APM area habebitur. Hinc si area circuli exhiberi posset, omniumque quoque ellipsium areae forent cognitae: Secus vero est comparata ratio arcuum AL et AM, illius enim si applicatae sint orthogonales, elementum est $Ll = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$, hujus vero $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + nndu^2)}$, cujus ad illud ratio non est constans, neque ideo ex rectificatione curvae AL rectificatio curvae AM cognoscitur.

5. Ex his jam facile perspicitur, quemadmodum curvae genitae AM tangens MT inveniri debeat, si applicata $PM = y$ rationem quamcunque variabilem ad applicatam $PL = u$ habeat, seu si y fuerit functio quaecunque non solum ipsius u, sed etiam ipsarum x et u conjunctim. Sit enim differentiali sumto $dy = Pdx + Qdu$, erit curvae genitae AM subtangens $= \frac{ydx}{Pdx + Qdu}$, et subnormalis $= \frac{y(Pdx + Qdu)}{dx}$. At si curvae datae AL ponatur subtangens $\frac{udx}{du} = t$, ut sit $dx:du = t:u$, per quantitates finitas reperietur curvae genitae AM subtangens $AT = \frac{ty}{Pt + Qu}$, et subnormalis $PN = Py + \frac{Quy}{t}$. Ex quibus formulis saepe concinnae constructiones elici possunt: ita si fuerit $yy = aa + uu$, ideoque $ydy = udu$ et $\frac{ydy}{dx} = \frac{udu}{dx}$, curva data AL et genita AM communem habebunt subnormalem.

6. Neque etiam inventio tangentis fit difficilior, si (Fig. 22) ipse arcus AL curvae datae in expressionem applicatae PM ingrediatur. Ponamus curvam AM ex curva data AL ita formari, ut perpetuo sit applicata $PM = PL +$ arcu AL. Sic autem curva AM erit cyclois, si pro curva data AL accipiatur circulus centrum in axe AP habens. Sit vero curva AL quaecunque, ac ponatur abscissa ejus $AP = x$, applicata $PL = u$ et arcus $AL = s$, erit ejus elementum $ds = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$, siquidem applicatae statuantur ad axem AP perpendiculares. Atque si hujus curvae normalis ducatur LJ, erit

$$PJ = \frac{udu}{dx} \quad \text{et} \quad LJ = \frac{u\sqrt{(dx^2 + du^2)}}{dx} = \frac{uds}{dx}.$$

Ex A erigatur ad axem normalis AQ, ducaturque $LQ = AP = x$, erit $AQ = u$, cui tangens LR occurrat in R, erit ob similitudinem triangulorum LPJ et LQR, $QR = \frac{xdu}{dx}$ et $LR = \frac{xds}{dx}$, unde relatio differentialium dx, du et ds per lineas finitas LP, PJ, LJ seu LQ, QR, LR exprimetur.

7. Cum jam ponamus esse $PM = PL + AL = u + s$, quoniam et curvae genitae abscissa est $AP = x$, ponatur ejus applicata $PM = y$, eritque $y = u + s$ et $dy = du + ds$. Ducta itaque tangente MT, erit subtangens $PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{ydx}{du + ds}$. Cum autem differentialibus dx, du, ds sint proportionales rectae LQ, QR, LR, erit $PT = \frac{PM.LQ}{QR + LR}$. Jungatur ergo ipsi QR in directum $RS = LR$, ut sit $QS = QR + LR$, erit $PT = \frac{PM.LQ}{QS}$, seu $QS : LQ = PM : PT$, unde patet triangula SQL et MPT esse similia, ideoque tangentem MT rectae LS parallelam. Si curva AL sit circulus, erit $RA = LR$, ac recta LS fiet corda LA, cui igitur tangens cycloidis MT erit parallela, uti constat.

8. Inventa positione tangentis MT sponte se offert positio normalis MN; interim tamen immediate satis succincte exhiberi potest. Cum enim sit subnormalis $= \frac{ydy}{dx}$, erit

$$\text{tang } PMN = \frac{dy}{dx} = \frac{du + ds}{dx}.$$

Differentialibus autem dx, du, ds proportionales sunt rectae LP, PJ, LJ, quibus loco differentialium substitutis erit

$$\text{tang } PMN = \frac{PJ + LJ}{LP}.$$

Sumatur ergo in axe $JK = LJ$, erit $PK = PJ + LJ$, et jungatur LK, eritque

$$\text{tang } PMN = \frac{PK}{LP} = \text{tang } PLK.$$

Prodit ergo angulus $PMN =$ ang. PLK, ideoque normalis MN parallela est rectae LK. Quodsi ergo curva AL fuerit circulus, erit J ejus centrum, LJ radius, ideoque K altera diametri extremitas, ad quam si ducatur corda LK, erit ei constanter parallela recta MN, quae ad cycloidis punctum M ducitur normalis.

9. Ponamus jam (Fig. 23) ex curva data am formari aliam AM ita, ut etiam abscissae varientur. Sit in curva proposita am abscissa $ap = t$, applicata $pm = u$, ideoque subtangens $pt = \frac{udt}{du}$ et subnormalis $pn = \frac{udu}{dt}$, siquidem coordinatae t et u fuerint normales. In curva autem formata AM vocentur coordinatae $AP = x$, $PM = y$, unde fit subtangens $PT = \frac{ydx}{dy}$ et subnormalis $PN = \frac{ydy}{dx}$.

Ponamus igitur primo curvam AM ex data am ita formari, ut tam abscissae quam applicatae eandem perpetuo teneant rationem: sit scilicet $x=nt$ et $y=nu$, qua proprietate continetur natura similitudinis, ita ut curva AM similis futura sit curvae am punctaque M et m homologa. Cum igitur sit quoque $dx=ndt$ et $dy=ndu$, erit

$$PT=\frac{nudt}{du} \text{ et } PN=\frac{nudu}{dt}, \text{ seu } PT=n.pt \text{ et } PN=n.pn,$$

quemadmodum natura similitudinis postulat.

10. Sin autem utraque quidem ratio $AP:ap$ et $PM:pm$ fuerit constans, sed non eadem, scilicet $x=mt$ et $y=nu$, curvae non erunt similes, sed tamen arcta quadam affinitate ita conjunguntur, ut eas affines appellari conveniat. In his igitur curvis cum sit $dx=mdt$ et $dy=ndu$, habebitur $\frac{ydx}{dy}=\frac{mudt}{du}$ et $\frac{ydy}{dx}=\frac{nnudu}{mdt}$. Erit itaque $PT=m.pt$, seu $PT:pt=AP:ap$, ita ut subtangentes ipsam rationem abscissarum teneant. Verum ob $PN=\frac{nn}{m}\cdot pn$, erit

$$PN:pn=PM^2.ap:pm^2.AP \quad\text{seu}\quad \frac{AP.PN}{PM^2}=\frac{ap.pn}{pm^2}.$$

Porro cum elementum areae APM sit $ydx=mnudt$, erit ipsa area APM ad aream apm ut mn ad 1, hoc est ut $AP.PM$ ad $ap.pm$. Elementum autem ipsius arcus AM, quod est

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(m^2dt^2+n^2du^2)}$$

non tenet constantem rationem ad elementum arcus am, quod est $=\sqrt{(dt^2+du^2)}$, praeter casum $m=n$, quo affinitas in similitudinem abit. Hoc autem casu manifestum est esse $AM:am=AP:ap$.

11. Contemplemur nunc (Fig. 24) applicatas CM ex puncto quodam fixo C exeuntes, sitque data quaecunque curva BL, cujus tangentes QL cuique applicatae CL respondentes constent. Tum ex hac curva formetur alia AM hac lege, ut intervallum LM in recta CL producta sumtum semper aequale capiatur rectae cuidam datae, eritque curva AM ex conchoidum genere, quia, si curva data BL sumatur recta, hoc modo prodit conchois vulgaris. Quo igitur curvae AM hac ratione ex curva data BL formatae tangens MP definiatur, ponatur in curva data $CL=y$ et angulus $CLQ=\theta$, ita ut demisso ex C in tangentem LQ perpendiculo CQ, sit $CQ=y\sin\theta$ et $LQ=y\cos\theta$. Deinde ponatur intervallum constans $LM=a$, ut sit curvae quaesitae applicata $CM=a+y$; angulus vero CMP, quem tangens MP cum CM constituit, vocetur $=\varphi$, ita ut ducta CP ad tangentem MP normali, sit $CP=(a+y)\sin\varphi$ et $MP=(a+y)\cos\varphi$.

12. Concipiatur jam ducta applicata proxima Clm, centroque C describantur arculi $L\lambda$ et $M\mu$ pro rectis habendi; ob $lm=LM=a$ et $\lambda\mu=LM=a$, erit $m\mu=l\lambda=dy$; atque ob triangula similia $CL\lambda$ et $CM\mu$ erit $M\mu:L\lambda=CM:CL=a+y:y$. Cum igitur sit

$$\text{tang}\, Mm\mu=\text{tang}\, CMP=\text{tang}\,\varphi=\frac{M\mu}{m\mu}, \text{ et } \text{tang}\, Ll\lambda=\text{tang}\, CLQ=\text{tang}\,\theta=\frac{L\lambda}{l\lambda},$$

erit

$$\text{tang}\,\varphi:\text{tang}\,\theta=\frac{M\mu}{m\mu}:\frac{L\lambda}{l\lambda}=M\mu:L\lambda=a+y:y;$$

ideoque

$$\text{tang}\,\varphi=\frac{(a+y)}{y}\text{tang}\,\theta.$$

Hinc ergo definitur tangens anguli CMP, cum sit $\tang CMP : \tang CLQ = CM : CL$; ideoque positio tangentis MP determinatur. Seu erit

$$\frac{CP}{MP} : \frac{CQ}{LQ} = CM : CL, \text{ vel } \frac{CM \cdot MP}{CP} = \frac{CL \cdot LQ}{CQ}.$$

Ideoque inventio tangentis MP ad resolutionem et constructionem problematis geometrici est perducta.

13. Commoda autem hinc constructio sequenti modo adornari potest. (Fig. 25) Ad applicatam CLM in C constituatur perpendicularis CRS tangentem curvae datae LR secans in R, erit

$$\frac{CR}{CL} = \tang CLR = \tang \theta.$$

Tum per M ducatur recta MS ipsi LR parallela, erit

$$CL : CM = CR : CS, \text{ ideoque } CS = \frac{CM \cdot CR}{CL}.$$

Quodsi jam ducatur recta LS, erit $\tang CLS : \tang CLR = CS : CR = CM : CL$, hincque fiet

$$\tang CLS = \frac{CM}{CL} \tang CLR = \frac{a+y}{y} \tang \theta.$$

Quamobrem erit $\tang CLS = \tang \varphi$, ideoque $CLS = \varphi$, angulus ergo CMT aequalis esse debet angulo CLS. Hinc per M ducatur rectae LS parallela MT, eritque haec MT tangens curvae formatae AM. Sicque facilis modus omnium curvarum conchoidalium tangentes inveniendi habetur: ducatur scilicet ad CM normalis CS, et per M tangenti LR parallela MS, junctaeque rectae LS per M ducatur parallela MT, erit haec tangens quaesita.

14. Prodit ergo haec succincta tangentium constructio, si intervallum LM perpetuo datae magnitudinis capiatur; sin autem LM ad applicatam CL in data ratione sumeretur, manifestum est curvam AM ipsi BL similem esse futuram, atque tangentes in punctis L et M fore parallelas. Generatim autem problema ita proponi posset, ut sumta $CM =$ functioni cuicunque ipsius CL, positio tangentis, in M investigaretur, neque solutio difficilior foret (Fig. 24). Positis enim

$$CL = y, \text{ ang}. CLQ = \theta \text{ atque } CM = z \text{ et ang}. CMP = \varphi, \text{ erit } l\lambda = dy \text{ et } m\mu = dz.$$

Hinc fiet $$\tang Ll\lambda = \tang \theta = \frac{L\lambda}{dy} \text{ et } \tang Mm\mu = \tang \varphi = \frac{M\mu}{dz},$$

unde habebitur haec analogia

$$\tang \varphi : \tang \theta = \frac{M\mu}{dz} : \frac{L\lambda}{dy} = \frac{z}{dz} : \frac{y}{dy} = \frac{z\,dy}{y\,dz} : 1, \text{ ob } M\mu : L\lambda = z : y,$$

ita ut sit $$\tang \varphi = \frac{z\,dy}{y\,dz} \tang \theta.$$

Quare si constituta (Fig. 25) CR ad CL normali, capiatur $CR : CS = 1 : \frac{z\,dy}{y\,dz}$, recta LS parallela erit tangenti quaesitae MT.

15. Huc quoque referendae sunt ejusmodi curvarum descriptiones, ubi recta CM non functioni ipsius applicatae CL, sed functioni arcus BL curvae datae aequalis assumitur. Ex quo genere imprimis sunt notatu dignae eae curvae, quae hoc modo ex circulo nascuntur. Sit itaque curva data

circulus (Fig. 26), cujus centrum in ipso puncto C sit positum. Detur igitur circulus ABE centro C descriptus, cujus radius AC ponatur $= a$, sumtoque puncto A pro initio, a quo arcus AS computentur, ponatur arcus $AS = s$, ac per S agatur recta CSM aequalis functioni cuicunque arcus AS; sicque puncta M posita erunt in quadam curva CMD hoc modo describenda, cujus tangentes in singulis punctis M determinari oporteat. Manifestum autem est hujusmodi curvas CMD fore transcendentes, cum earum constructio a rectificatione circuli pendeat. Atque ex hoc genere nonnullae lineae curvae a geometris diligentius sunt exploratae et propriis nominibus distinctae, quas hic evolvi conveniet.

16. Primum ergo ponamus rectam CM perpetuo ipsi arcui AS proportionalem capi, sicque orietur curva CMD a primo inventore spiralis Archimedea appellata. Haec enim curva, postquam ex C exierit, spiris continuo divergentibus in infinitum gyratur. Deinde arcubus AS sumtis negativis, haec constructio praebebit alterum curvae ramum CN priori CM similem et aequalem, ita ut recta CD ad AC normaliter constituta hujus curvae futura sit diameter. Cum igitur positis

$$AC = a,\quad AS = s \text{ et } CM = y,\ \text{sit } y = \frac{bs}{a}.$$

Si tota peripheria hujus circuli ponatur $= c$, sumtis arcubus s, $c + s$, $2c + s$, $3c + s$, etc., rectae CM respondentes eandem positionem tenebunt, atque ideo recta CM producta spiralem in infinitis punctis secabit, seu longitudo CM infinitos habebit valores, qui erunt

$$\frac{bs}{a},\ \frac{b(c+s)}{a},\ \frac{b(2c+s)}{a},\ \frac{b(3c+s)}{a},\ \text{etc.},$$

ideoque in progressione arithmetica, cujus differentia est $= \frac{bc}{a}$ procedunt, quae est proprietas palmaria hujus spiralis Archimedeae.

17. Ad tangentem hujus curvae inveniendam consideretur radius proximus Cm, ducaturque arculus $M\mu$. Jam ob $Ss = ds$, erit

$$M\mu = \frac{yds}{a} = \frac{bsds}{aa} \text{ et } m\mu = dy = \frac{bds}{a},$$

ex quo fiet
$$m\mu : M\mu = 1 : \frac{s}{a}.$$

Quare si ad radium SC normalis jungatur $CV =$ arc $AS = s$, erit $CS : CV = a : s = m\mu : M\mu$, ideoque angulus VSC aequalis erit angulo $Mm\mu = CMT$. Hinc si rectae SV per M parallela ducatur MT, haec tanget spiralem Archimedeam in puncto M. Facilius autem normalis ad curvam MO definitur: Si enim recta CO sit ad CM normalis, erit

$$M\mu : m\mu = MC : CO, \text{ hoc est ob } MC = \frac{bs}{a}, \text{ erit } s : a = \frac{bs}{a} : CO, \text{ unde fit } CO = b.$$

Quare si radio MC perpetuo normaliter jungatur recta $CO = b$, tum recta MO erit in curvam normalis. Ceterum cum sit tang $CMT = \frac{s}{a}$, perspicuum est angulum CMT, quem radius CM cum curva facit, continuo crescere: in ipso enim puncto C, pro quo fit $AS = 0$, hic angulus evanescit, ideoque ipsa recta CA ibi spiralem tanget. In puncto D, ubi fit $s = \frac{1}{4}c$ et $\frac{s}{a} = 1{,}5707963$, angulus CDM fit $= 57^\circ\, 31'\, 6''\, 6'''$. Deinceps hi anguli continuo fiunt majores, atque in spiris infinitesimis cum rectis confunduntur.

18. Exhibiri quoque potest pro hac curva aequatio ad perpendiculum CQ ex C in tangentem MT demissum. Si enim ponatur $CQ = p$ et $MQ = q$, ut sit $pp + qq = yy$, quia est

$$\frac{p}{q} = \frac{M\mu}{m\mu} = \frac{s}{a}, \text{ ob } \frac{s}{a} = \frac{y}{b} \text{ erit } \frac{p}{q} = \frac{y}{b} \text{ seu } bp = qy \text{ vel } y = \frac{bp}{\sqrt{(yy - pp)}},$$

unde fit $$y^4 = (bb + yy)\,pp \quad \text{atque} \quad p = \frac{yy}{\sqrt{(bb+yy)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{by}{\sqrt{(bb+yy)}}.$$

Quin etiam aequatio transcendens inter coordinatas orthogonales $CP = x$ et $PM = z$ dari poterit. Ponatur enim angulus

$$ACS = \frac{s}{a} = \varphi, \text{ erit } y = b\varphi \text{ et } \frac{x}{z} = \operatorname{tang}\varphi, \text{ itemque } \frac{x}{y} = \sin\varphi \text{ et } \frac{z}{y} = \cos\varphi,$$

unde fit $$\frac{ydx - xdy}{yy} = d\varphi \cos\varphi = \frac{zd\varphi}{y}.$$

At est $$d\varphi = \frac{dy}{b}, \text{ ergo } ydx - xdy = \frac{yzdy}{b}.$$

Jam vero est

$$yy = xx + zz, \text{ hincque } ydy = xdx + zdz,\ dy = \frac{xdx + zdz}{\sqrt{(xx+zz)}},$$

atque $$ydx - xdy = \frac{zzdx - xzdz}{\sqrt{(xx+zz)}} = \frac{z(xdx + zdz)}{b}.$$

Quamobrem inter coordinatas x et z haec eruitur aequatio differentialis $\frac{zdx - xdz}{\sqrt{(xx+zz)}} = \frac{xdx + zdz}{b}$, quae naturam spiralis Archimedeae exprimit.

19. Quemadmodum ante applicatae CM arcui AS directe proportionales sunt positae, ita nunc easdem arcubus reciproce proportionales statuamus. Sit igitur (Fig. 27) arcus circuli $CA = a$, arcus $AS = s$ et curvae quaesitae applicata $CM = y$, erit pro hac curva $y = \frac{ab}{s}$, seu $CM \cdot AS = ab$; ob cujus aequationis similitudinem cum hyperbola ad asymtotos relata, haec curva a Cel. Joh. Bernoullio spiralis hyperbolica est appellata. Cum igitur posito $s = 0$ fiat $y = \infty$, evidens est radium CA productum cum curva in infinito convenire. Dehinc crescentibus arcubus s, applicatae $CM = y$ continuo decrescunt, neque tamen penitus evanescent, nisi fiat $s = \infty$, ex quo perspicitur hanc curvam infinitis gyris circa centrum C serpere, qui perpetuo fiant minores, donec tandem post infinitos circumitus in ipsum centrum incidant. Porro etiam sumtis arcubus negativis, uti casu praecedente intelligitur, radium CB similiter fore asymtoton, rectamque ex C ad AB normaliter erectam fore hujus curvae diametrum.

20. Jam ad tangentes hujus curvae inveniendas ducatur applicata proxima $Cm = y + dy$, erit $M\mu = -dy$; et ob $Ss = ds$ fiet $m\mu = \frac{yds}{a}$, ideoque erit $M\mu : \mu m = -dy : \frac{yds}{a}$. Cum igitur sit $y = \frac{ab}{s}$, erit $dy = \frac{-abds}{ss}$, ideoque $M\mu : \mu m = \frac{ab}{ss} : \frac{b}{s} = a : s$. Ducatur ad radium CM normalis CT tangenti occurrens in T, eritque ob triangula similia $M\mu m$ et MCT, $MC : CT = a : s$. Quare per S ducatur tangenti parallela SV, erit $CS : CV = a : s$, unde ob $CS = a$, erit $CV = s = AS$. Ac propterea vicissim si radio CS jungatur normalis $CV =$ arcui AS, rectaeque SN parallela

agatur MT, erit haec tangens curvae in puncto M. Vel facilius, cum sit

$$CM = \frac{ab}{s}, \quad \text{erit} \quad CM : CT = a : s = \frac{ab}{s} : b.$$

Hincque fit $CT = b$. Ergo perpetuo radio MC normaliter jungatur $CT = b$, eritque MT tangens curvae. Anguli itaque CMT, quem radius CM cum curva facit, tangens erit $= \frac{s}{a}$. Hic ergo angulus continuo fit major, et postquam curva circa C infinitas spiras absolverit, tandem abibit in rectum, ultimaeque spirae fient circulares.

21. Si hujus curvae aequatio ad perpendiculum CQ ex C in tangentem demissum desideretur, vocetur $CQ = p$ et $MQ = q$, ut sit $pp + qq = yy$. Erit ergo $\frac{p}{q} = \tang CMT = \frac{s}{a}$; sed quia est $y = \frac{ab}{s}$, erit $\frac{s}{a} = \frac{b}{y}$, ideoque habetur $\frac{p}{q} = \frac{b}{y}$ et $py = bq$, seu $ppyy = bbyy - bbpp$, sicque erit $p = \frac{by}{\sqrt{(bb + yy)}}$ et $y = \frac{bp}{\sqrt{(bb - pp)}}$. Patet ergo perpendiculum p perpetuo minus esse recta constanti b; factoque $y = \infty$, quo casu punctum M per E in infinitum removetur, fore $p = b$. Non itaque haec curva in infinito cum asymtota CF ita convenit, ut ipsa recta CF ejus fiat tangens; proprie ergo non tam ipsa recta CF, sed alia recta huic ad intervallum $= b$ parallela erit istius curvae asymtota. Sit JK ista recta intervallo $= b$ ab AB ducta, atque curva, secus ac figura indicat, ad hanc lineam continuo propius accedet, atque in infinito ab ea tangetur, neque etiam usquam habebit punctum flexus contrarii.

22. Ex hoc casu liquet, nonnunquam summa circumspectione opus esse, si ex sola curvarum genesi earum asymtotas definire velimus. Quod quo clarius perspiciatur, lineam AS fingamus rectam ad CF normalem, continuoque rectam CM ita accipi, ut rectangulum $CM \cdot AS$ sit constans, ex quo sequi videtur si sumatur $AS = 0$, quia fit CM infinita, hanc in ipsam rectam CF incidere, curvaeque fore asymtotam. Rem autem secus se habere ex eo statim liquet, quod distantiae PM continuo crescant, decrescentibus AS. Sit enim $CP = x$, $PM = z$ et $AC = a$, erit $AS = \frac{az}{x}$ et $CM = \sqrt{(xx + zz)}$, unde erit $z\sqrt{(xx + zz)} = bx$ atque $xx = \frac{z^4}{bb - zz}$. Hinc ergo perspicuum est non posito $z = 0$, sed facto $z = b$ fieri $x = \infty$, etiamsi hoc casu intervallum

$$AS = \frac{az}{x} = \frac{a\sqrt{(bb - zz)}}{z} \text{ fiat } = 0;$$

ideoque rectam JK ipsi CF parallelam et ab ea intervallo $= b$ distantem fore veram asymtotam.

23. Cum ista curva algebraica confundetur igitur nostra spiralis hyperbolica in infinito circa asymtotam KJ, quia arcus AS minimus in rectam abit. Sin autem pro hac curva aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PM = z$ invenire velimus, ponamus angulum

$$ACS = \frac{s}{a} = \varphi, \quad \text{erit} \quad CM = y = \frac{b}{\varphi} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{b}{y} \text{ ideoque } d\varphi = -\frac{bdy}{yy}.$$

Erit vero $z = y \sin \varphi$ et $x = y \cos \varphi$, unde $\frac{ydz - zdy}{yy} = d\varphi \cos \varphi = \frac{xd\varphi}{y} = -\frac{bxdy}{y^3}$.

Hinc ergo habemus hanc aequationem $yydz - zydy + bxdy = 0$. Cum vero sit

$$yy = xx + zz,\ ydy = xdx + zdz \text{ et } dy = \frac{xdx + zdz}{\sqrt{(xx+zz)}},$$

erit
$$xxdz - xzdx + \frac{bx(xdx + zdz)}{\sqrt{(xx+zz)}} = 0,$$

quae per x divisa dat $zdx - xdz = \frac{b(xdx+zdz)}{\sqrt{(xx+zz)}}$, aequationem spiralis hyperbolicae naturam explicantem.

24. Consideremus nunc spiralem parabolicam, (Fig. 28) in qua sit perpetuo applicata CM radici quadratae ex arcu AS proportionalis. Posito igitur radio circuli $CA = a$, et arcu quocunque $AS = s$, sit $CM = y = \sqrt{2bs}$, et $m\mu = dy = \frac{bds}{\sqrt{2bs}} = \frac{bds}{y}$. Si ergo centro C describatur arculus $M\mu$, erit $M\mu = \frac{yds}{a}$ et $M\mu : m\mu = \frac{y}{a} : \frac{b}{y} = yy : ab = 2s : a$; unde erit tang $Mm\mu$ = tang $CMT = \frac{2s}{a}$, unde positio tangentis MT facile definitur. Sin autem ducatur ad spiralem normalis MN, atque radio CM jungatur normalis CN, erit $M\mu : m\mu = CM : CN$, hoc est $yy : ab = y : \frac{ab}{y}$, erit ergo

$$CN = \frac{ab}{y} \text{ seu } CM . CN = ab.$$

Crescente ergo arcu $AS = s$, angulus CMT continuo fit major, donec tandem post infinitas spiras fiat rectus. Ceterum manifestum est hanc curvam circa C duas habere partes CM et CL similes et alternatim positas.

25. Quamvis autem haec curva spiralis parabolicae nomen mereri videatur, tamen a Jac. Bernoullio hoc nomen aliae curvae est tributum, quae oritur, si axis parabolae juxta peripheriam circuli incurvetur, atque applicatae ad axem interea normales manere concipiantur. Qui modus generationis quo latius pateat, fingamus (Fig. 29, 30) curvae datae am axem as peripheriae circuli AS circumplicari ita, ut in curva hoc modo genita AM si capiatur arcus AS aequalis abscissae as, recta SM circulo normaliter insistens futura sit aequalis applicatae sm. Quod si ergo in curva proposita am ponatur abscissa $as = x$ et applicata $sm = z$, in curva autem descripta sit primo radius circuli $CA = a$, tum vero arcus $AS = s$ et recta $CM = y$; facto $AS = s = x$, erit

$$SM = sm = z, \text{ ideoque } CM = y = a + z.$$

Sicque ex aequatione inter x et z data dabitur aequatio pro curva AM inter $AS = s$ et $CM = y$. Patet autem si curva data am secundum axem as in infinitum excurrat, curvam genitam AM infinitis spiris circa centrum C circumvolvi, sicque ad spiralium genus pertinere.

26. Ad tangentem hujus curvae MT inveniendam consideretur radius proximus Cm, erit

$$m\mu = dy = dz \text{ et } M\mu = \frac{yds}{a} = \frac{(a+z)dx}{a}.$$

Hinc si in S ad radium CS normalis ducatur ST tangenti in T occurrens, ob triangula $mM\mu$ et MTS similia erit

$$m\mu : M\mu = MS : ST, \text{ seu } dz : \frac{(a+z)dx}{a} = z : \frac{(a+z)zdx}{adz}, \text{ ita ut sit } ST = \frac{(a+z)zdx}{adz}.$$

In curva autem data am est subtangens $st = \frac{zdx}{dz}$, unde erit $ST = \frac{a+z}{a} \cdot st$. Producatur ergo applicata ms in c, ut sit $cs = CS = a$, et ex c per t ducitur recta ct rectae mu, quae per m axi

as parallela sit acta, occurrens in u. Quoniam igitur est $cs = a$ et $cm = a + z$, erit $mu = \frac{a+z}{a} \cdot st$. Consequenter si recta ST aequalis statuatur isti lineae mu, recta MT tanget spiralem in puncto M.

27. Aliae spiralium tam parabolicarum quam hyperbolicarum species prodibunt, si recta CM indefinite cuipiam potestati arcus AS proportionalis statuatur. Si igitur posito radio circuli $AC = a$ (Fig. 26) vocetur arcus $AS = s$ et recta $CM = y$, formetur ista aequatio $y = Cs^n$. Hinc igitur erit $m\mu = dy = nCs^{n-1}ds$ et $M\mu = \frac{yds}{a} = \frac{Cs^n ds}{a}$, unde fit $m\mu : M\mu = na : s$, eritque ergo

$$\operatorname{tang} Mm\mu = \operatorname{tang} CMT = \frac{s}{na}.$$

Quare si tangenti MT per S parallela ducatur SV, quae rectae CV ad radium CS perpendiculariter ductae occurrat in V, erit $CV = a \operatorname{tang} CSV = \frac{s}{n}$. Unde si constituatur $CV = \frac{s}{n} = \frac{1}{n} AS$, hypotenusa SV erit tangenti MT parallela: sicque facillime in quovis harum spiralium puncto M positio tangentis definitur, ex qua porro rectas ad curvam vel normales, vel ad datum angulum inclinatas ducere in promtu est.

28. Hae autem curvae ad genus parabolicum pertinebunt, si exponens n fuerit numerus affirmativus, quibus casibus curvae initium in ipso centro C erit. Posito enim $s = 0$ fiet quoque $y = 0$, et cum anguli CMT tangens $\frac{s}{na}$ posito $s = 0$ evanescat, recta CA simul tangens erit curvae in puncto C. Dehinc curva continuo magis a centro C discedet, spirisque innumeris in infinitum extendetur. Sin autem n fuerit numerus negativus, posito $s = 0$, recta $CM = y$ fit infinita; unde crescente s continuo decrescunt et post infinitas spiras in centro C evanescunt. Neque vero, ut jam supra vidimus, recta CA, etsi in infinitum continuata, ad curvam pertingit, ideo erit curvae asymtota. Sed ad veram asymtotam inveniendam quantitatem perpendiculi CQ, quod ex C in tangentem curvae demittitur, definiri oportet; hujus enim quantitas, si ponatur $s = 0$, indicabit distantiam asymtotae verae KJ a recta CA (Fig. 27). Hanc autem asymtotam rectae CA esse parallelam exinde intelligitur, quod angulus, quem radius CM cum curva facit, evanescat posito $s = 0$.

29. Cum igitur anguli CMQ tangens inventa sit $= \frac{s}{na}$, erit ejus sinus $= \frac{s}{\sqrt{(nnaa + ss)}}$, ac propterea perpendiculum $CQ = \frac{sy}{\sqrt{(nnaa + ss)}} = \frac{Cs^{n+1}}{\sqrt{(nnaa + ss)}}$. Sit jam n numerus negativus, puta $= -m$, erit $CQ = \frac{Cs^{1-m}}{\sqrt{(mmaa + ss)}}$, ideoque distantia asymtotae KJ ab radio CA posito $s = 0$ erit $= \frac{Cs^{1-m}}{ma}$, unde perspicitur, si exponens m fuerit unitate minor, tum asymtotam KJ cum ipso radio CA producto convenire, quod ergo evenit in his spiralibus hyperbolicis $y = \frac{C}{s^m}$ si $m < 1$. Verum si $m = 1$, qui est casus spiralis hyperbolicae supra tractatae, erit intervallum inter asymtotam KJ et radium $CA = \frac{C}{a}$, uti jam supra invenimus. Sin autem exponens m fuerit unitate major, tum distantia asymtotae KJ erit infinita, neque adeo radius curvae ME in infinitum excurrens asymtotam habebit, sed ad genus ramorum parabolicorum pertinebit.

30. Inter curvas spirales, quas hactenus consideravimus, ultimum locum occupet spiralis logarithmica seu logistica, quae hac definitur proprietate, ut arcus circuli AS sit logarithmo rectae CM proportionalis. Si igitur posito radio circuli $AC = a$, vocemus arcum $AS = s$, et rectam

$CM = y$, aequatio inter s et y pro hac curva erit $s = bl\cdot\frac{y}{a}$; atque hinc si fiat $y = a$, erit $s = 0$, seu curva per ipsum punctum A, unde arcus AS computantur, transibit. Quodsi ergo signum l denotet logarithmos hyperbolicos, atque e numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $y = ae^{s:b}$. Crescentibus ergo s in ratione arithmetica, applicatae y in ratione geometrica augebuntur, sicque curva per J infinitis spiris a circulo recedet. Sin autem arcus s negativi capiantur versus E, distantiae y continuo decrescent, atque si $s = -\infty$, demum evanescent, unde haec curva quoque per infinitas spiras tandem in centrum C incidet.

31. Quaelibet ergo recta CM, e centro C educta, logarithmicam spiralem in infinitis punctis secabit. Posita enim tota circuli peripheria $= c$, recta CM in eandem positionem revertetur, si arcui AS sequentes valores tribuantur: s, $c+s$, $2c+s$, $3c+s$, $4c+s$, etc., itemque hi negativi $-c+s$, $-2c+s$, $-3c+s$, $-4c+s$, etc. Valores ergo rectae $CM = y$ per idem punctum M ductae erunt numero infiniti, scilicet

$$ae^{s:b},\quad ae^{(c+s):b},\quad ae^{(2c+s):b},\quad ae^{(3c+s):b},\quad ae^{(4c+s):b},\ \text{etc.}$$

item
$$ae^{-(c-s):b},\quad ae^{-(2c-s):b},\quad ae^{-(3c-s):b},\quad ae^{-(4c-s):b},\ \text{etc.}$$

Hi itaque valores progressionem geometricam constituunt, cujus denominator est $= e^{c:b}$, iique tam ascendendo quam descendendo in infinitum multiplicantur. Hanc curvam, quae plurimis elegantissimis proprietatibus abundat, primus investigavit Leibnizius, ac post eum Jacobus Bernoullius tantas in ea detexit praerogativas, ut eam ad suum symbolum adhibuerit.

32. Praecipua autem hujus curvae proprietas in tangentium lege est sita, quippe ex qua reliquae omnes facile consequuntur. Ad positionem ergo tangentis MQ inveniendam, concipiamus rectam $Cm = y + dy$ ipsi CM proximam, ductoque centro C arculo $M\mu$ erit $M\mu = \frac{yds}{a}$ et $m\mu = dy$. Cum autem sit $s = bl.\frac{y}{a}$ erit $ds = \frac{bdy}{y}$, ideoque $M\mu = \frac{bdy}{a}$, ex quo anguli $Mm\mu$ seu ipsius QMC tangens erit $= \frac{M\mu}{m\mu} = \frac{b}{a}$. Qui angulus cum sit constans, perspicuum est hanc curvam omnes radios CM sub eodem angulo secare. Istius igitur anguli CMQ erit sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$; unde si ex C in tangentem CQ demittatur perpendiculum CQ, erit $CQ = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $MQ = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Quodsi ergo fuerit $a = b$, angulus CMQ fiet semirectus, quo casu haec spiralis logarithmica semirectangula vocari solet.

33. Quia angulus $Mm\mu$ est constantis quantitatis, triangulum $Mm\mu$ erit specie datum; atque ob $m\mu = dy$ et $M\mu = \frac{bdy}{a}$, fiet hypotenusa $Mm = \frac{dy}{a}\sqrt{(aa+bb)}$. Cum igitur incrementum arcus spiralis $M\mu$ ad incrementum radii $m\mu$ constantem teneat rationem, atque facto $y = 0$ ipse arcus evanescat, necesse est ut tota spiralis e centro C computatae longitudo eandem teneat rationem ad totum radium $CM = y$. Erit ergo spiralis longitudo $CKAM = \frac{y}{a}\sqrt{(aa+bb)}$, quod eo magis est memorabile, quod haec curva infinitis spiris circa centrum C circumplicetur, atque adeo ista spirarum multitudine infinita non obstante longitudo spiralis finitam habet quantitatem, quae ex longitudine

radii CM facillime definiri atque linea recta finita ipsi aequalis exhiberi potest. Scilicet si radio MC normaliter jungatur recta, atque tangens MQ ad ejus occursum usque continuetur, tum ea aequalis erit longitudini spiralis $CKAM$.

34. Est igitur spiralis logarithmica curva rectificabilis, quod eo magis est mirandum, quod inter spirales has ipse circulus tanquam species continetur, qui tamen rectificationem non admittit. Si enim angulus CMQ, quem radius CM cum curva constanter facit, sit rectus, quod evenit si $\frac{b}{a}$ fiat infinitum, ob $ds = \frac{b\,dy}{y}$, fiet $dy = 0$, atque adeo radii CM ejusdem perpetuo erunt magnitudinis, quae est proprietas circuli. Ad hoc ergo paradoxon explicandum ponamus in genere arcum spiralis $AM = v$, erit $MS = y - a$, et cum sit $AM : MS = Mm : m\mu$, erit $v = \frac{(y-a)\sqrt{(aa+bb)}}{a}$. Unde casu $b = \infty$, quo fit $y = a$, erit $v = 0 \,.\, \infty$, quae expressio finitum valorem exhibet, ad quem inveniendum in subsidium ducatur aequatio $y = ae^{s:b}$, quae ob $b = \infty$ dat $y = a\,(1 + \frac{s}{b})$ et $y - a = \frac{as}{b}$. Est vero eodem casu $\sqrt{(aa+bb)} = b$, unde fit $v = s$ et $AM = AS$, ex quo perspicuum est hoc solo casu, quo $b = \infty$, rectificationem curvae cessare atque ad mensuram arcuum circularium redire.

35. Superest ut hujus quoque curvae memorabilis aequationem inter coordinatas orthogonales exhibeamus. Hunc in finem sumatur radius CA pro axe, ac vocetur abscissa $CP = x$ et applicata $PM = z$. Ponatur angulus $ACM = \varphi$, erit $z = y \sin\varphi$ et $x = y\cos\varphi$, hincque

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{yy} = d\varphi\cos\varphi = \frac{x\,d\varphi}{y}, \text{ seu } y\,dz - z\,dy = xy\,d\varphi.$$

Est vero $$\varphi = \frac{s}{a} \text{ et } d\varphi = \frac{ds}{a}.$$

Quare cum sit $$ds = \frac{b\,dy}{y}, \text{ erit } d\varphi = \frac{b\,dy}{ay} \text{ et } xy\,d\varphi = \frac{bx\,dy}{a},$$

ita ut habeatur haec aequatio $y\,dz - z\,dy = \frac{bx\,dy}{a}$. Est autem $y = \sqrt{(x^2 + z^2)}$ et $dy = \frac{x\,dx + z\,dz}{\sqrt{(xx+zz)}}$; quibus valoribus substitutis emerget haec aequatio:

$$a(x\,dz - z\,dx) = b(x\,dx + z\,dz) \text{ seu } dx : dz = ax - bz : az + bx,$$

unde patet si $b = \infty$, fore $x\,dx + z\,dz = 0$, curvamque propterea abire in circulum, cujus centrum sit in C.

36. Curvarum, quae ex circulo originem ducunt, unum adhuc exemplum afferamus, quadratricem scilicet Dinostratis. Haec ita ex circulo construi solet, ut (Fig. 32) sumto arcu quocunque AS, in radio BC ad CA normali, capi jubeatur portio CP, quae sit ad radium, ut arcus AS ad quadrantem peripheriae ASB. Tum enim ducta PM ad BC normali, donec radium CS secet in M, erit M punctum in quadratrice Dinostratis. Vocetur circuli radius $AC = BC = a$ et angulus $ACS = \varphi$; posito toto quadrante ASB seu potius angulo recto $= \varrho$, fiet $CP = \frac{a\varphi}{\varrho}$; et cum angulus BCS sit $= \varrho - \varphi$, erit $$CM = \frac{a\varphi}{\varrho\sin\varphi} \text{ et } PM = \frac{a\varphi\cos\varphi}{\varrho\sin\varphi}.$$

Si ergo coordinatae orthogonales ponantur $CP = x$, $PM = z$, erit $x = \frac{a\varphi}{\rho}$ et $z = \frac{a\varphi\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}$; unde constat si $\varphi = 0$, fore $x = 0$ et ob $\sin\varphi = \varphi$ et $\cos\varphi = 1$, esse $z = \frac{a}{\rho} = CD$. Punctum ergo D, ubi curva radium AC secat, ita se habet ut sit $ASB : AC = AC : CD$. Si itaque hoc punctum D assignari posset, indę haberetur peripheria circuli, adeoque et ejus quadratura, hancque ob rem haec curva quadratrix est appellata.

37. Quia sumto angulo φ negativo, valor ipsius x fit negativus, ipsius z vero idem manet, qui ante, perspicuum est radium AC fore hujus curvae diametrum orthogonalem. Quemadmodum autem haec curva ex D per M et B ulterius procedat, ex sequenti tabella perspicere licet:

si	$\varphi = 0$	erit $x = 0$	et	$z = \frac{a}{\rho}$
	$\varphi = \frac{1}{2}\rho$	$x = \frac{1}{2}a$		$z = \frac{1}{2}a$
	$\varphi = \rho$	$x = a$		$z = 0$
	$\varphi = \frac{3}{2}\rho$	$x = \frac{3}{2}a$		$z = -\frac{3}{2}a$
	$\varphi = 2\rho$	$x = 2a$		$z = \infty$
	$\varphi = \frac{5}{2}\rho$	$x = \frac{5}{2}a$		$z = \frac{5}{2}a$
	$\varphi = 3\rho$	$x = 3a$		$z = 0$
	$\varphi = \frac{7}{2}\rho$	$x = \frac{7}{2}a$		$z = -\frac{7}{2}a$
	$\varphi = 4\rho$	$x = 4a$		$z = \infty$
		etc.		etc.

Habet ergo haec curva infinitas asymtotas Ff, a se invicem intervallo diametro aequali distantes radioque AC parallelas.

38. Tangens hujus curvae MT tam ex relatione inter x et z, quam ex aequatione inter $AS = s$ et $CM = y$ definiri poterit. Posteriori modo cum sit $s = a\varphi$ et $y = \frac{a\varphi}{\rho\sin\varphi}$, erit

$$Ss = ds = a\,d\varphi \quad \text{et} \quad m\mu = dy = \frac{a\,d\varphi}{\rho\sin\varphi} - \frac{a\varphi\,d\varphi\cos\varphi}{\rho\sin^2\varphi},$$

unde

$$M\mu = \frac{y\,ds}{a} = y\,d\varphi = \frac{a\varphi\,d\varphi}{\rho\sin\varphi}.$$

Hinc ergo obtinetur
$$\operatorname{tang} CMT = \frac{M\mu}{m\mu} = \varphi : \left(1 - \frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}.$$

In puncto itaque D, ubi est $\varphi = 0$, $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$ et $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, erit tangens anguli, quem recta CD cum curva facit

$$= \frac{\varphi^2}{\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 - \varphi + \frac{1}{2}\varphi^3} = \frac{3}{\varphi} = \infty;$$

unde iste angulus erit rectus et tangens in D perpendicularis ad radium AC. Ceterum quoties $\varphi = 2\rho$, vel 4ρ, vel 6ρ, vel etc. angulus CMT evanescit; casibus vero $\varphi = \rho$, $\varphi = 3\rho$, $\varphi = 5\rho$, etc., ob $\cos\varphi = 0$ erit $\operatorname{tang} CMT = \varphi$. Iste denique angulus praeter punctum D fiet rectus, si fuerit $\varphi = \operatorname{tang}\varphi$, quod evenit in quadrantibus tertio, quinto, septimo, nono, etc.

39. Cum inventa sit $\operatorname{tang} CMT = \frac{\varphi \sin \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi} = \frac{\varphi \operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi - \varphi}$, angulus autem ACM sit $= \varphi$, erit

$$\operatorname{tang} CTM = \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi},$$

quod idem ex aequatione coordinatarum invenitur. Demittatur enim ex M in AC perpendiculum MQ; quia posuimus $CQ = z = \frac{a\varphi}{\varrho \operatorname{tang} \varphi}$ et $MQ = x = \frac{a\varphi}{\varrho}$, erit subtangens $QT = \frac{-x\,dz}{dx}$. At est

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\varrho} \quad \text{et} \quad dz = \frac{a\,d\varphi}{\varrho \operatorname{tang} \varphi} - \frac{a\varphi\,d\varphi}{\varrho \sin^2 \varphi},$$

unde fit $\quad QT = \frac{-a\varphi}{\varrho \operatorname{tang} \varphi} + \frac{a\varphi\varphi}{\varrho \sin^2 \varphi}$ et $\frac{QM}{QT} = \operatorname{tang} CTM = \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}$, ut ante.

Cum autem sit $\quad \frac{a\varphi}{\varrho \operatorname{tang} \varphi} = z$, erit $QT = -z + \frac{a\varphi\varphi}{\varrho \sin^2 \varphi}$, seu $CT = \frac{a\varphi\varphi}{\varrho \sin^2 \varphi}$.

At posito $CM = y$, est $\varphi = \frac{\varrho x}{a}$ et $\sin \varphi = \frac{x}{y}$; ex quo obtinetur $CT = \frac{\varrho x^2 y^2}{a x^2} = \frac{\varrho}{a} yy$. Cum ergo sit $CD = \frac{a}{\varrho}$, erit ubique $CD : CM = CM : CT$, quae est proprietas non inelegans hujus curvae quadratricis. Promoto autem puncto M usque in B, quia ibi est $y = a$, erit $CT = \varrho a =$ quadranti ASB.

40. Aequatio denique differentialis pro hac curva quadratrice inter coordinatas $CP = MQ = x$ et $PM = CQ = z$ exhiberi potest, in qua angulus φ amplius non insit. Cum enim sumto

$CM = y = \sqrt{(xx + zz)}$, sit $\sin \varphi = \frac{x}{y}$ et $\cos \varphi = \frac{z}{y}$, erit $d\varphi \cos \varphi = \frac{z\,d\varphi}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$.

At est $d\varphi = \frac{\varrho\,dx}{a}$, unde obtinetur $\varrho yz\,dx = ay\,dx - ax\,dy$, seu $\varrho y^2 z\,dx = ay^2\,dx - axy\,dy$. Quia vero $yy = xx + zz$ et $y\,dy = x\,dx + z\,dz$, erit $\varrho xxz\,dx + \varrho z^3\,dx = azz\,dx - axz\,dz$, quae per z divisa abit in hanc $\varrho(xx + zz)\,dx = a(z\,dx - x\,dz)$. Vel si intervallum $CD = \frac{a}{\varrho}$ ponatur $= b$, erit $dx = \frac{b(z\,dx - x\,dz)}{xx + zz}$; positoque brevitatis gratia $z = px$, erit $dx = \frac{-b\,dp}{1 + pp}$. Unde vicissim per calculum integralem ipsae formulae superiores a quadratura circuli pendentes eruuntur.

41. Loco circuli, ex quo hactenus alias curvas formavimus, alias quascunque lineas curvas adhiberi licet, atque praecepta tradita sufficiunt ad tangentes linearum, inde utcunque constructarum inveniendas. Sit enim (Fig. 33) data quaecunque curva AL, cujus natura exprimatur aequatione inter rectam, ex puncto fixo C ad curvam ductam $CL = u$ et angulum $ACL = \varphi$. Ex hac porro construatur alia curva BM, sumendo distantiam $CM = y$ functioni cuicunque ipsius u aequalem. Ducatur recta ipsi CLM proxima Clm, centroque C fiant arculi $L\lambda$ et $M\mu$; ob ang. $MCm = d\varphi$, erit $L\lambda = u\,d\varphi$, $M\mu = y\,d\varphi$ et $l\lambda = du$, $m\mu = dy$. In L et M ducantur tangentes LV et MT rectae CV, quae ad LC sit normalis, occurrentes in V et T; erit $CV = \frac{uu\,d\varphi}{du}$ et $CT = \frac{yy\,d\varphi}{dy}$. Hinc ergo erit

$$CV : CT = \frac{uu}{du} : \frac{yy}{dy} = \frac{dy}{yy} : \frac{du}{uu}, \quad \text{seu} \quad CV : CT = d \,.\, \frac{1}{CM} : d \,.\, \frac{1}{CL}.$$

Sin autem normales ad utramque curvam producantur LK et MN, rectae CN, ad LC perpendiculari, occurrentes in K et N, erit $CK = \frac{du}{d\varphi}$ et $CN = \frac{dy}{d\varphi}$, ideoque $CK : CN = du : dy$. Cum igitur ratio $dy : du$ detur, ex positione normalis LK definietur positio normalis MN.

42. Superfluum esset exemplis hanc regulam per se facilem illustrare: quare ad alios generationis modos progrediamur, in quibus applicatae non ex puncto quopiam fixo egrediuntur, sed alio modo definiantur. Ubi cum infinita varietas locum habeat, ex ea ejusmodi casus eligamus, in quibus proprietates prae ceteris notatu dignae occurrunt. Ac primo quidem proposita sit (Fig. 34) curva quaecunque AL, ex qua ita formetur alia BM, ut rectae LM, quae curvae datae normaliter insistant, ubique ejusdem longitudinis capiantur. Hoc modo manifestum est, si linea AL fuerit recta, alteram quoque rectam illi parallelam esse futuram; ac si linea AL sit circulus, alteram BM pariter fore circulum ipsi concentricum. Generatim ergo cum lineae AL et BM ubique aequis intervallis a se invicem distent, parallelae inter se erunt censendae, quae est idea maxime adaequata parallelismi ad lineas curvas accomodati.

43. Quia lineae ML et ml ad curvam AL ponuntur normales atque inter se aequales sunt, eaedem quoque in alteram curvam genitam BM erunt normales. Producantur enim hae duae lineae, donec concurrant in puncto O, et quia lineae OL et Ol sunt ad curvam normales, elementum Ll confundetur cum arculo circuli centro O descripti, eritque ergo $OL = Ol$; unde cum sit $LM = lm$, erit quoque $OM = Om$, quocirca et hae lineae OM et Om ad curvam genitam BM erunt normales, sicque et in hoc communis parallelismi natura locum habet, ut quae linea in alteram curvarum AL et BM sibi parallelarum sit normalis, eadem alteri perpendiculariter insistat. Hinc ergo porro sequitur tangentem curvae genitae MT parallelam fore tangenti curvae datae LV, ita ut si curvae datae tangentes ducere valeamus, in promtu sit curvarum hoc modo inde genitarum tangentes determinare.

44. Praeterea autem affinitas harum curvarum singularis est notanda, quae in hoc constat, ut longitudo curvae BM aequalis sit arcui curvae datae AL una cum arcu quodam circulari sic definiendo. Sit recta AB ad utramque curvam normalis, cui productae normalis ML occurrat in N. Ducatur $L\mu$ ipsi lm parallela, erit $m\mu = Ll$, ideoque $Mm = Ll + M\mu$. Jam centro N radio $EN = LM = AB$ describatur arcus circuli ES, atque ducatur Ns ipsi nl parallela, erit utique $M\mu = Ss$, ideoque $Mm = Ll + Ss$. Cum igitur sit Mm differentiale curvae BM, et Ll differentiale curvae AL, atque Ss differentiale arcus circularis ES, erit $d.BM = d.AL + d.ES$, ideoque et integralia aequalia esse oportet, unde fit $BM = AL + ES$. Differentia ergo inter arcus BM et AL aequalis est arcui circuli, cujus radius $= AB = LM$, respondenti angulo BNM, quem rectae in terminis curvarum normaliter ductae BN et MN inter se constituunt. Atque hinc duae lineae curvae exhiberi possunt, quarum differentia aequetur arcui circulari.

45. Sit (Fig. 35) curva data ALG, ex qua ita formetur altera curva BM, ut rectae LM, quae tangit curvam datam in L, certus tribuatur valor sive constans, sive functioni cuicunque a puncto L pendenti aequalis. Ponatur ergo arcus curvae datae $AL = s$, sitque longitudo tangentis $LM = y$. Ducatur secundum eandem legem ex puncto proximo l tangens $lm = y + dy$, et quia haec recta lm cum elemento curvae Ll in directum jacet, ob $Ll = ds$, erit linea $Lm = y + dy + ds$. Ex M in Lm demittatur perpendiculum $M\mu$, quod non differet ab arculo circuli centro L descripto, eritque propterea $L\mu = LM = y$, unde fit $m\mu = dy + ds$. Si jam innotesceret lineola $M\mu$, haberetur in triangulo $Mm\mu$ angulus $Mm\mu$, cui aequalis est angulus LMT, quem tangens curvae

genitae MT cum recta LM constituit. Verum cum lineola $M\mu$ pendeat ab inclinatione mutua tangentium proximarum LM et lm, quam infra demum investigare constituimus, hunc casum in genere hic evolvere non licet.

46. Quando autem y ita determinatur per s, ut sit $dy + ds = 0$, erit $m\mu = 0$, unde quomodocunque se habeat valor lineolae $M\mu$, angulus $Mm\mu$ erit rectus, atque tangens MT ad rectam LM erit normalis, huncque ergo casum hic evolvere licet. Sit igitur $y = c - s$, eritque $dy + ds = 0$, et curva genita BM ita erit comparata, ut ejus tangens MT ubique sit ad rectam LM normalis. Quodsi ergo sumamus curvam $ALG = c$, erit arcus $GL = c - s$, ideoque $LM = LG$. Quamobrem genesis curvae BM ita describi poterit, ut (Fig. 36) curvae ALG circumplicetur filum, idque successive incipiendo ab G evolvatur. Filum enim hoc modo evolutum si tendatur, perpetuo curvam ALG tanget, et pars a curva jam extensa LM aequalis erit portioni curvae relictae LG. Unde si filum altero termino M fuerit stilo instructum, iste stilus describet curvam GMB, quae ex evolutione curvae GLA nata vocatur. De quo curvas describendi modo infra fusius explicabitur.

47. Si ergo curvae ALG hoc modo filum circumplicetur, idque in G stilo munitum evolvatur, describet curvam GMB, quae ex evolutione curvae GLA nata dicitur. Hujus igitur curvae hae sunt proprietates, ut primo recta LM, quae curvam datam in L tangit, sit normalis ad curvam genitam GMB: tum vero ut haec recta LM aequalis ubique sit arcui GL. Si porro filum longius capiatur, atque evolutio in puncto g incipiatur, perspicuum est curvam hoc modo genitam fore parallelam curvae GMB, recta enim LM producta simul in novam istam curvam erit normalis, et portio producta ubique aequalis erit arcui Gg; sicque hae duae curvae sibi erunt parallelae, prorsus ut ante (42) parallelismum descripsimus. Quamobrem vicissim curvae parallelae ex evolutione ejusdem lineae curvae BLG nascuntur.

48. Quemadmodum hic ex evolutione fili uni cuidam curvae circumplicati, nova curva est formata, ita facta quadam mutatione duae curvae pro arbitrio assumi possunt, ex quarum evolutione conjunctim nova producatur curva. Sint enim (Fig. 37) datae duae curvae ALa et BKb. Capiatur filum satis longum, cujus alter terminus in A alter in B firmetur; tum extendatur hoc filum ope stili in M immissi ita, ut filum ad utramque curvam maneat applicatum, quoad in L et K, ubi curvae a filo tanguntur, in directum extendatur. Hoc modo si stilus continuo promoveatur, ita ut filum perpetuo tensum teneatur, stilus describet curvam CMc, cujus natura cum a longitudine fili, tum a natura utriusque curvae ALa, BKb, tum a situ relativo harum duarum curvarum pendebit. Ac statim quidem perspicitur, si utraque curva ALa, BKb in punctum evanescat, hoc modo descriptum iri ellipsin, focos in utroque hoc puncto habentem, cujus axis transversus aequetur longitudini fili.

49. Ponamus totam fili longitudinem $ALMKB = a$, atque in praesente situ sit portio, curvae Aa applicata, $AL = s$, et portio alteri curvae Bb applicata $BK = r$. Tum sint portiones in directum extensae $LM = y$ et $KM = z$, erit $s + y + r + z = a$. Jam stilus in situm proximum m promoveatur, quo puncta contactus transferantur in l et k, erit $Al = s + ds$, $Bk = r + dr$, ideoque $Ll = ds$ et $Kk = -dr$. Porro $lm = y + dy$ et $km = z + dz$, atque

$$ds + dy + dr + dz = 0.$$

Ex M in lm et ex m in KM demittantur perpendicula Mp et mq, et fiet $Lm = y + dy + ds$ et $kM = z - dr$. Jam ob $Lp = LM$ et $kq = km$ fiet

$$mp = Lm - LM = dy + ds \quad \text{et} \quad Mq = kM - km = -dr - dz, \quad \text{unde erit } mp = Mq.$$

Cum igitur triangula rectangula Mpm et mqM praeter communem hypotenusam Mm, habeant latera mp et Mq aequalia, erunt ipsa aequalia ac similia, ideoque $Mp = mq$ et ang. $Mmp =$ ang. mMq.

50. Quodsi jam ducatur tangens TMV, erit ang. $Mmp = LMT$, et ang. $mMq = KMV$; hancque ob rem ang. $LMT = KMV$, ita ut tangens TMV utrinque aequaliter inclinetur ad directiones fili ML et MK. Cum igitur radii lucidi a superficie reflectente ita reflectantur, ut angulus incidentiae aequalis sit angulo reflexionis, manifestum est si curva CMc proprietate radios reflectendi gaudeat, atque LM fuerit radius incidens, fore MK radium reflexum. Ducatur ad curvam CMc in puncto M normalis MO, eritque ang. $LMO = KMO$. Quare si angulus LMK bisecetur recta MO, erit haec recta MO normalis in curvam CMc, atque si ad MO normalis ducatur TMV, haec curvam tanget in puncto M. Haec ergo proprietas, quae ex descriptione ellipsis per focos demonstrari solet, communis est omnibus curvis, quae hoc modo per duplicem evolutionem ex duabus curvis quibuscunque producuntur.

Caput IV.

De tangentibus curvarum, in certis locis inveniendis.

1. Etsi praecepta hactenus tradita latissime patent, atque tangentibus ad singula cujusque curvae puncta inveniendis sufficiunt, tamen dantur casus, quibus expedit regulis particularibus, ad eos casus accommodatis, utiquam regulas generales eo transferre. Hi autem casus potissimum occurrunt, quando alterutra binarum quantitatum variabilium vel evanescit, vel in infinitum excrescit. Si enim in his locis positio tangentis investiganda sit, non opus est, ut omnes aequationis termini considerentur, totaque aequatio differentietur, sed quia his casibus plures termini respectu reliquorum evanescunt, his praetermissis, operatio summopere contrahitur, et, quamvis aequatio sit maxime complicata, tamen facili negotio his casibus, quibus altera variabilium vel evanescit, vel in infinitum abit, positio tangentis definietur.

2. Cum igitur in hoc capite duo occurrunt casus evolvendi, prout altera variabilium vel evanescit, vel infinita ponitur, tractatio nostra erit bipartita. Primo ergo alteram variabilem nihilo aequalem assumamus, hocque casu, uti jam in *Introductione* abunde est ostensum, atque statim uberius explicabitur, tota aequatio, quantumvis fuerit composita, ad duos tantum terminos revocabitur; ita ut curva proposita in loco, quem consideramus, ubi scilicet $x = 0$, eandem habitura sit tangentis indolem, quam habet curva, cujus aequatio duobus tantum constat terminis. Cum igitur omnis aequatio inter binas variabiles x et y, si alterutra evanescens ponatur, ad duos terminos revocetur, in hanc abibit formam $y^m = Cx^n$, unde ad nostrum institutum sufficiet, positionem tangentis harum curvarum nosse, quando vel x vel y nihilo aequalis assumitur.

3. Perspicuum autem porro est in hac aequatione $y^m = Cx^n$ exponentes m et n non solum esse numeros integros, sed etiam primos inter se. Si enim essent fracti, per evectionem potestatis ad integros perducerentur, sin autem inter se essent compositi, seu communem divisorem haberent, hic per extractionem radicis tolleretur. His igitur casibus omissis, quemadmodum pro ceteris positio tangentis, quando vel x vel y nihilo aequalis ponitur, sit comparata, erit dispiciendum. Ac primo quidem, si uterque exponens m et n fuerit numerus affirmativus, manifestum est posito $x = 0$, fore quoque $y = 0$, et vicissim. Sin autem horum exponentium m et n alter fuerit affirmativus, alter negativus, tum posito $x = 0$, erit $y = \infty$, ac vicissim, si sit $y = 0$ erit $x = \infty$. Probe autem recordandum est, utrum aequatio $y^m = Cx^n$ ex aequatione proposita sit nata facto $x = 0$, an vero $y = 0$, quo eadem hypothesis in tangentis investigatione retineatur.

4. Ponamus igitur aequationem propositam quamcunque posito x evanescente coaluisse in hanc $y^m = Cx^n$, et utrumque exponentem m et n esse affirmativum, ita ut simul sit $y = 0$. Ad tangentem ergo hujus curvae inveniendam differentietur aequatio: habebitur

$$my^{m-1}\,dy = nCx^{n-1}\,dx, \text{ unde fit } \frac{dy}{dx} = \frac{nCx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}y}{mx^n} = \frac{ny}{mx}.$$

At est
$$y = C^{1:m}x^{n:m} \text{ ideoque erit } \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}C^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n-m}{m}}.$$

Exprimit autem $\frac{dy}{dx}$ tangentem anguli, quem tangens curvae facit cum axe, in quo abscissae x sumuntur. Posito ergo $x = 0$, quoniam fit quoque $y = 0$, tangens curvae per ipsum initium abscissarum transit, atque cum axe angulum constituit, cujus tangens erit

$$= \frac{n}{m}C^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n-m}{m}} \text{ posito } x = 0.$$

Hic igitur angulus erit $= 0$ si $n > m$; rectus autem fiet si sit $n < m$; sin autem sit $n = m$, iste angulus erit obliquus, quippe cujus tangens fit finita $= C^{\frac{1}{m}} = C$ siquidem $m = 1$.

5. Quando ergo in aequatione $y^m = Cx^n$, ad quam posito x evanescente pervenitur, tam m quam n fuerit numerus affirmativus, atque ideo curva in ipso abscissarum principio axem secat, tres occurrunt casus considerandi, quorum primus est sit $n > m$ seu $m < n$. Hoc casu (Fig. 38) ipse axis AB curvam in puncto A tanget. Ramus igitur curvae ex A egrediens erit vel AM vel AN, vel Am vel An, vel etiam binos pluresve hujusmodi ramos conjunctim habebit, quod ex aequatione generali est decidendum. Lex continuitatis autem postulat, ut curva semper ad minimum duos hujusmodi arcus habeat, et si plures fuerint, eorum numerus perpetuo par sit necesse est. Quod cum naturam curvedinis sumus evoluturi, clarius patebit. Cum enim hic tantum positionem tangentis investigemus, quonam tractu curva ulterius procedat, hic non curamus, sed infra cautiones, quibus in hac investigatione utendum est, accuratius tradentur.

6. Secundus casus est, si fuerit $m > n$ atque tangens curvae (Fig. 39) in puncto A normalis erit ad axem AB. His igitur casibus recta DAT axem in A perpendiculariter trajiciens curvam ibidem tanget, unde rami curvae ex A ulterius progredientes erunt vel AM vel AN, vel Am vel An,

quod ex aequatione completa est dijudicandum. Tertius denique casus existit si $m = n$, quo casu aequatio $y^m = Cx^n$ abit in hanc $y = Cx$, naturam lineae rectae exprimens. Tangens igitur curvae, ex qua posito $x = 0$ haec aequatio $y = Cx$ est nata, (Fig. 40) ad axem AB erit inclinata angulo BAD, cujus tangens est $= C$, sicque recta DAT curvam in puncto A tanget. Figura igitur curvedinis prope A erit vel AM vel AN, vel Am vel An, atque vel ex duobus, vel quatuor, vel sex etc. hujusmodi ramis consistet. De vero autem curvae tractu tam antecedentia quam consequentia versus hic nihil certi statuere licet, nisi reliquorum quoque aequationis terminorum hic neglectorum ratio habeatur. Interim tamen hinc ad quemcunque horum casuum aequatio curvae facto $x = 0$ perducatur, positio tangentis in hoc loco facillime definitur.

7. Diximus supra si in aequatione $y^m = Cx^n$ exponentes m et n communem habeant divisorem, hanc aequationem per extractionem radicis ad simpliciorem formam deprimi posse. Hoc autem ita intelligendum est, nisi extractio ob signum quantitatis C impediatur. Si enim communis divisor fuerit numerus par, et coëfficiens C sit quantitas negativa, extractio radicis deduceret ad imaginaria; ex quo intelligitur, abscissis x, si iis valor finitus tribuatur, nullam plane respondere applicatam. Sic si habeatur $y^2 = -x^2$ vel $y^4 = -aaxx$, vel $y^6 = -aax^4$ seu $y^6 = -a^4xx$ etc. singulis valoribus finitis ipsius x nullae applicatae respondent; interim tamen facto $x = 0$ manifestum est fore et $y = 0$. His igitur casibus aequatio pertinet ad unicum punctum in initio abscissarum positum, et curvae, ex quibus hujusmodi aequationes pro $x = 0$ proveniunt, nullos habebunt ramos per punctum A transeuntes, sed ibi habebunt punctum separatum, quod conjugatum vocari solet, cujus tangens concipi nequit. Quod idem indicat formula ante pro positione tangentis inventa, quae ob $C^{\frac{1}{m}}$, si C est quantitas negativa et m numerus par, imaginarium, assignari omnino nequit.

8. Sin autem in aequatione binomia $y^m = Cx^n$, ad quam posito $x = 0$ pervenitur, exponens n fuerit numerus negativus, tum valori $x = 0$ respondebit valor $y = \infty$, sicque (Fig. 41) applicata in puncto A erit infinite magna. Tangens autem anguli, quem tangens in hoc loco cum curva constituit, erit $= \frac{n}{m} C^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n-m}{m}}$, quae ob n numerum negativum, posito $x = 0$, semper fit infinita, isque angulus rectus. Ipsa ergo recta EAF, axi in A normalis, erit tangens curvae, ejusque idcirco asymtotos; ex quo curva ad minimum duos ejusmodi ramos, cujusmodi sunt MP, NQ, mp, nq, ex infinito redeuntes habebit. Sin autem, ut ante meminimus, uterque exponens m et n fuerit numerus par, et C quantitas negativa, tum aequatio casu quoque $x = 0$ erit imaginaria, nisi forte dicere velimus curvam in distantia infinita rectae AE vel AF habere punctum solitarium conjugatum.

9. Casus igitur evolvimus eos, quibus posito $x = 0$ applicata y vel quoque evanescit, vel in infinitum excrescit. Sin autem y posito $x = 0$ finitum obtineat valorem, puta $y = a$, tum iste casus ponendo $y = a + z$ ad priorem reducitur, quippe z evanescet posito $x = 0$. Cum autem haec substitutio, praesertim si aequatio proposita pluribus constet terminis, non parum molestiae pareret, mox modum trademus, cujus ope sine hac substitutione tangens definiri queat. Ceterum aequationes binomiales hactenus tractatae viam nobis aperiunt ad aequationes, quae pluribus constant terminis, progrediendi, tam quod in hoc genere sint simplicissimae, quam quod aequationes utcunque compositae

casu $x=0$ ad binomiales reducantur. Quemadmodum ergo haec reductio sit instituenda, hic clarius explicemus, atque ejusmodi regulas pro disponendis terminis aequationum trademus, quarum ope deinceps quoque natura curvedinis ramorumque inflexio facile definiri queat.

10. Ac primo quidem quaecunque aequatio proponatur inter x et y, si ponatur $x=0$, omnes quidem termini x continentes evanescerent, nisi y valorem induat infinitum, sed inter hos ipsos terminos evanescentes gradus distingui conveniet, qui inter se rationem infinitam tenent. Hujusmodi progressionem constituunt sequentes termini

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ \text{etc.},$$

sicut enim casu $x=0$ prae 1 evanescit x, ita prae x evanescit xx, et x^3 prae xx, ita ut quisque terminus sit infinities minor praecedente infinitiesque major sequente. Similiter erunt comparatae sequentes series, quicunque valor alteri variabili y conveniat:

$$y,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x^4y,\ x^5y,\ \text{etc.};$$

$$y^2,\ xy^2,\ x^2y^2,\ x^3y^2,\ x^4y^2,\ x^5y^2,\ \text{etc.};$$

et generaliter

$$y^n,\ xy^n,\ x^2y^n,\ x^3y^n,\ x^4y^n,\ x^5y^n,\ \text{etc.}$$

11. Quaecunque ergo aequatio algebraica inter x et y habeatur, postquam ea tam ad rationalitatem fuerit perducta quam a fractionibus liberata, singuli ejus termini in istis seriebus continebuntur. Quo igitur ordo terminorum, secundum quem alii prae aliis evanescunt, facilius perspiciatur, rejectis coëfficientibus constantibus termini ita disponantur

	0	1	2	3	4	5	6	
0.	1	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	etc.,
1.	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	etc.,
2.	x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6	etc.,
3.	x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	etc.,
4.	x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	etc.,
5.	x^5	x^5y	x^5y^2	x^5y^3	x^5y^4	x^5y^5	x^5y^6	etc.,
6.	x^6	x^6y	x^6y^2	x^6y^3	x^6y^4	x^6y^5	x^6y^6	etc.,
7.	x^7	x^7y	x^7y^2	x^7y^3	x^7y^4	x^7y^5	x^7y^6	etc.,
	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

12. Terminis ergo aequationis hoc modo dispositis, manifestum est posito $x=0$ in qualibet serie verticali omnes terminos inferiores prae superioribus evanescere, ita ut hoc casu supremi tantum termini cujusque seriei verticalis relinquantur, ac reliqui rejici queant. In hoc autem schemate assumsimus in aequatione proposita omnes terminos occurrere, ita ut hoc casu, quo $x=0$, termini supremae seriei horizontalis omnes remaneant; ex qua y obtineret unum pluresve valores finitos. Sin autem in aequatione proposita aliqui termini desint, eorum loca in hoc schemate vacua relinquantur, atque ob superiorem rationem pro casu $x=0$ in qualibet serie verticali supremi tantum termini in computum venient. Sicque contingere potest, ut termini residui non in eadem serie horizontali sint constituti.

13. Terminis hoc modo superfluis expunctis tot remanebunt termini, quot habebuntur series verticales; sicque aequatio plerumque ad satis paucos terminos reducitur. Horum autem terminorum residuorum non omnes semper inter se erunt homogenei, sed denuo aliqui prae reliquis evanescent. Quomodo igitur isti termini, qui prae ceteris evanescunt, sint dignoscendi, nobis explicandum restat. Ponamus itaque supremos cujusque columnae verticalis terminos relictos esse

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^\gamma y^2,\ x^\delta y^3,\ x^\varepsilon y^4,\ x^\zeta y^5, \text{ etc.},$$

quorum quinam sint inter se homogenei, vel prae reliquis evanescant, dispiciamus. Fingamus duos quosvis terminos, puta x^α et $x^\beta y$ inter se esse homogeneos, statimque patebit, utrum reliqui termini vel his sint homogenei, vel iis infinities minores, vel infinities majores. Qui autem fuerint homogenei omnes erunt retinendi, qui infinities minores rejiciendi; sin autem nonnulli reperiantur infinities majores, hi soli retineantur, cum prae his et illi, quos assumseramus, evanescant.

14. Ad hoc autem judicium rite instituendum notasse sufficiet, si in progressione geometrica duo quicunque termini fuerint homogenei, simul omnes tam antecedentes quam medios et sequentes iis fore homogeneos. Terminos enim homogeneos vocamus, quorum est ratio infinita; hinc si in progressione geometrica duo termini habuerint rationem finitam, necesse est, ut singuli inter se rationem quoque finitam teneant. Quare si termini x^α et $x^\beta y$ sint homogenei, omnes termini hujus progressionis geometricae inter se erunt homogenei

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^{2\beta-\alpha} y^2,\ x^{3\beta-2\alpha} y^3,\ x^{4\beta-3\alpha} y^4, \text{ etc.}$$

Quodsi jam in termino $x^\gamma y^2$ fuerit $\gamma = 2\beta - \alpha$, hic terminus illis x^α et $x^\beta y$ erit homogeneus; sin autem sit $\gamma > 2\beta - \alpha$, terminus $x^\gamma y^2$ prae illis x^α et $x^\beta y$ evanescet; sin autem $\gamma < 2\beta - \alpha$, tum illi termini x^α et $x^\beta y$ prae hoc $x^\gamma y^2$ ipsi evanescent, similique modo reliqui termini dijudicabuntur.

15. Sin alios duos quoscunque terminos homogeneos fingere velimus, ut $x^\beta y$ et $x^\varepsilon y^4$, ex his primum progressio geometrica ad singulas potestates ipsius y est formanda, quae igitur erit

$$x^{\frac{4\beta-\varepsilon}{3}},\ x^\beta y,\ x^{\frac{\varepsilon+2\beta}{3}} y^2,\ x^{\frac{2\varepsilon+\beta}{3}} y^3,\ x^\varepsilon y^4,\ x^{\frac{4\varepsilon-\beta}{3}} y^5, \text{ etc.},$$
$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^\gamma y^2,\ x^\delta y^3,\ x^\varepsilon y^4,\ x^\zeta y^5, \text{ etc.},$$

qui igitur termini inferioris seriei cum superioribus congruunt, ii duobus propositis erunt homogenei. Sin autem exponens ipsius x in quopiam termino inferioris seriei major fuerit quam in respondente superioris, ille terminus prae superioribus evanescit; sin autem alicubi in serie inferiori exponens ipsius x minor fuerit quam in termino suprascripto, tum prae eo omnes termini superioris seriei evanescent.

16. Si igitur casus iste ultimus, quo aliquis terminus inferioris seriei infinities major existit terminis superioris, nusquam occurrit, rejectis terminis evanescentibus remanebit aequatio inter terminos mere homogeneos, quae naturam curvae in loco $x = 0$ exprimit. Sin autem quis terminus in seriei inferiori fiat infinite magnus respectu superiorum, tum is in locum binorum illorum terminorum, ex quibus hoc judicium petivimus, assumatur, eademque operatio denuo instituatur, et quoties termini propositis infinities majores occurrunt, tam diu reiteretur, donec omnes termini

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^\gamma y^2,\ x^\delta y^3, \text{ etc.},$$

cum binis assumtis vel prodeant homogenei, vel prae iis evanescant. Hocque modo tandem pervenietur ad aequationem duobos pluribusve terminis constantem, qua natura curvae in loco $x = 0$ exprimetur, ex qua deinceps non difficile erit tangentis positionem definire.

17. Quodsi ergo hoc modo plures termini relinquantur, ii progressionem geometricam constituent, atque ex hac consideratione facile est istos terminos mechanice determinare, eo scilicet modo, quem Neutonus per parallelogrammum et regulam tradidit (Fig. 42). Si enim termini aequationis omissis coëfficientibus modo ante exposito in cellulas parallelogrammi aequaliter divisas inscribantur, atque in unaquaque cellula punctum medium notetur, facile perspicitur, terminos, qui in ratione geometrica progrediuntur in directum fore dispositos. Sic linea aa per puncta media cellularum transit, in quibus reperiuntur termini isti progressionem geometricam tenentes: x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5. Linea autem bb transit per puncta media cellularum x^3, x^2y^2, xy^4, y^6, et linea cc per puncta media cellularum x, x^2y^3, x^3y^4, x^4y^6, atque linea dd ducta est per puncta media cellularum, quae hanc praebent progressionem geometricam: y, xy^2, x^2y^3, x^3y^4, x^4y^5, x^5y^6.

18. Si igitur puncta media cellularum pro veris locis singulorum terminorum habeantur, et linea recta utcunque per hoc parallelogrammum traducatur, termini in ista linea constituti progressionem geometricam formabunt; ideoque si eorum duo fuerint homogenei, omnes erunt homogenei. Deinde ex ante expositis facile liquet, omnes terminos, qui supra hujusmodi lineam rectam cadunt, respectu eorum, qui in ipsa hac linea sint positi, fore infinite magnos, terminos autem, qui infra hanc lineam cadunt eorumdem respectu futuros esse infinite parvos, ideoque prae iis evanescere posito scilicet $x = 0$. Si enim series verticales interpolentur, termini interpolati omnes, quorum loca in lineam rectam incidunt, progressionem geometricam constituent, quorum respectu superiores omnes sunt infiniti, inferiores infinite parvi. Sic recta bb interpolatione instituta transibit per terminos

$$x^3,\ x^{\frac{5}{2}}y,\ x^2y^2,\ x^{\frac{3}{2}}y^3,\ xy^4,\ x^{\frac{1}{2}}y^5,\ y^6.$$

19. Si igitur ejusmodi termini desiderentur, quorum respectu reliqui omnes pro nihilo haberi queant, linea recta per duos ejusmodi terminos duci debebit, ut supra eam nulli prorsus termini existant. Unde si aequationis propositae singuli termini in cellulas ipsis convenientes hujus parallelogrammi inscribantur, et cellulae, quarum termini in aequatione desunt, vacuae relinquantur, per ejusmodi duos supremos terminos in duabus columnis verticalibus linea recta duci, vel ipsis regula applicari debet, ut super ea nulli prorsus termini appareant. Hoc enim facto bini illi termini, vel plures, si qui in istam eandem lineam rectam cadant, non solum progressionem geometricam formabunt, sed ita erunt comparati, ut prae iis reliqui omnes aequationis termini negligi queant. His ergo terminis in aequatione expunctis ii, qui sunt residui, naturam curvae in loco $x = 0$ exprimunt.

20. Si linea recta hoc modo ducta duos tantum terminos exhibeat, habebitur aequatio binomia pro curva in loco $x = 0$, ejusque ergo tangens per praecepta ante tradita invenietur, nisi linea illa recta fuerit horizontalis, quo casu applicata y vel finitum vel imaginarium obtinebit valorem; priorique casu tangens ex his duobus terminis definiri nequit. Hoc ergo casu regula motu sibi parallelo promoveatur, donec unum pluresve novos terminos attingat, hique ad illos adjiciantur, et ex aequatione resultante tangens definiatur. Cum enim reliqui termini prae his de novo adjectis evanescant,

aequatio pro curva erit completa in loco $x = 0$, nisi forte et isti novi termini evanescant, si ipsi y valor ante inventus tribuatur. His ergo incommodis ut remedium afferatur, expediet, si ex terminis primo inventis valor finitus pro y puta $y = a$ fuerit inventus, ut substitutione $y = a + z$ utamur, hincque aequationem inter x et z modo supra descripto examini subjiciamus.

21. Verum si hanc substitutionem $y = a + z$ evitare velimus, invento valore finito $y = a$, differentietur tota aequatio proposita, quaeraturque ratio $\frac{dy}{dx}$. Tum in expressione inventa fiat ubique $x = 0$ et $y = a$, sicque prodibit tangens anguli, quem tangens curvae in isto puncto cum directione axis constituit. Hoc modo etiam, si forte applicata y plures habuerit valores finitos, puta $y = a$, $y = b$, $y = c$, etc., pro singulis ex eadem formula $\frac{dy}{dx}$ positio tangentis reperietur; cum si substitutione uti voluerimus, pro unoquoque valore ipsius y peculiarem substitutionem fieri oporteret. Plerumque etiam in differentiatione aequationis plures terminos omittere licet, ac saepenumero sufficit ope regulae proximum terminorum ordinem adjicere; cum tamen dentur casus, quibus ad ultimum usque terminorum ordinem procedendum est, consultius est totam aequationem differentiare, quam omissione terminorum errorem in determinatione tangentis committere.

22. Facilius autem judicare licebit, utrum aliquot aequationis terminos omittere liceat, si aequatio proposita secundum dimensiones ipsius x disponatur, atque factores harum potestatum in divisores resolvantur. Ita si hujusmodi aequatio fuerit proposita

$$(a-y)^4 - 3(a-y)^3 x + 2(a-y)^2 xx - (a-y)x^3 + x^4 = \frac{x^5}{a},$$

ubi posito $x = 0$ fit $y = a$, in differentiatione nulli termini praeter ultimum rejici poterunt, sicque quinque terminorum ordines, quos promotio regulae horizontaliter deorsum facta indicat, assumi oportebit. Fiet enim

$$-4dy(a-y)^3 + 9dy(a-y)^2 x - 4dy(a-y)xx + dy.x^3 - 3dx(a-y)^3 + 4xdx(a-y)^2 -$$
$$3xxdx(a-y) + 4x^3 dx = \frac{5x^4 dx}{a},$$

$$\text{seu} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3(a-y)^3 - 4x(a-y)^2 + 3xx(a-y) - 4x^3 + \frac{5x^4}{a}}{-4(a-y)^3 + 9(a-y)^2 x - 4(a-y)xx + x^3}$$

statuatur jam $y = a$ et $x = 0$, et quia in singulis terminis cyphra tres habet dimensiones, praeter $\frac{5x^4}{a}$ hunc solum rejicere licet.

23. Quia igitur hoc casu tam numerator quam denominator evanescit, atque omisso termino $\frac{5x^4}{a}$ reliquorum terminorum nullus prae ceteris rejici potest, ad tangentem definiendam aliud remedium non superest, quam ut substitutione $y = a - z$ seu $a - y = z$ utamur, qua facta aequatio pro curva transit in hanc formam:

$$z^4 - 3z^3 x + 2zzxx - zx^3 + x^4 = \frac{x^5}{a}.$$

His autem terminis in parallelogrammum dispositis regula indicabit hos terminos, quibus natura curvae casu $x = 0$ exprimitur:

$$z^4 - 3z^3 x + 2zzxx - zx^3 + x^4 = 0.$$

Ponatur $z = px$, ut sit $p^4 - 3p^3 + 2pp - p + 1 = 0$, cujus radices, quarum duae sunt reales $p = 1$ et $p = 2{,}2055$ proxime, dabunt aequationes pro lineis rectis, quae erunt tangentes totidem curvae ramorum per initium abscissarum transeuntium, radices vero binae imaginariae indicant punctum conjugatum, pro quo $x = 0$ et $z = 0$. Atque ex hoc exemplo patet tutissimam tangentis inveniendae methodum saepe in substitutione esse sitam.

24. Cum igitur haec substitutionis methodus sit tutissima neque unquam investigationem in ambiguo relinquat, eam prae ceteris commendamus. Quoties ergo evenit, ut regula in situ horizontali terminos aequationis eligendos indicet, quo casu utique semper supremis cellulis erit applicata, cum aequatio semper unum saltem terminum ex serie suprema contineat, quia alias per x foret divisibilis, toties valor finitus pro y inde resultans ope substitutionis eliminetur, atque aequatio inter x et novam variabilem introductam denuo ad parallelogrammum examinetur. Hoc ergo modo situs regulae horizontales, qui tangentis positionem non determinant, excluduntur, atque omnis investigatio ad situs regulae obliquos reducitur, ex quibus valor ipsius y semper vel $= 0$ vel $= \infty$ elicitur, quibus casibus determinatio tangentis est in promtu.

25. Si enim regula secundum praecepta ante tradita applicata situm tenet obliquum, vel duos vel plures suppeditabit terminos, ex quibus aequatio utramque variabilem x et y continens conficitur, ex qua propterea tangentis positio determinatur; si enim duos tantum praebeat terminos, aequatio inde hujusmodi orietur: $y^m = Cx^n$, ex qua tangentem jam supra definivimus. Sin autem tres pluresve terminos exhibeat, ii erunt in progressione geometrica, atque hujusmodi aequationem pro curva praebebunt:

$$A + Bx^m y^n + Cx^{2m} y^{2n} + Dx^{3m} y^{3n} + Ex^{4m} y^{4n} + \text{etc.} = 0,$$

quae posito $x^m y^n = p$ induet hanc formam

$$A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \text{etc.} = 0.$$

Ex hac eliciantur omnes radices reales ipsius p, qui sint $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$, etc., unde totidem prodibunt aequationes inter x et y binomiales

$$x^m y^n = \alpha,\ x^m y^n = \beta,\ x^m y^n = \gamma,\ \text{etc.},$$

quibus totidem curvae rami cum tangentibus assignantur. Radices autem imaginariae absentiam applicatarum, quae abscissae $x = 0$ respondeant, indicant, vel puncta conjugata, uti ante jam monuimus. Binae autem radices imaginariae puncta conjugata sine tangentibus indicabunt.

26. Interdum autem fieri potest, ut regula duobus pluribusve modis ita duobus supremis terminis applicari queat, ut nulli termini supra eam compareant. Quod evenit si curva plures habeat ramos abscissae $x = 0$ respondentes, sicque singulorum horum ramorum tangentes innotescent. Quae investigatio tangentium, quo facilius perspiciatur, simulque usus parallelogrammi Neutoniani uberius explicetur, exempla aliquot adjungamus, in quibus omnes isti casus diversi occurrant, ita ut hoc modo facile cognoscere queamus, quot curvae rami abscissae $x = 0$ respondeant, et quales habituri sint tangentes in hoc loco, sive rami in infinitum excurrant, sive in spatio finito subsistant.

Exemplum 1. *Proposita curva hac aequatione contenta*

$$x^2 - xy + 2y^3 + 2x^4 - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 + 4x^2y^4 - 2x^5y + 5x^4y^3 - x^5y^4 + 4x^4y^5 = 0.$$

invenire tangentes ejus ramorum abscissae $x = 0$ *respondentium.*

Rejectis coëfficientibus, si termini hujus aequationis in parallelogrammum modo ante descripto inscribantur, apparebit regulam triplici modo ita ad duos terminos applicari posse, ut supra eam nulli prorsus termini appareant, quos regulae situs in figura 43 lineae Aa, Bb, Cc, repraesentant. Primus situs Aa, qui terminos xx et xy praebet, indicat curvam propositam ad abscissarum initium ramum habere aequatione hac $xx - xy = 0$ (reliquis nempe terminis omnibus neglectis) expressum, qua per x divisa concludimus rectam hac aequatione $x - y = 0$ contentam fore hujus rami tangentem. Altera regulae positio Bb terminos y^3 et xy^4 tantum relinquit, unde aequatio nascitur $2y^3 - 2xy^4 = 0$ seu $1 - xy = 0$, quae aequatio cum sit pro hyperbola, patet hanc hyperbolam pro casu $x = 0$ curvae propositae partem constituere: fit nempe applicata y infinite magna simulque tangens curvae existit. Ex tertio regulae situ oritur aequatio his duobus terminis contenta: $-2xy^4 + 4x^4y^5 = 0$, seu $1 - 2x^3y = 0$, et linea hyperbolica hac aequatione contenta naturam aliorum ramorum hujus curvae pro $x = 0$ repraesentabit. Geminas ergo haec curva habebit asymtotas ad axem in initio abscissarum normales, alteram naturae $1 - xy = 0$, alteram $1 - 2x^3y = 0$. Praeterea vero ramus axem in initio abscissarum sub angulo semirecto intersecabit, cum ejus tangens sit recta hac aequatione $x = y$ expressa.

Exemplum 2. *Proposita curva hac aequatione contenta*

$$x^4 - 3x^3y + x^4y^2(1 + xx) + 2xy^3(1 - x^4) + x^2y^4(1 + xx) - 4y^5(1 - x) - 3x^6y^6 + x^5y^7 = 0$$

invenire tangentes ejus ramorum, qui abscissae $x = 0$ *respondent.*

Terminis hujus aequationis in cellulas parallelogrammi dispositis, regula iterum triplici modo binis terminis ita applicari potest, ut nulli reliquorum supra promineant (Fig. 44). Ac prima quidem positio Aa hos tres terminos praebet x^4, x^3y, xy^3, unde haec aequatio oritur $x^4 - 3x^3y + 2xy^3 = 0$ seu $x^3 - 3xxy + 2y^3 = 0$, cujus curva cum proposita pro casu $x = 0$ congruit. Complectitur autem haec aequatio primum lineam rectam $x - y = 0$, quae ergo erit tangens curvae in abscissarum initio; tum vero aequationem $xx - 2xy - 2yy = 0$, seu $x = y(1 \pm \sqrt{3})$, unde denuo duae tangentes ad axem obliquae resultant, ita ut hinc curva proposita tres obtineat ramos in axis initio concurrentes. Altera regulae positio Bb dat terminos xy^3 et y^5, seu hanc aequationem $2xy^3 - 4y^5 = 0$ sive $2yy = x$, unde tangens quoque ad axem perpendicularis oritur, et ramum curvae per axis initium perpendiculariter trajicientem indicat. Tertia regulae positio dat terminos y^5 et x^5y^7, hincque aequationem hanc: $-4y^5 + x^5y^7 = 0$, seu $x^5y^2 = 4$, unde in initio axis fit applicata $y = \pm\infty$, quae ergo simul erit asymtota curvae propositae, ideoque tangens. Pro initio igitur abscissarum quatuor rami curvae se mutuo intersecant, sicque punctum quadruplex constituunt.

27. Ex his ergo exemplis satis apparet, quemadmodum ex regulae, secundum praecepta tradita applicatae, positionibus indoles earum curvae partium, quae abscissae evanescenti $x = 0$ respondent, sit dignoscenda. Hac nimirum ratione quantitas omnium applicatarum, quae abscissae $x = 0$ conveniunt, innotescit: primo enim cum quaelibet applicata vel sit evanescens, vel finitae magnitudinis, vel infinite magna, haec diversitas indicatur per inclinationem linearum Aa, Bb, Cc, quae situs regulae repraesentant, siquidem bina parallelogrammi latera, prouti tabula refert, habeantur pro horizontalibus, reliqua pro verticalibus. Lineae enim Aa, Bb, Cc, quae situs regulae pro casu $x = 0$ exhibent, a sinistra dextrorsum sunt ductae, ac primo ascendunt ut Aa, tum vero descendunt

ut Cc, fieri quoque possunt horizontales, quem autem casum, cum positionem tangentis non simul indicet, ob rationem ante allegatam removimus.

28. Quo clarius intelligatur, quomodo ex regulae inclinatione judicium sit ferendum, sit (Fig. 45) EF linea horizontalis et lineae Ea, Ec, Ee referant situs regulae a sinistra dextrorsum ascendentes, AB situm regulae horizontalem, et bF, cF, fF situs regulae descendentes. Jam igitur manifestum est situs regulae ascendentes applicatas semper evanescentes praebere, ita ut quot hinc reperiantur aequationis radices, tot curva habitura sit applicatas evanescentes, quae abscissae $x=0$ respondeant. Situs autem regulae horizontalis AB indicabit applicatas finitae magnitudinis, quae abscissae $x=0$ respondent; at situs descendentes omnes bF, cF, fF praebebunt applicatas infinite magnas, axis initio insistentes, quae ideo totidem ramos curvae in infinitum extensos declarabunt. Hinc ergo omnia curvae puncta, quae ad abscissam evanescentem $x=0$ pertinent, una quasi operatione inveniuntur, sive ea in axem incidant, sive ab eo intervallo finito sint remota, sive infinito.

29. Quoniam autem hic non tantum ipsa curvae puncta, quae abscissae $x=0$ respondent, spectamus, sed etiam positionem tangentis, quae curvam in quolibet horum punctorum tangit, requirimus, hoc quoque ex situ regulae colligere licet, nisi is fuerit horizontalis. Nam ante jam animadvertimus, si situs regulae fuerit horizontalis velut AB, ex aequatione, quam termini a regula trajecti constituunt, cum sit hujus formae

$$0=\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4+\text{etc.},$$

nihil aliud concludi posse, nisi tot curvae extare puncta ab axe intervallo finito distantia, quot haec aequatio habuerit radices reales finitas; radices enim, si quas forte habet, evanescentes ob $\alpha=0$, simul per reliquos regulae situs indicantur. Cum igitur radices hae finitae per hujusmodi formulas $y=a$, $y=b$, $y=c$ etc., indicentur, praeter distantias horum punctorum curvae ab axe nihil cognoscitur, neque inde positio tangentium definiri potest. Ex quo jam supra praecepimus his casibus positionem axis statuendo $y=a+z$, vel $y=b+z$, etc., immutandam esse, ut haec puncta in novum axem incidant; tum enim nova hac aequatione in parallelogrammum disposita, ista puncta per situs regulae obliquos indicabuntur, unde tangentis positio colligi poterit.

30. Si enim situs regulae fuerit obliquus et quidem ascendens velut Ea, vel Ec, vel Ee, iis non solum puncta curvae in axis initium incidentia indicantur, sed etiam tangentium directio inde colligitur, unde tractus ramorum curvae, qui per axis initium transeunt, innotescit. Ex constitutione enim parallelogrammi, si ejus cellulae fiant quadratae, facile perspicitur, si regulae positio Ec cum linea horizontali EF angulum semirectum FEc comprehendat, tangentes indicari obliquas; namque termini, qui a regula trajiciuntur, aequationem homogeneam hujusmodi

$$Ax^m+Bx^{m-1}y+Cx^{m-2}y^2+Dx^{m-3}y^3+\text{etc.}=0$$

dabunt, cujus factores simplices reales $\alpha x+\beta y=0$ totidem praebebunt lineas rectas ad axem obliquas, quae erunt curvae tangentes in axis initio. Factores autem imaginarii, qui continentur in factoribus realibus secundi ordinis, veluti $\alpha xx+\beta xy+\gamma yy=0$, quia iis positis $x=0$ et $y=0$ tamen satisfit, indicabunt puncta curvae conjugata, a tractu ramorum separata, in quibus proinde tangentium conceptus non habet locum.

31. Si regula sursum vergens Ea majorem semirecto angulum cum linea horizontali EF constituit, termini, qui ab ea trajiciuntur, erunt hujusmodi I. $Ax^2+By=0$, II. $Ax^3+By=0$, III. $Ax^3+By^2=0$, IV. $Ax^4+By=0$, V. $Ax^4+Bx^2y+Cy^2=0$, VI. $Ax^4+By^3=0$ etc., in quibus numerus dimensionum ab x et y ortarum decrescit secundum progressionem arithmeticam, siquidem plures duobus fuerint termini. His casibus quidem semper punctum curvae in axe ob $x=0$ et $y=0$ indicatur, sed tangens tantum exhibetur, cum aequatio non fuerit imaginaria, manifestumque est tangentem, si quae datur, in ipsum axem incidere. Quodsi aequatio ut V pluris duobus constet terminis, in factores erit resolvenda, qui singuli si sint reales, ramos curvae axem in initio tangentes declarabunt; sin autem sint imaginarii, bini praebebunt puncta conjugata, quae autem alius erunt naturae atque ea, quae ex § praecedente sunt orta, siquidem discrimen inter puncta conjugata statuere licet.

32. Si regula sursum vergens Ee cum horizontali EF faciat angulum semirecto minorem, in aequationibus inde ortis dimensiones ipsarum x et y aequabiliter crescent, eruntque hujusmodi:

$$\text{I. } Ax+By^2=0,\quad \text{II. } Ax+By^3=0,\quad \text{III. } Ax^2+By^3=0,\quad \text{IV. } Ax+By^4=0,$$
$$\text{V. } Ax^2+Bxy^2+Cy^4=0,\quad \text{VI. } Ax^3+By^4=0, \text{ etc.,}$$

quae omnes puncta curvae in axe designant, ramorumque eo desinentium tangentes, siquidem fuerint reales, ad axem erunt perpendiculares; sin autem aequatio pluribus constans terminis uti V factores habeat imaginarios, puncta tantum conjugata sine tangentibus indicabuntur. Apparet ergo singulas regulae positiones sursum vergentes Ea, Ec, Ee cuncta curvae puncta in axis principio sita praebere, atque etiam inde tangentes singulorum curvae ramorum ibi concurrentium cognosci; sic regulae positiones Ea praebent eos ramos, qui ab ipso axe tanguntur, positio Ec eos, quorum tangentes in axem sunt obliquae, ac denique positiones Ee eos ramos, qui axi perpendiculariter insistunt.

33. Quemadmodum si regulae positio AB fit horizontalis, ea curvae puncta abscissae $x=0$ respondentia prodeunt, quae ab axe intervallo finito distant. Ita si regulae directio deorsum vergat veluti bF, cF, fF, puncta curvae ab axe in infinitum distantia, vel pro quibus fit $y=\infty$ existente $x=0$, exhibentur, atque natura ramorum hic in infinitum excurrentium, quatenus ad abscissas minimas x referuntur, exprimetur hujusmodi aequationibus hyperbolicis: $A+Bxy=0$, $A+Bx^2y=0$, $A+Bxy^2=0$, ex quibus intelligitur ipsam applicatam in axis principio ductam fore horum curvae ramorum asymtotas. Fieri quoque potest, ut hujusmodi aequatio veluti $a^4+xxyy=0$ imaginaria complectatur, cum inde sit $y=\frac{aa}{x}\sqrt{-1}$, sicque nulla tangens indicetur. Interim tamen cum $0.\sqrt{-1}$ sit $=0$, erit quoque $\frac{\sqrt{-1}}{0}=\frac{1}{0}$ ideoque infinitum, ita ut nihilominus his casibus applicata y posito $x=0$ fiat infinita, etiamsi punctum curvae ea notatum tangente destituatur; affirmare itaque liceat in intervallo infinito ab axe extare quoque puncta conjugata.

34. Hoc modo ergo ope parallelogrammi tangentes ramorum curvae, qui abscissae $x=0$ respondent, inveniuntur, iis tantum exceptis casibus, quibus huic abscissae evanescenti applicatae finitae magnitudinis respondent. Verum etiam his casibus ope differentiationis, qua valor fractionis $\frac{dy}{dx}$ eruitur, positio tangentis definiri poterit, nisi curvae ibi existat punctum duplex vel multiplex,

uti jam supra annotavimus. Sit enim $y = a$ posito $x = 0$, atque in fractione finita $\frac{P}{Q}$, quae pro $\frac{dy}{dx}$ est inventa, ponatur tam in numeratore P quam in denominatore Q et $x = 0$ et $y = a$, ac valor resultans, si fuerit determinatus, indicabit et punctum curvae ibi extare simplex, ejusque simul tangentem. Quodsi autem hac facta substitutione et numerator P et denominator Q evanescat, indicium hoc erit punctum curvae esse duplex vel adeo multiplex, quo casu aequatio ponendo $y = a + z$ ad alium axem erit reducenda, in quem id curvae punctum incidat, ut deinceps ope parallelogrammi natura ramorum in illo puncto concurrentium investigari possit.

35. Altera pars instituti, quod hoc capite suscepimus, versatur in investigatione ramorum, qui abscissae infinite magnae $x = \infty$ respondent, quod negotium etiam facile ope parallelogrammi expediri potest. Postquam enim (Fig. 42) singuli termini aequationis in cellulas parallelogrammi fuerint dispositi, manifestum est in qualibet columna verticali omnes terminos prae infimo evanescere, ita ut ad hanc investigationem sufficiat ex singulis columnis solos terminos infimos retinuisse. Tum vero aeque evidens est atque in casu praecedente, si regula ad hos terminos infimos ita applicetur, ut nulli termini infra eam promineant, prae terminis, per quos regula transit, omnes terminos superiores evanescere casu $x = \infty$, ita ut singulae hujusmodi regulae positiones praebiturae sint terminos aequationis inter se homogeneos, prae quibus reliqui omnes rejici queant.

36. Proposita ergo aequatione quacunque pro curva inter coordinatas x et y, si scire velimus puncta curvae, abscissae x in infinitum abeunti respondentia, tum singuli aequationis termini, ut ante est praeceptum, in cellulas parallelogrammi inscribantur, et quoties fieri potest regula ad terminos binos infimos ita applicetur, ut nulli terminorum reliquorum infra regulam cadant, quo facto unaquaeque hujusmodi regulae positio eos monstrabit aequationis terminos, prae quibus reliqui omnes casu $x = \infty$ rejici queant, indeque natura ramorum curvae in infinitum excurrentium, qui quidem abscissae $x = \infty$ respondeant, colligetur. Hinc scilicet patebit, utrum applicatae y valores, ipsi $x = \infty$ respondentes, evanescant, an sint finitae magnitudinis, et an ipsae fiant infinitae; quod discrimen ex diversis regulae positionibus respectu horizontalium laterum parallelogrammi colligetur.

37. Quemadmodum autem judicium institui oporteat circa naturam hujusmodi ramorum in infinitum extensorum facilius exemplo quodam evolvendo quam praeceptis tradendis doceri potest.

Exemplum. *Invenire naturam ramorum pro abscissa* $x = \infty$ *curvae hac aequatione expressae*

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2a^{10}xy - 3a^9x^3 + 2a^8x^2y^2 - 3a^7x^5 - 2a^5x^4y^3 + a^4x^7y - 2a^3x^5y^4 - 4a^2x^8y^2 + 2ax^8y^3 + x^8y^4 \\ & - 3a^9y^3 + 4a^8y^4 - a^7x^4y + 3a^5x^3y^4 - a^4x^6y^2 - 3a^3x^2y^7 - 4ax^6y^5 - x^6y^6 \\ & - 2a^5x^2y^5 + 2ax^4y^7 \\ & + a^5xy^6 \end{aligned}$$

Dispositis terminis hujus aequationis in cellulas parallelogrammi (Fig. 46), rejectis coëfficientibus, regula binis terminis in quaque columna verticali infimis quoties fieri potest ita applicetur, ut infra eam nulli termini appareant, sicque progrediendo a dextra ad sinistram quinque regulae situs prodibunt, qui indicantur in figura lineis *Gg*, *Hh*, *Ji*, *Kk* et *Ll*, quarum duae priores deorsum tendunt, duae posteriores vero sursum, at media *Ji* est horizontalis. Jam singuli hi situs sequenti modo evolvantur.

I. Situs *Gg* praebet terminos x^4y^7 et x^6y^6, ex quibus formatur haec aequatio:

$$2ax^4y^7 - x^6y^6 = 0 \quad \text{seu} \quad 2ay = xx,$$

pro parabola, unde concluditur curvam habere pro abscissa $x = \infty$ ramos in infinitum extensos parabolicos, qui in infinito cum parabola hac aequatione $2ay = xx$ contenta confundantur, ita ut abscissae $x = \infty$ respondeat applicata $y = \infty$, quae eadem abscissae $x = -\infty$ conveniat. Hi igitur rami asymtotis rectis destituuntur.

II. Situs Hh, qui ad horizontalem angulo semirecto est inclinatus, praebet terminos x^6y^6 et x^8y^4, unde oritur aequatio $x^8y^4 - x^6y^6 = 0$ seu $xx - yy = 0$ quae resolvitur in has duas $x + y = 0$ et $x - y = 0$, utramque pro linea recta ad axem angulo semirecto inclinata, altera quidem inclinata, altera reclinata. Utraque igitur ostendit asymtotam rectam, ita ut haec curva duas habeat asymtotas, quae vel in ipsas illas rectas aequationibus $x + y = 0$ et $x - y = 0$ expressas, incidant, vel ipsis erunt parallelae. Quanto autem intervallo ab iis distent, hinc definiri nequit, quoniam ad hoc reliquorum terminorum aequationis ratio est habenda. Inclinatio ergo tangentium ad axem tantum hic indicatur; puncta vero, ubi axem secent, hinc non cognoscuntur. Ceterum hinc apparet tam abscissae $x = +\infty$ quam $x = -\infty$ geminas convenire applicatas $y = +\infty$ et $y = -\infty$, atque has duas asymtotas se invicem ad angulos rectos intersecare, cum utraque ad axem angulo semirecto inclinetur.

III. Situs horizontalis Ji per tres terminos x^8y^4, x^8y^3 et x^8y^2 transit, indeque emergit haec aequatio $x^8y^4 + 2ax^8y^3 - 4aax^8y^2 = 0$ seu $y^2 + 2ay - 4aa = 0$, ex qua resultant duo ipsius y valores constantes: $y = -a + a\sqrt{5}$ et $y = -a - a\sqrt{5}$, qui indicant duas rectas axi parallelas ab eoque his intervallis distantes, quae simul ipsae erunt curvae asymtotae; nam cum abscissae $x = \infty$, vel etiam $x = -\infty$ valores finiti ipsius applicatae y respondeant, manifestum est hos valores lineas rectas formare, quae adeo ipsae futurae sint curvae asymtotae. Hoc ergo casu non solum inclinatio linearum, quae curvam in infinito tangunt, innotescit, sed etiam ipsa harum linearum positio designatur.

IV. Situs regulae Kk transit per terminos x^8y^2 et x^7y, ex quo formabitur aequatio $-4a^2x^8y^2 + a^4x^7y = 0$ seu $a^2 = 4xy$, unde colligitur posito $x = \pm\infty$ fore $y = 0$. Sumta ergo abscissa x infinite magna, ramus curvae in ipsum axem incidit, eritque ideo ipse axis asymtotos, perinde atque in hyperbola aequatione $aa = 4xy$ contenta.

V. Situs denique regulae Ll terminos dat x^7y et x^5, unde obtinetur aequatio

$$a^4x^7y - 3a^7x^5 = 0 \quad \text{seu} \quad x^2y = 3a^3, \quad \text{quae dat} \quad y = \frac{3a^3}{xx}.$$

Fit igitur pariter $y = 0$ posito $x = \pm\infty$, sicque hinc ipse axis denuo erit asymtota lineae curvae propositae. Sed hi curvae rami, qui ad axem convergunt, diversi sunt ab iis, quos situs praecedens regulae suppeditavit, quoniam horum indoles ad hyperbolam cubicam aequatione $xxy = 3a^3$ accedit, cum illorum natura per hyperbolam conicam indicetur.

38. Ex hoc exemplo intelligitur, quomodo in genere ex ratione situs regulae de natura ramorum in infinitum porrectorum sit judicandum. Scilicet si situs regulae a dextra ad sinistram progrediendo examini subjiciamus, primo occurrunt ii, qui deorsum vergunt ut Gg, Hh, tum horizontalis, si quis adest, ut Ji, denique sursum vergentes ut Kk et Ll. Ac primo quidem si regulae situs est horizontalis, qui est quasi medium inter descendentes et ascendentes, ex eo proveniunt valores finiti applicatae y, qui abscissae infinitae x respondeant, hocque casu inveniuntur asymtotae curvae, quae

axi sunt parallelae, ab eoque intervallo finito distantes, atque hujusmodi asymtotae tot prodibunt, quot aequatio ex hoc regulae situ nata habuerit radices reales. Ubi notandum si duae pluresve radices fuerint aequales, totidem asymtotas in unam coalescere.

39. Quando autem, ut primo loco assumsimus, regula deorsum vergit ut Gg vel Hh, tum abscissis infinitis applicatae quoque infinitae convenient, et curva ramos habebit ab axe in infinitum divergentes. Praeterea vero hinc dijudicari potest, utrum hi rami sint hyperbolici seu asymtotis praediti, an vero parabolici. Scilicet si angulus, quo situs regulae uti Gg ad horizontem inclinatur, major fuerit semirecto, ramus erit parabolicus axem versus convexus, ejusque natura exprimetur aequatione parabolica $y^m = Ax^n$, in qua exponens ipsius x major est exponente ipsius y. Contra vero, si angulus inclinationis regulae deorsum vergentis ad horizontem minor fuerit semirecto, arcus itidem provenit parabolicus, sed concavitate axem respiciens, et in aequatione parabolica ipsi conveniente $y^m = Ax^n$ erit $m > n$. Priori casu tangens curvae in punctis abscissis infinitis respondentibus, axem in distantia infinita normaliter secabit, posteriori vero casu axi ad intervallum infinitum erit parallela.

40. Si regula sinistrorsum et deorsum vergens cum horizontali faciat angulum semirectum ut Hh, ea per omnes terminos homogeneos summae dimensionis transibit, atque aequatio ex hoc regulae situ orta erit hujusmodi

$$Ax^m + Bx^{m-1}y + Cx^{m-2}y^2 + Dx^{m-3}y^3 + \text{etc.} = 0.$$

Hujus igitur radices, sunt investigandae quotquot habuerit reales, quoniam imaginariae nihil nisi forte puncta conjugata in infinitum distantia indicant. Radices vero reales quotquot fuerint inter se inaequales, cum hujus sint formae $\alpha x + \beta y = 0$, inclinationem tangentium in infinito indicabunt, eandemque inclinationem asymtotae habebunt, etsi ipsa asymtotarum positio hinc non definiatur. Radices autem aequales vel plures asymtotas coalescentes, vel etiam inter se parallelas monstrabunt, siquidem in spatium finitum cadunt; sin autem ad axem in intervallo finito non accedant, tum aequalitas plurium radicum ramos parabolicos, quorum axes eandem teneant inclinationem, declarabit, quos proinde peculiari ratione indagari oportet.

41. Quando vero regula sinistrorsum ac sursum est directa, uti Kk vel Ll, aequationes inde suppeditatae semper indicant abscissis infinitis respondere applicatas evanescentes; rami igitur curvae per has aequationes denotatae in spatio infinito cum axe confundentur, eritque propterea ipse axis asymtota horum arcuum. Quin etiam diversa inclinatio regulae simul diversam naturam horum ramorum hyperbolicorum monstrabit, sive cum hyperbola appolloniana conveniant, quod evenit si regula ad angulum semirectum est inclinata, sive ad naturam aliarum hyperbolarum superiorum ordinum sint referendae. Quare hoc casu circa indolem ramorum curvae in infinitum excurrentium nihil praeterea desiderari potest.

42. Quoniam casu, quo tangens curvae in punctis, quae abscissae infinitae respondent, ad axem obliqua est inventa, in dubio relinquitur, utrum ea cum axe alicubi concurrat, nec ne? Dubium hoc resolvetur, si aequatio curvae ad alium axem revocetur tangenti illi parallelum; scilicet si pro tangente inventa fuerit haec aequatio $\alpha x - \beta y = 0$, vel si plures radices sint aequales, haec: $(\alpha x - \beta y)^n = 0$. Ducatur ad axem oblique recta aequatione $\alpha x - \beta y = 0$ expressa, haecque pro

axe assumatur, in quo abscissae sint $= t$, et applicatae ad eum normales $= u$; quo facto fiet

$$x = \frac{\beta t - \alpha u}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha t + \beta u}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}},$$

sicque natura curvae exprimetur aequatione inter has novas coordinatas t et u, cujus termini si in cellulas parallelogrammi disponantur, loco factoris compositi $(\alpha x - \beta y)^n$ nunc prodibit factor simplex $(-u\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)})^n$, qui cum aliis adhuc terminis, quos regula ostendet, comparatus dabit hujusmodi aequationem $\gamma u^n + \delta t^m = 0$, in qua erit $m < n$, ex qua perspicietur utrum tangens curvae, quae novo axi est parallela, ab eo intervallo finito distet, quod eveniet si $m = 0$, eritque id intervallum $u = \sqrt[n]{-\frac{\delta}{\gamma}}$, an vero infinito, quod evenit si $m > 0$. Illo casu recta axi parallela ab eoque intervallo $u = \sqrt[n]{-\frac{\delta}{\gamma}}$ ducta erit curvae asymtota, et ramus curvae hyperbolicus; posteriori vero casu ramus asymtota destituitur, ac parabolicus vocatur. Intelligitur hinc etiam fieri posse, ut asymtota adeo imaginaria evadat, veluti si $m = 0$, haecque aequatio obtineatur: $uu + aa = 0$, quam impossibilitatem ex aequatione ante axis permutationem concludere non licuerat. Ex quo perspicitur, quantum reductio aequationis ad alium axem subsidii afferat ad naturam curvae accuratius cognoscendam.

43. Fieri etiam potest, ut asymtota hoc modo inventa in ipsum novum axem incidat, seu intervallum u evanescat, quod cum ex formula $\gamma u^n + \delta t^m = 0$ exempli gratia assumta minus appareat, notandum est aequationem, quae hoc casu ex situ regulae derivatur, hujusmodi habituram esse formam generalem $\gamma t^k u^n + \delta t^m = 0$, ita ut sit $m < k + n$, unde manifesto tres casus oriuntur. Primus, si $k < m$, ideoque $\gamma u^n + \delta t^{m-k} = 0$, ex quo concluditur facto $t = \infty$ fore quoque $u = \infty$, sicque tangentem a novo axe, cui est parallela, infinite distare, ramumque curvae fore propterea parabolicum seu asymtota destitutum; ubi quidem notari convenit, hunc casum locum habere non posse nisi sit $n > 1$, hoc est nisi in priori evolutione secundum § 40 facta, aequatio

$$Ax^m + Bx^{m-1}y + \text{etc.} = 0$$

duas pluresve radices habeat aequales, quia n assumsimus ad numerum aequalium hujus aequationis radicum $\alpha x - \beta y$ denotandum. Quare, ut ibi jam monuimus, nisi plures radices fuerint aequales, ramus curvae parabolicus esse nequit. Secundus casus est si $k = m$, quo formula superior abit in $\gamma u^n + \delta = 0$ et indicat intervallum asymtotae curvae a novo axe, cui est parallela. Tertius casus locum habet si $k > m$, quo fit $\gamma t^{k-m} u^n + \delta = 0$, hocque manifestum est facto $t = \infty$ fieri $u = 0$, ideoque ipsum novum axem fore curvae asymtotam. Neque vero solum hinc concluditur istum ramum curvae in infinitum protensum esse hyperbolicum, sed etiam natura hyperbolae, quacum congruit, cognoscitur ex aequatione $\gamma t^{k-m} u^n + \delta = 0$.

44. Sin autem tangens curvae in infinitum extensae ejusve asymtota non in ipsum axem incidat, sed ei in dato intervallo sit parallela, uti casu secundo § praec. atque etiam § 38 usu venit, quo situs regulae fit horizontalis, tum hac methodo quidem distantia asymtotae ab axe, cui est parallela, invenitur. Sed natura rami curvae ad istam asymtotam convergentis non agnoscitur, seu hyperbola, quacum conveniat, non definitur, uti eo casu, quo asymtota cum ipso axe confunditur. Quanquam

autem ad praesens institutum nostrum sufficiat positionem tangentis determinasse, tamen levi negotio ea quoque hyperbola assignari potest, ad quam natura rami curvae proxime accedat. Ponamus enim vel ex prima aequatione inter x et y, vel ex jam immutata inter t et u prodiisse pro casu $x = \infty$ vel $t = \infty$ hanc aequationem y vel $u = a$, tum haec ipsa recta ab axe intervallo $= a$ distans pro novo axe assumatur, statuendo y vel $u = a + v$, sicque obtinebitur nova aequatio inter abscissam x seu t et applicatam v, quae ad parallelogrammum reducta hunc curvae ramum per situm regulae a dextra ad sinistram sursum vergentis veluti *Kk* seu *Ll* exhibebit, ex quo non solum constabit hunc novum axem ipsum esse curvae asymtoton, sed etiam regula aequationem pro hyperbola illa suppeditabit, quae naturam rami curvae in infinitum excurrentis continebit, quemadmodum jam supra § 41 annotavimus. Hocque ergo modo omnes curvae rami ad abscissam infinitam relati non solum invenientur, sed etiam parabolae vel hyperbolae, quae proxime ad eorum naturam accedant, indicari possunt.

45. Cum igitur aequatione quacunque inter coordinatas orthogonales x et y proposita, curvae per eam expressae natura tam iis in locis, quae abscissae $x = 0$, quam in iis, quae abscissae infinitae respondent, definiri queat, manifestum est, commutandis his coordinatis, curvae naturam quoque cognosci posse in iis locis, quae applicatis y vel evanescentibus vel in infinitum abeuntibus respondent. Neque ad hoc opus erit, ut novum parallelogrammum construatur, cum idem, in quo termini aequationis modo ante exposito sunt inscripti, etiam judicio ad applicatas accommodando inservire possit. Quemadmodum enim ante, ubi abscissa erat proposita (Fig. 46), latera parallelogrammi *PQ* et *SR* erant tanquam horizonti parallela spectata, ita nunc, proposita applicata altera, latera *PS* et *QR* situm horizontalem occupare sunt existimanda, atque plagae laterales dextra et sinistra inter se commutandae, quo facto eaedem conclusiones, quae ante ex situ regulae pro abscissa vel evanescente vel infinita sunt derivatae, iisdem verbis retentis pro applicata vel evanescente vel in infinitum abeunte valebunt.

46. Hinc igitur perspicuum est eandem parallelogrammi figuram ad judicia tam pro abscissa x, uti hactenus fecimus, quam pro applicata y adhiberi posse. Quare si utrumque judicium conjunctim instituere velimus, regulam continuo ad binos terminos figurae extimos ita applicari oportet, ut nulli termini extra promineant, quemadmodum in figura videre licet, ubi lineae *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, *Gg*, *Hh*, *Ji*, *Kk*, *Ll* et *Mm* has regulae positiones indicant, in quibus omnes, quae quidem occurrere possunt, continentur. Harum enim sunt quatuor lateribus parallelogrammi parallelae: *Cc*, *Ff*, *Ji*, *Mm*, reliquae vero his inter jacentes obliquae, inter quas porro hoc discrimen est notandum, quod aliae cum lateribus horizontalibus angulum semirectum constituant, aliae majorem, aliae minorem semirecto; videmus enim ab hoc discrimine naturam curvae plurimum pendere, siquidem cellulae parallelogrammi quadratae efficiantur.

47. Omnino ergo sedecim diversae regulae positiones occurrere possunt, quas figura 47 ratione inclinationis earum ad latera parallelogrammi repraesentat. Incipiendo scilicet ab ea, quae ad sinistram est perpendicularis, ut *AB* in Fig. 47 et *Mm* in Fig. 46 atque circuitum sursum dextrorsum absolvendo, hae sedecim positiones ita ordine procedent:

I.	AB perpendicularis ad sinistram	In Fig. 46 convenit Mm
II.	EJ plus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Aa
III.	EF semirecto ad horizontem inclinata	« « — « —
IV.	EK minus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Bb
V.	BC horizontalis superior	« « — « Cc
VI.	JG minus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Dd
VII.	FG semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Ee
VIII.	KG plus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « —
IX.	CD perpendicularis ad dextram	« « — « Ff
X.	GL plus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Gg
XI.	GH semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Hh
XII.	GM minus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « —
XIII.	DA horizontalis inferior	« « — « Ji
XIV.	LE minus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « —
XV.	HE semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Kk
XVI.	ME plus semirecto ad horizontem inclinata	« « — « Ll

Nunc quasnam conclusiones singulae hae positiones pro natura curvae suppeditent, exponamus.

48. Primus regulae situs AB praebet pro applicata $y = 0$ omnes valores finitae magnitudinis abscissae x, seu omnes abscissas finitas indicat, quibus respondet applicata evanescens. Indicat quidem etiam abscissas evanescentes, si aequatio fuerit per x ejusve potestatem divisibilis; sed hi casus per sequentes regulae positiones clarius exhibentur. Tangens autem in his curvae locis non indicatur.

Secundus regulae situs EJ ea curvae puncta indicat, pro quibus est tam $x = 0$, quam $y = 0$, simul autem ostendit tangentem in ipsum axem incidere, seu in his punctis curvam ab axe tangi, et natura curvae accedit ad parabolam $x^m = Cy^n$ existente $m > n$.

Tertius regulae situs EF iterum ea puncta curvae exhibet, pro quibus est tam $x = 0$ quam $y = 0$, sed quorum tangentes sunt ad axem obliquae, earumque simul obliquitas indicatur.

Quartus regulae situs EK etiam nunc ea curvae puncta exhibet, pro quibus est tam $x=0$ quam $y = 0$; hinc vero concluditur tangentes curvae in his punctis esse ad axem perpendiculares, et natura curvae exprimitur parabola $y^m = Cx^n$ existente $m > n$.

49. Quintus regulae situs BC pro abscissa $x = 0$ praebet omnes finitos valores applicatae y, neque vero tangentes curvae in his punctis indicat.

Sextus regulae situs JG indicat posita abscissa $x = 0$, fieri applicatam y infinitam, ita ut recta ad axem in principio abscissarum normalis sit curvae asymtota, ideoque ramus hic curvae hyperbolicus, cujus natura accedat ad hujusmodi hyperbolam $x^m y^n = C$, ubi sit $n > m$.

Septimus regulae situs FG pariter indicat posito $x = 0$ fieri $y = \infty$, sicque ipsam hanc applicatam fore curvae asymtotam, ejusque ramum hyperbolicum ad naturam hyperbolae conicae $xy = C$ accedentem.

Octavus regulae situs KG quoque pro $x = 0$ praebet $y = \infty$, at rami curvae, qui ad hanc applicatam tanquam asymtotam convergunt, ad naturam hujusmodi hyperbolae $x^m y^n = C$ referuntur, ubi sit $m > n$.

50. Nonus regulae situs CD eos abscissae x valores finitos exhibet, quibus respondent applicatae y infinite magnae, haeque ergo erunt simul tangentes et asymtotae curvae. Natura autem hyperbolica, ad quam isti curvae rami pertineant, hinc non cognoscitur.

Decimus regulae situs GL declarat abscissis x infinite magnis respondere applicatas quoque infinite magnas, quae simul sint curvae tangentes, sed cum totae sint in infinitum dissitae, rami hi curvae non hyperbolici censentur, sed parabolici, atque ad hujusmodi naturam parabolicam accedunt $x^m = Cy^n$, ubi sit $m > n$.

Undecimus regulae situs GH pro abscissis x infinitis applicatas y pariter infinitas praebet, per hujusmodi aequationes $y = \alpha x$, ex quibus colligitur tangentem curvae ad axem fore obliquam. Verum hinc neque axis punctum, ubi tangens incidat, innotescit, neque natura rami curvae in infinitum extensi, sive sit hyperbolica, sive parabolica; posterius enim evenire potest, si duae pluresve radices fuerint aequales, ut §§ 40 et 43 est notatum.

Duodecimus regulae situs GM pariter ac bini praecedentes pro abscissis x infinitis applicatas y quoque infinitas ostendit per hujusmodi aequationes $y^m = Cx^n$ ubi $m > n$, hincque simul intelligitur tangentem curvae esse axi parallelam, ab eoque intervallo infinito remotam, ita ut rami curvae hinc resultantes sint parabolici.

51. Decimus tertius regulae situs DA pro abscissis x infinitis applicatas y finitae magnitudinis offert, unde colligitur rectas axi parallelas, quae ab eo intervallis $= y$ sint remotae, fore curvae tangentes ejusque asymtotas. Verum natura hyperbolica, ad quam isti curvae rami referantur, hinc non innotescit.

Decimus quartus regulae situs LE ad abscissas x infinitas refert applicatas y evanescentes, dum hujusmodi praebet aequationes $x^n y^m = C$ ubi $m > n$, eritque ergo ipse axis tangens curvae ejusque adeo asymtota, ac simul natura hyperbolica hujusmodi curvae ramorum innotescit.

Decimus quintus regulae situs HE hujusmodi praebet aequationes $xy = C$ pro abscissis x infinitis, quibus idcirco applicatas nihilo aequales respondere manifestum est. Erit ergo ipse axis tangens et asymtota curvae, cujus natura hyperbola conica exprimitur.

Decimus sextus denique regulae situs ME itidem pro abscissis infinitis x ostendit applicatas y evanescentes, per hujusmodi aequationes $x^m y^n = C$ existente $m > n$, ita ut axis quoque sit tangens et asymtota curvae, cujus natura hyperbolica hinc simul erit manifesta.

52. Quo hae conclusiones, quas singuli isti sedecim regulae situs suppeditant, clarius perspiciantur, in tabula subnexa pro unoquoque tam valores coordinatarum quam positionem tangentium, et curvae naturam sive parabolicam, sive hyperbolicam, siquidem ex situ regulae innotescit, exhibeamus:

Situs regulae	*Coordinatae*		*Tangentis inclinatio*	*Natura rami parabolica seu hyperbolica.*
I. AB	$x =$ fin.	$y = 0$	— —	— —
II. EJ	$x = 0$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m = Cy^n$ ubi $m > n$
III. EF	$x = 0$	$y = 0$	ad axem obliqua	— —
IV. EK	$x = 0$	$y = 0$	ad axem perpend.	$y^m = Cx^n$ ubi $m > n$
V. BC	$x = 0$	$y =$ fin.	— —	— —
VI. JG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m y^n = C$ ubi $m < n$
VII. FG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$xy = C$
VIII. KG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m y^n = C$ ubi $m > n$
IX. CD	$x =$ fin.	$y = \infty$	ad axem perpend.	— —
X. GL	$x = \infty$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m = Cy^n$ ubi $m > n$
XI. GH	$x = \infty$	$y = \infty$	ad axem obliqua	— —
XII. GM	$x = \infty$	$y = \infty$	axi parallela	$y^m = Cx^n$ ubi $m > n$
XIII. DA	$x = \infty$	$y =$ fin.	axi parallela	— —
XIV. LE	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m y^n = C$ ubi $m < n$
XV. HE	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$xy = C$
XVI. ME	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m y^n = C$ ubi $m > n$

53. Hi igitur regulae situs omnia curvae puncta indicant, pro quibus alterutra coordinatarum vel evanescit vel in infinitum abit; quare si cum axe principali, in quo abscissae capiuntur, conjungatur alter axis, ad quem applicatae referuntur, quoniam hos duos axes inter se commutare licet, regulae situs omnia ea curvae puncta ostendunt, quae vel in alterutrum axem cadunt, vel intervallo infinito sunt remota. Atque haec investigatio aeque locum habet, sive ambo hi axes sint inter se normales, uti assumsimus, sive obliqui, quo posteriori casu eae tangentes, quae axi principali perpendiculares sunt inventae, alteri axi parallelae sunt dicendae. Ex quo perspicuum est, cum axes isti pro lubitu immutari queant, hac ratione per applicationem regulae ad parallelogrammum omnia curvae puncta assignari posse.

54. Neque vero, uti jam observavimus, ad omnia curvae puncta, quae hoc modo reperiuntur, simul tangentes ducere licet; excipiuntur namque ea, quae primus et quintus regulae situs exhibet: tum vero etiam pro iis, quae situs undecimus praebet, inclinatio quidem tangentis ad axem colligitur. Sed vera ejus positio, seu ejus concursus cum axibus hinc definiri nequit. Denique natura curvae circa haec puncta, quae hoc modo reperiuntur, seu aequatio vel parabolica vel hyperbolica ejus indolem proxime exprimens, non ex omnibus regulae sitibus colligi potest, excipiuntur enim situs I, III, V, IX, XI et XIII. Sed quomodo hi defectus per relationem curvae ad alios axes suppleri possint, jam clare exposuimus. Diligentius vero etiam hanc indagationem evolvere conabimur in sequentibus capitibus, ubi accuratius in naturam linearum curvarum, calculo differentiali in subsidium vocato, inquiremus.

Caput V.

De inventione ramorum in infinitum extensorum.

1. Si pars quaepiam lineae curvae in infinitum extenditur, ejus puncta a principio axis intervallo infinito distant, quaecunque etiam linea recta pro axe assumatur. Hinc si abscissae x, quibus rami infiniti respondent, vel evanescant, vel sint finitae magnitudinis, applicatae y necessario erunt infinite magnae; ac vicissim, si applicatae sint vel evanescentes vel infinitae, abscissae erunt infinite magnae. Saepenumero etiam evenit, ut tam abscissae quam applicatae in finitum abeant. Quare quacunque linea recta pro axe assumta, omnes curvae rami in infinitum excurrentes invenientur, si coordinatarum x et y vel altera vel utraque infinita ponatur. Sic in enumeratione situum regulae circa finem capitis praecedentis facta, sextus cum sequentibus omnibus ramos in infinitum extensos indicat.

2. Quanquam autem haec ramorum in infinitum extensorum inventio in capite praecedente jam exposita videtur, ubi per regulae applicationem ad parallelogrammum Newtonianum indolem eorum curvae ramorum, pro quibus vel alterutra coordinatarum vel utraque in infinitum abit, investigavimus, tamen saepenumero accuratiori investigatione opus est, cum ad veram tangentis positionem, tum ad naturam ipsam illius curvae portionis definiendam, uti jam supra innuimus. Quin etiam fieri potest, qui casus imprimis sunt notandi, ut per situm regulae ramus curvae in infinitum extensus indicetur, qui tamen si reliquorum aequationis terminorum ratio simul habeatur, fiant imaginarii. Denique usus parallelogrammi ante expositus tantum ad curvas algebraicas, quarum aequationes ad rationalitatem jam sint perductae, patet; unde si aequatio vel irrationalitate sit implicata, vel adeo transcendens, peculiari methodo opus erit ad hoc negotium expediendum.

3. Quoties curva est algebraica ejusque aequatio ad rationalitatem revocata, parallelogrammum Newtonianum summa cum utilitate adhiberi potest, non solum ad veram tangentis positionem et curvae naturam pro iis quoque casibus eruendam, quibus superior methodus insufficiens est visa, nisi axis curvae immutetur, sed etiam ejus ope eos casus dignoscere licebit, quibus rami infiniti, qui primo intuitu per situm regulae indicari videntur, fiunt imaginarii. Dari autem hujusmodi casus, unico exemplo curvae hac aequatione expressae $(yy-ax)^2+aayy+a^4=0$ probasse sufficiat, pro qua ex parallelogrammo eliciuntur rami in infinitum extensi, quorum natura exprimatur aequatione $yy-ax=0$, cum tamen ex tota aequatione appareat nullam plane linearum curvarum ei respondere: reperitur enim $yy-ax=a\sqrt{-(aa+yy)}$, ita ut nulli plane applicatae y abscissa realis respondeat.

4. Intelligitur ergo ad naturam curvae in infinitum expansae accuratius investigandam, eorum quoque aequationis terminorum, qui prae iis, quos regula trajicit, erant neglecti, rationem esse habendam; si quis enim horum terminorum, etiamsi pro infinite parvis haberi queant, imaginaria involvat, tota aequatio imaginaria erit censenda. Sic etsi posito x infinito, in hac aequatione $y=\frac{a}{x}+\frac{b}{xx}$ terminus $\frac{b}{xx}$ prae $\frac{a}{x}$ rejici queat, ita ut haec aequatio casu $x=\infty$ congruere existimari possit cum hac $y=\frac{a}{x}$, tamen si terminus rejectus seu ejus coëfficiens b sit imaginarius, tota aequatio fiet imaginaria, atque applicatae abscissis infinitis respondentes erunt imaginariae, neque ergo hoc casu aequatio $y=\frac{a}{x}$ ad curvae indolem investigandam adhiberi poterit. — — — — —

XIX.

Problematis ex theoria maximorum et minorum solutio.

Problema. (Fig. 48) *Super recta* AB *constituere triangulum* AOB, *ut si ex dato puncto* V *in sublimi posito ducantur rectae* VA, VB *et* VO, *sit summa binorum triangulorum* AVO+BVO *minima.*

Solutio. Ex V in planum trianguli quaesiti demittatur perpendiculum VC, et ex C in rectas quaesitas AO et BO productas agantur perpendiculares CP et CQ: erunt rectae VP et VQ in easdem perpendiculares. Hinc colligitur area $\Delta\ AVO=\frac{1}{2}AO.VP$ et $\Delta\ BVO=\frac{1}{2}BO.VQ$, ideoque minimum effici oportet

$$AO\sqrt{(CV^2+CP^2)}+BO\sqrt{(CV^2+CQ^2)}.$$

Statuamus nunc rectas datas $CA=a$, $CB=b$, $AB=c$ et $CV=h$, itemque angulos datos $CAB=\alpha$ et $CBA=\beta$, hincque quaeramus binos angulos $BAO=\mu$, $ABO=\nu$, ideoque $AON=BOM=\mu+\nu$, unde colligimus

$$AO=\frac{c\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)}\quad \text{et}\quad BO=\frac{c\sin\mu}{\sin(\mu+\nu)},$$

et ob angulos $CAP=\alpha-\mu$ et $CBQ=\beta-\nu$ fit

$$CP=a\sin(\alpha-\mu)\quad \text{et}\quad CQ=b\sin(\beta-\nu)$$

quare ob c constans minimum esse debet

$$\frac{\sin\nu\sqrt{(hh+aa\sin^2(\alpha-\mu))}}{\sin(\mu+\nu)}+\frac{\sin\mu\sqrt{(hh+bb\sin^2(\beta-\nu))}}{\sin(\mu+\nu)},$$

cujus ergo formulae differentiale, positis μ et ν variabilibus, nihilo est aequandum. Est vero

$$d.\frac{\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)}=\frac{d\nu\cos\nu}{\sin(\mu+\nu)}-\frac{(d\mu+d\nu)\sin\nu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)}=\frac{d\nu\sin\mu-d\mu\sin\nu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)},$$

$$d.\frac{\sin\mu}{\sin(\mu+\nu)}=\frac{d\mu\cos\mu}{\sin(\mu+\nu)}-\frac{(d\mu+d\nu)\sin\mu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)}=\frac{d\mu\sin\nu-d\nu\sin\mu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)}.$$

Tum vero posito $\sqrt{(hh+aa\sin^2(\alpha-\mu))}=P$ et $\sqrt{(hh+bb\sin^2(\beta-\nu))}=Q$ erit differentiando

$$dP=\frac{-aad\mu\sin(\alpha-\mu)\cos(\alpha-\mu)}{P}\quad \text{et}\quad dQ=\frac{-bbd\nu\sin(\beta-\nu)\cos(\beta-\nu)}{Q},$$

quibus valoribus substitutis prodit differentiale nihilo aequandum

$$+\frac{Pd\nu\sin\mu - Pd\mu\sin\nu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)} - \frac{aad\mu\sin\nu\sin(\alpha-\mu)\cos(\alpha-\mu)}{P\sin(\mu+\nu)},$$

$$+\frac{Qd\mu\sin\nu - Qd\nu\sin\mu\cos(\mu+\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)} - \frac{bbd\nu\sin\mu\sin(\beta-\nu)\cos(\beta-\nu)}{Q\sin(\mu+\nu)} = 0,$$

ubi termini elementis $d\mu$ et $d\nu$ affecti seorsim evanescentes reddi debent, ita ut hae binae obtineantur aequationes finitae per $\sin^2(\mu+\nu)$ multiplicando

$$\text{I.}\quad P\sin\mu - Q\sin\mu\cos(\mu+\nu) - \frac{bb\sin\mu\sin(\mu+\nu)\sin(\beta-\nu)\cos(\beta-\nu)}{Q} = 0,$$

$$\text{II.}\quad Q\sin\nu - P\sin\nu\cos(\mu+\nu) - \frac{aa\sin\nu\sin(\mu+\nu)\sin(\alpha-\mu)\cos(\alpha-\mu)}{P} = 0.$$

Formetur hinc ista combinatio $\text{I.}\frac{Q}{\sin\mu} - \text{II.}\frac{P}{\sin\nu}$, proditque

$$(PP-QQ)\cos(\mu+\nu)\begin{array}{l} -bb\sin(\mu+\nu)\sin(\beta-\nu)\cos(\beta-\nu) \\ +aa\sin(\mu+\nu)\sin(\alpha-\mu)\cos(\alpha-\mu)\end{array} = 0,$$

at est $PP-QQ = aa\sin^2(\alpha-\mu) - bb\sin^2(\beta-\nu)$, ideoque

$$aa\sin(\alpha-\mu)(\cos(\mu+\nu)\sin(\alpha-\mu)+\sin(\mu+\nu)\cos(\alpha-\mu)) =$$
$$bb\sin(\beta-\nu)(\cos(\mu+\nu)\sin(\beta-\nu)+\sin(\mu+\nu)\cos(\beta-\nu))$$

quae aequatio per reductionem sinuum abit in hanc

$$aa\sin(\alpha-\mu)\sin(\alpha+\nu) = bb\sin(\beta-\nu)\sin(\beta+\mu),$$

cujus vis quo distinctius perspiciatur, notetur in figura esse

$$\alpha-\mu = CAM,\ \alpha+\nu = CNB,\ \beta-\nu = CBN,\ \beta+\mu = CMA,$$

unde manifestum est fore

$$\frac{\sin(\alpha-\mu)}{\sin(\beta+\mu)} = \frac{\sin CAM}{\sin CMA} = \frac{CM}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\beta-\nu)}{\sin(\alpha+\nu)} = \frac{\sin CBN}{\sin CNB} = \frac{CN}{CB},$$

aequatio ergo nostra $\frac{aa\sin(\alpha-\mu)}{\sin(\beta+\mu)} = \frac{bb\sin(\beta-\nu)}{\sin(\alpha+\nu)}$ fit $CA.CM = CB.CN$ seu $CA:CB = CN:CM$, ita ut recta MN futura sit rectae AB parallela. Atque hinc porro concludere licet, si ex C per punctum O recta ducatur COJ, ab ea rectam AB bisectum iri, quod cum non sit adeo obvium, ita ostenditur.

Ob intersectionem rectarum AM et CJ in puncto O est

$$AJ:OJ = AB.CM:BM.CO,$$

similique modo ob rectarum BN et JC intersectionem in O

$$BJ:OJ = AB.CN:AN.CO,$$

unde alternando et multiplicando fit

$$AJ:BJ = CM.AN:CN.BM.$$

At ob rectam MN ipsi AB parallelam est

$$CM:CN = BM:AN \quad \text{seu} \quad CM.AN = CN.BM$$

ideoque $AJ = BJ$. Sicque unam conditionem jam elicuimus, qua novimus punctum quaesitum O in rectam OJ, qua AB bisecatur, cadere.

Solutionis pars altera. Restat ergo, ut conditio haec inventa in altera aequationum supra inventarum substituatur, indeque ambo anguli incogniti μ et ν, quorum jam quaedam relatio constat, determinentur: hoc autem modo in calculos nimis intricatos delaberemur, quam ut inde solutio commoda derivari posset. Expediet ergo novam resolutionem huic conditioni, quod punctum quaesitum O certo in recta CJ lineam datam AB bisecante reperitur, superstruere.

Fig. 49. In hac ergo recta CJ sit O punctum quaesitum. Ex A et B in eam demittantur perpendicula AF et BG, atque ob $AJ = BJ$ erit tam $AF = BG$ quam $JF = JG$. In calculum igitur introducamus has quantitates cognitas: $CJ = e$, $AF = BG = f$, $JF = JG = g$ et altitudinem $CV = h$. Tum vero sit intervallum quaesitum $JO = z$, erit $CO = e - z$. Hinc ob $OF = z + g$ et $OG = z - g$ habebitur

$$AO = \sqrt{(ff + (z+g)^2)} \quad \text{et} \quad BO = \sqrt{(ff + (z-g)^2)}$$

simulque perpendicula ex C in rectas AO et BO demissa sic facile obtinentur

$$AO : AF = CO : CP \quad \text{et} \quad BO : BG = CO : CQ, \text{ ut sit}$$

$$CP = \frac{f(e-z)}{AO} \quad \text{et} \quad CQ = \frac{f(e-z)}{BO},$$

unde fit

$$AO \,.\, VP = \sqrt{(hh\,.\,AO^2 + ff(e-z)^2)} = \sqrt{(ffhh + hh(z+g)^2 + ff(e-z)^2)}$$
$$BO \,.\, VQ = \sqrt{(hh\,.\,BO^2 + ff(e-z)^2)} = \sqrt{(ffhh + hh(z-g)^2 + ff(e-z)^2)}$$

quorum productorum summa debet esse minima.

Ad calculum contrahendum statuamus

$$ffhh + gghh + eeff = E,\; ff + hh = F,$$
$$eff - ghh = G,\; eff + ghh = H,$$

ut haec expressio minima sit efficienda

$$\sqrt{(E - 2Gz + Fzz)} + \sqrt{(E - 2Hz + Fzz)},$$

unde differentiando colligimus

$$\frac{Fz - G}{\sqrt{(E - 2Gz + Fzz)}} + \frac{Fz - H}{\sqrt{(E - 2Hz + Fzz)}} = 0$$

et irrationalitate sublata

$$(G - Fz)^2 (E - 2Hz + Fzz) = (H - Fz)^2 (E - 2Gz + Fzz),$$

quae evoluta praebet

$$\left.\begin{array}{l} EGG - 2GGHz + FGGzz \\ \quad - 2EFGz + 4FGHzz - 2FFGz^3 \\ \qquad + EFFzz \quad - 2FFHz^3 + F^2z^4 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} EHH - 2GHHz + FHHzz \\ \quad - 2EFHz + 4FGHzz - 2FFHz^3 \\ \qquad + EFFzz - 2FFGz^3 + F^2z^4 \end{array}$$

et contrahitur in hanc formam

$$E(GG - HH) - 2(GGH + EFG - GHH - EFH)z + F(GG - HH)zz = 0.$$

Facta divisione per $G - H$ nanciscimur

$$E(G+H)-2(GH+EF)z+F(G+H)z^2=0$$

et radice extracta

$$z=\frac{GH+EF\pm\sqrt{(EF-GG)(EF-HH)}}{F(G+H)}.$$

Jam vero est

$$F=ff+hh, \qquad G+H=2eff, \qquad EF=eeff(ff+hh)+hh(ff+gg)(ff+hh)$$

$$GH=eef^4-ggh^4, \quad GG=eef^4-2effghh+ggh^4, \quad HH=eeff^4+2effghh+ggh^4$$

unde fit $GH+EF=ff(2eeff+eehh+ffhh+gghh+h^4)$

$EF-GG=ffhh((e+g)^2+ff+hh)$

$EF-HH=ffhh((e-g)^2+ff+hh)$ sicque elicitur

$$z=\frac{2eeff+eehh+ffhh+gghh+h^4\pm hh\sqrt{(ff+hh+(e+g)^2)(ff+hh+(e-g)^2)}}{2e(ff+hh)},$$

hincque porro $CO=\dfrac{hh(ee-ff-gg-hh)\pm hh\sqrt{(ff+hh+(e+g)^2)(ff+hh+(e-g)^2)}}{2e(ff+hh)}.$

Transferamus has expressiones in figuram, huncque in finem ad CJ normaliter jungatur recta DE, in quam ex A et B demittantur perpendicula AD et BE junganturque VD et VE. Cum nunc sit $CV=h$, $CD=CE=f$, erit $DV=EV=\sqrt{(ff+hh)}$, $AD=e+g$, $BE=e-g$, hincque

$$AV=\sqrt{(ff+hh+(e+g)^2)}, \quad BV=\sqrt{(ff+hh+(e-g)^2)}$$

et $AD.BE=ee-gg$. Ergo ob $CJ=e$ habebitur

$$CO=\frac{CV^2}{2CJ}\cdot\frac{AD.BE-DV.EV\pm AV.BV}{DV.EV},$$

ubi perspicuum est rationem triangulorum ADV et BEV praecipue teneri, quae ad D et E sunt rectangula. Quodsi ergo vocentur anguli $DAV=\delta$ et $EBV=\varepsilon$, erit

$$DV=AV\sin\delta, \; AD=AV\cos\delta \;\text{ atque }\; EV=BV\sin\varepsilon, \; BE=BV\cos\varepsilon,$$

quibus introductis conficitur

$$CO=\frac{CV^2}{2CJ}\cdot\frac{\cos\delta\cos\varepsilon-\sin\delta\sin\varepsilon\pm1}{\sin\delta\sin\varepsilon}=\frac{CV^2}{2CJ}\cdot\frac{\cos(\delta+\varepsilon)\pm1}{\sin\delta\sin\varepsilon}.$$

Duplex igitur hinc nascitur solutio

$$\text{I. } CO=\frac{CV^2}{CJ}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)}{\sin\delta\sin\varepsilon}, \qquad \text{II. } CO=-\frac{CV^2}{CJ}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)}{\sin\delta\sin\varepsilon},$$

quarum prior dat punctum O inter puncta C et J, uti problema postulat; posterior vero praebet punctum O in recta JC ultra C producta, cui quidem etiam minimum convenit, sed non tale, quale in quaestione desideratur, quia aequatio inventa etiam quaestionem resolvit, ubi differentia triangulorum AVO et BVO minima quaereretur. Quocirca sola solutio prior locum habere est censenda.

Coroll. 1. Si ergo ponamus $ff+hh=kk$ erit

$$z=e-\frac{hh}{2ekk}(ee-gg-kk+\sqrt{(kk+(e+g)^2)(kk+(e-g)^2)})$$

unde patet si altitudo $CV=h$ evanescat, fore $z=e$, seu punctum O in C cadere, quo casu utique ambo triangula AVO et BVO evanescunt.

Coroll. 2. Sin autem altitudo $CV = h$ fiat infinita, quo casu etiam $k = \infty$ et $\frac{hh}{kk} = 1$, tum formula irrationalis fit

$$\sqrt{(k^4 + 2(ee + gg)kk)} = kk + ee + gg$$

ideoque $z = e - \frac{hh}{2ekk} \cdot 2ee = 0$. Punctum scilicet O in J cadit; unde perspicuum est, quemcunque altitudo h valorem finitum sortiatur, punctum O inter C et J cadere.

Coroll. 3. Aequatio quadratica primum inventa praebet

$$E + Fzz = \frac{2(GH + EF)z}{G + H}.$$

Hinc fit

$$E - 2Gz + Fzz = \frac{2(EF - GG)z}{G + H} = \frac{hh}{e}(kk + (e + g)^2)z,$$

$$E - 2Hz + Fzz = \frac{2(EF - HH)z}{G + H} = \frac{hh}{e}(kk + (e - g)^2)z,$$

unde prodit quantitas minima facta

$$\frac{h\sqrt{z}}{\sqrt{e}}(\sqrt{(kk + (e + g)^2)} + \sqrt{(kk + (e - g)^2)})$$

quae aequatur duplae areae triangulorum AVO et BVO.

Coroll. 4. Sin autem intervallo JO alius quicunque valor $JO = x$ tribuatur, eorumdem triangulorum summa duplicata fit

$$fh\sqrt{(1 + \frac{(x + g)^2}{ff} + \frac{(e - x)^2}{hh})} + fh\sqrt{(1 + \frac{(x - g)^2}{ff} + \frac{(e - x)^2}{hh})}$$

qua superior semper est minor, nisi sit $x = z$. Hic autem sumto $x = 0$, fit ista quantitas

$$2fh\sqrt{(1 + \frac{gg}{ff} + \frac{ee}{hh})} = 2\sqrt{(ffhh + gghh + eeff)}$$

sin autem capiatur $x = e$, seu O in C capiatur, erit ea

$$h\sqrt{(ff + (e+g)^2)} + h\sqrt{(ff + (e - g)^2)}.$$

XX.

Considérations sur quelques formules intégrales, dont les valeurs peuvent être exprimées, en certains cas, par la quadrature du cercle.

1. Toute formule différentielle rationelle peut être intégrée par le moyen des logarithmes et de la quadrature du cercle. Or ces intégrales sont, pour la plupart, renfermées dans des formules d'autant plus compliquées, que la variable contient de dimensions; cependant quand on donne à la variable, après l'intégration, une certaine valeur déterminée, il peut arriver que les intégrales, quelque compliquées qu'elles soient, se réduisent à des formules assez simples, qui semblent mériter une attention particulière. Il y a aussi des formules intégrales qui, en général, surpassent toutes les quadratures connues, et qui, cependant, en certains cas, sont réductibles à la quadrature du cercle. Je me propose ici de considérer quelques-unes de ces formules, et d'examiner les conséquences qu'on en peut tirer pour l'avancement de l'analyse.

2. Je commencerai par considérer cette formule intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, en cherchant son intégrale dans le cas, où l'on pose après l'intégration $x=\infty$, ayant pris l'intégrale en sorte, qu'elle s'évanouisse en posant $x=0$. Dans ce cas, on trouvera que la partie de l'intégrale qui dépend des logarithmes s'évanouit, et que l'autre, qui dépend de la quadrature du cercle, se réduit à une expression fort simple. Car posant π pour la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est $=1$, de sorte que π marque en même temps la mesure de deux angles droits, on trouve, en posant après l'intégration $x=\infty$:

$$\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{\pi}{2};\quad \int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int\frac{xdx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};\quad \int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{\pi}{4};\quad \int\frac{xxdx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$\int\frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3};\quad \int\frac{xdx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int\frac{xxdx}{1+x^6}=\frac{\pi}{6};\quad \int\frac{x^3dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};\quad \int\frac{x^4dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3}.$$

3. Ces cas particuliers semblent déjà suffisants pour pouvoir en tirer, par la voie d'induction, une conclusion plus générale. Car, dans les cas du dénominateur $1+x^3$, le radical $\sqrt{3}$ fait voir que le sinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$ y entre; et dans ceux des dénominateurs $1+x^4$, le radical $\sqrt{2}$ y est

sans doute, parce que $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; ce même soupçon se confirme par les cas où le dénominateur est $1+x^6$. De là nous pouvons conclure qu'il y aura

$$\int\frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

et encore plus généralement

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}};$$

pourvu que le nombre m ne surpasse pas n. Car dans les cas où $m>n$, on sait d'ailleurs que ces formules demandent un développement particulier, puisque leur intégrale renferme alors une partie algébrique.

4. Cette conclusion se trouve tout à fait confirmée, quand on se donne la peine de développer l'intégrale des formules

$$\int\frac{dx}{1+x^6},\quad \int\frac{xdx}{1+x^6},\quad \int\frac{xxdx}{1+x^6},\quad \text{etc.},$$

de sorte qu'il ne saurait rester aucun doute là-dessus. On remarque encore un parfait accord dans les cas où $m=n$: car, puisque alors $\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\pi=0$, l'intégrale dans le cas $x=\infty$ devient effectivement infinie; ce qui est évident, car

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{1+x^n}=\frac{1}{n}\,l\,(1+x^n),$$

et posant $x=\infty$, la valeur de l'intégrale devient infinie. Le même accord s'observe lorsque $n=2m$, et partant $\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, car il est clair que

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2m}}=\frac{\pi}{2m},$$

en posant $x=\infty$. On n'a qu'à mettre $x^m=y$, pour avoir

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2m}}=\frac{1}{m}\int\frac{dy}{1+yy}=\frac{1}{m}\,\text{arc. tang}\,y;$$

maintenant posant $x=\infty$ et partant aussi $y=\infty$, à cause de arc. tang $\infty=\frac{\pi}{2}$, l'intégrale sera $=\frac{\pi}{2m}$. Ce sera donc une vérité suffisamment constatée, que

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

en posant après l'intégration $x=\infty$, pourvu que m ne soit pas plus grand que n.

5. Cependant cette vérité se peut aussi déduire de l'intégration indéfinie de la formule $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ dont l'intégrale se trouve exprimée en sorte:

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\,l\,(1-2x\cos\frac{\pi}{n}+xx)+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{7m\pi}{n}\,l\left(1-2x\cos\frac{7\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{7m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos\frac{7\pi}{n}}\text{ etc.}$$

et il faut continuer ces formules, jusqu'à ce que l'angle $\frac{i\pi}{n}$, où i marque un nombre impair quelconque, commence à surpasser π. Or quand n est un nombre impair et que, dans le dernier membre, on a $i=n$, et partant $\cos\frac{i\pi}{n}=-1$, il ne faut prendre que la moitié du dernier membre, ou mettre $l(1+x)$ au lieu de $l(1+2x+xx)$.

6. Tirons de là les intégrales pour les cas particuliers, et d'abord si $n=1$ et $m=1$, nous aurons:

$$\int\frac{dx}{1+x}=l(1+x).$$

II. Soit $n=2$ et nous aurons:

$$\text{si } m=1:\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{2}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{\pi}{2}}{1-x\cos\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{si } m=2:\int\frac{xdx}{1+xx}=\frac{1}{2}\,l(1+xx).$$

III. Soit $n=3$ et nous aurons:

$$\text{si } m=1:\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l(1+x),$$

$$\text{si } m=2:\int\frac{xdx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{6\pi}{3}\,l(1+x),$$

$$\text{si } m=3:\int\frac{xxdx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{3}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{9\pi}{3}\,l(1+x),$$

ou bien à cause de:

$$\cos\frac{3\pi}{3}=-1;\quad\cos\frac{2\pi}{3}=-1\quad\text{et}\quad\sin\frac{3\pi}{3}=0\quad\text{et}\quad\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\int\frac{xxdx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\,l(1-x+xx)+\frac{1}{3}\,l(1+x)=\frac{1}{3}\,l(1+x^3).$$

7. Dans tous ces cas particuliers, il est aisé de voir que posant $x=\infty$, les intégrales deviennent parfaitement d'accord avec la formule générale donneé ci-dessus; mais pour démontrer son accord en général, il faut faire voir que toutes les parties logarithmiques se détruisent nécessairement, et que les autres, qui renferment des arcs de cercle, se réduisent à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. Pour cet effet, il faut ici distinguer deux cas, selon que n est un nombre pair ou impair. Soit donc premièrement $n=2k$, et posant $x=\infty$, puisque tous les logarithmes deviennent égaux, il faut montrer que la somme de cette progression est égale à 0:

$$\cos\frac{m\pi}{2k}+\cos\frac{3m\pi}{2k}+\cos\frac{5m\pi}{2k}\cdots\cdots+\cos\frac{(2k-5)m\pi}{2k}+\cos\frac{(2k-3)m\pi}{2k}+\cos\frac{(2k-1)m\pi}{2k},$$

m étant un nombre entier. Posons pour abréger $\frac{m\pi}{2k}=\varphi$, et il s'agit de démontrer que

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi=0.$$

8. Posons, pour chercher la somme de cette progression,

$$S=\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi,$$

et multipliant par $\sin\varphi$, à cause de $\sin\varphi\cos\alpha\varphi=-\frac{1}{2}\sin(\alpha-1)\varphi+\frac{1}{2}\sin(\alpha+1)\varphi$, nous aurons:

$$S\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 4\varphi+\frac{1}{2}\sin 6\varphi\ldots\ldots+\frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi+\frac{1}{2}\sin 2k\varphi,$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\sin 4\varphi-\frac{1}{2}\sin 6\varphi\ldots\ldots-\frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi,$$

et puisque tous les termes à l'exception du dernier se détruisent

$$S\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2k\varphi \quad\text{donc}\quad S=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Or, ayant $\varphi=\frac{m\pi}{2k}$, nous aurons $2k\varphi=m\pi$, et puisque m est un nombre entier

$$\sin 2k\varphi=\sin m\pi=0,$$

de sorte que la somme de la progression proposée est effectivement $=0$. Si le nombre n est impair $=2k+1$, posant $\frac{m\pi}{2k+1}=\varphi$, il faut démontrer que:

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi\ldots\ldots+\cos(2k-1)\varphi+\frac{1}{2}\cos m\pi=0.$$

Or, par la sommation précédente, cette somme est

$$\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{1}{2}\cos m\pi=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{1}{2}\cos(2k+1)\varphi,$$

et à cause de $\quad \sin 2k\varphi=\sin(2k+1)\varphi\cos\varphi-\cos(2k+1)\varphi\sin\varphi$

cette somme sera $\quad =\frac{\sin(2k+1)\varphi\cos\varphi}{2\sin\varphi}.$

Mais puisque $(2k+1)\varphi=m\pi$, il est évident que cette somme est égale à zéro.

9. Ayant donc démontré, que posant $x=\infty$, les parties logarithmiques de notre intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ se détruisent, il faut chercher la valeur totale des parties qui renferment les arcs de

cercle. Or, chacun de ces arcs étant compris dans cette somme arc. tang $\frac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi}$, on voit que, posant $x = 0$ ces arcs s'évanouissent, comme la condition de l'intégration l'exige; ensuite, en augmentant x jusqu'à la valeur $x = \frac{1}{\cos \varphi}$, cet angle devient droit, et si l'on augmente x au delà, il faut qu'il devienne obtus. Donc, posant $x = \infty$, on aura arc. tang $\frac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi} =$ arc. tang $\frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = \pi - \varphi$; et partant, toutes les parties qui renferment des arcs de cercle, prises ensemble, seront

$$\frac{2}{n}\pi \left(\sin \frac{m\pi}{n} + \sin \frac{3m\pi}{n} + \sin \frac{5m\pi}{n} + \sin \frac{7m\pi}{n} \text{ etc.}\right),$$

$$-\frac{2\pi}{nn}\left(\sin \frac{m\pi}{n} + 3 \sin \frac{3m\pi}{n} + 5 \sin \frac{5m\pi}{n} + 7 \sin \frac{7m\pi}{n} \text{ etc.}\right).$$

Il s'agit donc de trouver la somme de ces deux progressions.

10. Soit premièrement n un nombre pair ou $n = 2k$ et posant $\frac{m\pi}{2k} = \varphi$, la première progression sera:

$$\sin \varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi \ldots\ldots + \sin (2k - 1)\varphi = s,$$

laquelle, étant multipliée par $\sin \varphi$, donne:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 6\varphi \ldots - \frac{1}{2}\cos 2k\varphi \\ \quad + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 6\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = s \sin \varphi$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{1 - \cos 2k\varphi}{2 \sin \varphi} = \frac{1 - \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2k}}.$$

Or, ayant trouvé ci-dessus:

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots\ldots + \cos (2k - 1)\varphi = \frac{\sin 2k\varphi}{2 \sin \varphi},$$

la différentiation donne:

$$\sin \varphi + 3 \sin 3\varphi + 5 \sin 5\varphi \ldots\ldots + (2k - 1)\sin (2k - 1)\varphi = \frac{-2k \cos 2k\varphi}{2 \sin \varphi} + \frac{\sin 2k\varphi}{2 \sin^2 \varphi}.$$

Posons maintenant $\varphi = \frac{m\pi}{n}$, et à cause de $2k = n$, nos deux progressions seront:

$$\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} - \frac{2\pi}{nn}\left(\frac{-n \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} + \frac{\sin m\pi}{2 \sin^2 \frac{m\pi}{n}}\right)$$

dont la réduction donne:

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}\left(1 - \frac{\sin m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}, \text{ à cause de } \sin m\pi = 0.$$

La même valeur se trouve, quand n est un nombre impair.

11. Voilà donc incontestablement démontré que l'intégrale de notre formule différentielle $\frac{x^{m-1}dx}{1 + x^n}$ en posant $x = \infty$ est $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$, ainsi que nous l'avons déjà conclu par induction. La même valeur aura donc aussi lieu de quelque manière qu'on transforme la formule différentielle:

posons donc $x = \frac{z}{\sqrt[n]{(1-z^n)}}$ où l'on remarque que posant $z = 0$, on a aussi $x = 0$; mais x croît à l'infini en posant $z = 1$, et nous aurons

$$dx = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^{n+1}}}, \quad 1 + x^n = \frac{1}{1-z^n}; \text{ donc}$$

$$\frac{dx}{1+x^n} = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)}} \quad \text{et} \quad \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}.$$

Par conséquent, posant après l'intégration $z = 1$, après avoir pris l'intégrale en sorte qu'elle s'évanouisse au cas $z = 0$, on aura, pourvu que m ne surpasse pas n,

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

12. De là nous tirons, pour des cas particuliers, les suivantes valeurs intégrales, posant toujours, après l'intégration $z = 1$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}}; \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{2\pi}{3}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}}; \quad \int \frac{zz\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{3\pi}{4}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}; \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^2}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{zz\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^3}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{3\pi}{5}}; \quad \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{4\pi}{5}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}}; \quad \int \frac{z^4\,dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)^5}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{5\pi}{6}}.$$

Ces intégrales sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manque encore des méthodes pour les trouver assez promptement; car la sommation des progressions dont je me suis servi, paraît un peu trop étrangère à ce sujet.

13. Puisque donc $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ est égal à cette intégrale $\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}$ posant $z = 1$, cherchons la valeur de cette intégrale par une série, qui, à cause de

$$(1 - z^n)^{\frac{-m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} z^n + \frac{m(m+n)}{n \cdot 2n} z^{2n} + \text{etc.},$$

fournira pour $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$, cette série:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{m}{n(m+n)} + \frac{m(m+n)}{n.2n(m+2n)} + \frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n(m+3n)} \text{ etc.}$$

Ensuite la même formule intégrale pouvant être exprimée par le produit d'une infinité de facteurs, nous aurons aussi

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.,}$$

l'une et l'autre expression étant continuée à l'infini. De là, prenant $m=1$ et $n=2$, à cause de $\sin\frac{\pi}{2}=1$, nous tirons d'abord l'expression de Wallis pour la quadrature du cercle

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdot\frac{10.10}{9.11} \text{ etc.}$$

Or, mettant $m=1$ et $n=6$, à cause de $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{6.6}{1.11}\cdot\frac{12.12}{7.17}\cdot\frac{18.18}{13.23}\cdot\frac{24.24}{19.29} \text{ etc., ou bien}$$

$$\pi = \frac{18}{5}\cdot\frac{6.12}{7.11}\cdot\frac{12.18}{13.17}\cdot\frac{18.24}{19.23}\cdot\frac{24.30}{25.29} \text{ etc.}$$

14. Ces produits étant les mêmes que ceux que j'ai trouvés dans mon Introduction, nous voyons déjà une autre route qui nous pouvait conduire à la découverte de ces intégrales. Or j'avais trouvé:

$$\sin\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{mm}{16nn}\right) \text{ etc.,}$$

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4mm}{nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{25nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{49nn}\right) \text{ etc.,}$$

formules dont la 1re donne

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{nn}{(n-m)(n+m)}\cdot\frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{9nn}{(3n-m)(3n+m)} \text{ etc.,}$$

ou, si nous mettons $n-m$ au lieu de m, puisque $\sin\frac{(n-m)\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n}$, nous aurons:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.,}$$

qui est la même que celle que nous venons de trouver. Nous serions donc parvenus aux mêmes intégrations, si nous avions d'abord cherché une formule intégrale dont la valeur, dans un certain cas, serait égale à ce produit infini de facteurs. Or, j'avais autrefois donné une méthode pour exprimer la valeur de quelques formules intégrales, en certains cas, par de tels produits, et il ne s'agit à cette heure, que de renverser cette méthode et de passer de tels produits à des formules intégrales.

15. Or, j'avais démontré que posant après l'intégration $x=1$, il y aura:

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)}\cdot\frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)} \text{ etc.,}$$

ensuite, j'avais aussi exprimé le rapport de deux formules intégrales par un tel produit, et posant après l'intégration $x = 1$, on aura

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}dx(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}} = \frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} \cdot \frac{(\beta+\mu)(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(\beta+\nu+\mu)} \cdot \frac{(\beta+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(\beta+\nu+2\mu)} \text{ etc.}$$

et encore plus généralement:

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}dx(1-x^\mu)^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}} = \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\beta(\alpha+\nu)(\lambda+\mu)}{\alpha(\beta+\lambda)(\nu+\mu)} \cdot \frac{(\beta+\mu)(\alpha+\nu+\mu)(\lambda+2\mu)}{(\alpha+\mu)(\beta+\lambda+\mu)(\nu+2\mu)} \cdot \frac{(\beta+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)(\lambda+3\mu)}{(\alpha+2\mu)(\beta+\lambda+2\mu)(\nu+3\mu)} \text{ etc.}$$

Donc un tel produit étant proposé, on pourra réciproquement trouver une formule intégrale, ou le rapport de deux, dont la valeur au cas $x = 1$ lui soit égale.

16. Soit donc proposé ce produit infini

$$\frac{nn}{m(2n-m)} \cdot \frac{2n.2n}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{3n.3n}{(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.,}$$

dont nous savons la valeur $= \frac{(n-m)\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}$, et que nous composerons avec celui-ci:

$$\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)} \cdot \frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)} \cdot \frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)} \text{ etc.,}$$

dont la valeur est $= \nu\int x^{\alpha-1}dx(1-x^\mu)^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}$ au cas $x = 1$; et puisque l'accroissement des facteurs est là $= n$, et ici $= \mu$, nous aurons d'abord $\mu = n$, donc $\alpha + \nu = n$; et pour le dénominateur ou $\alpha = m$ et $\mu + \nu = 2n - m$, ou $\mu + \nu = m$ et $\alpha = 2n - m$. Dans le premier cas, nous avons $\alpha = m$; $\mu = n$; $\nu = n - m$, et dans l'autre $\alpha = 2n - m$, $\mu = n$, $\nu = m - n$; de sorte que nous ayons

$$\text{ou } \frac{(n-m)\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}} = (n-m)\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}},$$

$$\text{ou } \frac{(n-m)\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}} = (m-n)\int\frac{x^{2n-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{2n-m}{n}}},$$

formules dont la dernière ne saurait avoir lieu, tant que $\frac{2n-m}{n} > 1$ ou $n > m$, puisqu'alors l'intégrale renferme encore une partie infinie.

17. Voilà donc une autre route pour montrer que la valeur de cette intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}$, au cas $x = 1$, est $= \frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}$, d'abord, par la réduction des intégrales à des produits infinis: on aura à cause de $\alpha = m$, $\mu = n$, $\nu - \mu = -m$ ou $\nu = n - m$,

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n.n}{m(2n-m)} \cdot \frac{2n.2n}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{3n.3n}{(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.}$$

Ensuite, par la résolution générale en facteurs, que j'ai enseignée dans l'Introduction à l'analyse, on voit que ce même produit exprime la valeur de $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$. Si nous mettons $n-m$ au lieu de m, nous aurons:

$$\int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \text{ etc.},$$

et par conséquent, à cause de $\sin \frac{(n-m)\pi}{n} = \sin \frac{m\pi}{n}$,

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Posons $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = z$, ou $x^n = \frac{z^n}{1+z^n}$, de sorte que $x = 1$ si $z = \infty$, et nous aurons en posant après l'intégration $z = \infty$:

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{n-m-1}\,dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

18. Mais voyons aussi comment ce même produit infini:

$$\frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \text{ etc.} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

peut être exprimé par le rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu = n$ et $\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} = \frac{nn}{nn-mm}$, donc $\beta = n$; $\alpha+\nu = n$; $\alpha = n-m$ et $\beta+\nu = n+m$; d'où l'on tire $\alpha = n-m$; $\beta = n$; $\nu = m$ et $\mu = n$ et partant:

$$\frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{\int x^{n-m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}},$$

mais le dénominateur étant ici intégrable, son intégrale donne $\frac{1}{m}$ pour le cas $x = 1$; de sorte que cette intégration se réduit à la précédente. La formule plus générale ne mène pas à d'autres intégrations; cependant il y a d'autres moyens de rendre ces intégrations plus générales.

19. Multiplions deux formules intégrales en général et dans le cas $x = 1$, la valeur de ce produit

$$\nu\mathfrak{n} \int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\nu-n}{n}}, \quad \int x^{\mathfrak{a}-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mathfrak{n}-n}{n}} \text{ sera:}$$

$$\frac{nn(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{n}(\nu+n)(\mathfrak{n}+n)} \cdot \frac{4nn(\alpha+\nu+n)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+n)}{(\alpha+n)(\mathfrak{a}+n)(\nu+2n)(\mathfrak{n}+2n)} \text{ etc.},$$

lequel soit posé égal à celui-ci:

$$\frac{nn}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)} \text{ etc.} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Soit pour cet effet $\alpha = n - m$; $\mathfrak{a} = n + m$; et posons outre cela:

$$\alpha + \nu = \nu + n - m = \mathfrak{n} + n;\quad \mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + n + m = \nu + n;$$

d'où nous tirons $\nu - n = m$. Soit donc $\nu = k + \frac{1}{2}m$ et $\mathfrak{n} = k - \frac{1}{2}m$; et nous aurons, en prenant pour k un nombre quelconque:

$$\left(kk - \frac{1}{4}mm\right)\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}} \cdot \int x^{n+m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

20. Voilà donc un produit de deux formules intégrales, qui, dans le cas où l'on met $x = 1$ après l'intégration, devient $= \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$: et partant on pourra prendre k en sorte que l'une de ces deux formules devienne intégrable, et alors l'intégration de l'autre se réduira à l'expression $\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. Ainsi, posant $2k = m + 2n$, à cause de $\int x^{n+m-1}dx = \frac{1}{n+m}$, et $kk - \frac{1}{4}mm = n(n+m)$, on aura:

$$n\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Or si l'on prend $2k = m + 4n$, puisque

$$\int x^{n+m-1}dx(1-x^n) = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n+m} = \frac{n}{(n+m)(2n+m)}$$

et $kk - \frac{1}{4}mm = 2n(m+2n)$, on aura:

$$\frac{2nn}{n+m}\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Donc, posant aussi $n - m$ à la place de m, on aura:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{n}{m}\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m}\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}} \quad \text{et}$$

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{2nn}{m(n+m)}\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{2nn}{(n-m)(2n-m)}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2n-m}{n}}.$$

21. Or, puisque

$$\int x^{n+m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{2m}{2k+m}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}},$$

si nous substituons cette valeur, nous aurons:

$$\left(k - \frac{1}{2}m\right)\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}} \cdot \int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

et cette valeur demeure la même, quoiqu'on écrive $n - m$ au lieu de m. Soit $m = 1$ et $n = 2$, et l'on aura:

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-3}{4}}\cdot\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-5}{4}}=\frac{\pi}{2},$$

où il est remarquable que cette égalité a lieu, quelque nombre qu'on mette pour k. Soit par exemple $k=1$, ou $k=2$, et l'on aura:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{3}{2}\int dx\sqrt[4]{(1-x^2)}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}=\frac{\pi}{2},$$

et posant $k=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot\int dx(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cette égalité est remarquable, à cause des exposants irrationnels.

22. On peut encore transformer de plusieurs manières les formules que nous venons de trouver: car, posons $1-x^n=y^{2n}$, de sorte que $x=\sqrt[n]{(1-y^{2n})}$ et $dx=2y^{2n-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{1-n}{n}}$, les termes de l'intégrale, qui étaient auparavant $x=0$ et $x=1$, sont à présent renversés, savoir: $y=1$ et $y=0$ ce qui revient au même. De là nous concluons:

$$(4k-2m)\int y^{2k+m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{2k-m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

quand on aura mis $y=1$ après l'intégration; ou bien

$$(4kk-mm)\int y^{2k+m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{2k-m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

par la réduction de ces intégrales. Donc si $m=1$ et $n=2$, nous aurons:

$$(4k-2)\int\frac{y^{2k}dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{y^{2k-2}dy}{\sqrt{(1-y^4)}}=\frac{\pi}{2}$$ et partant, si $k=1$,

$$\int\frac{yydy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}=\frac{\pi}{4}.$$

23. Or, puisque l'angle $\frac{m\pi}{n}$ dépend du seul rapport des nombres m et n, nous aurons $\sin\frac{m\pi}{n}=1$, si $m=\frac{1}{2}n$, sans qu'on ait besoin de déterminer n. Soit donc $m=\frac{1}{2}n$, et pour éviter les fractions, $2k=m+\lambda$; d'où nous tirons ce théorème:

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}=\frac{\pi}{2\lambda n},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})=\frac{\pi}{2\lambda(\lambda+n)}.$$

De même, posant plus généralement $2k=\lambda+m$, on aura:

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}}=\frac{\pi}{2\lambda n\sin\frac{m\pi}{n}},$$ ou

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}}=\frac{m\pi}{\lambda n(\lambda+2m)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

où le nombre λ est arbitraire, de sorte qu'on puisse même lui donner une valeur irrationelle. Soit $m=\mu k$ et $n=\nu k$, et l'on aura:

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\pi}{2\lambda\nu k\sin\frac{\mu\pi}{\nu}},\quad \text{ou}$$

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\mu\pi}{\lambda\nu(\lambda+2\mu k)\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}.$$

24. Posons de plus: $2k=\alpha$ pour avoir cette égalité

$$\int y^{\lambda+\mu\alpha-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\pi}{\lambda\nu\alpha\sin\frac{\mu\pi}{\nu}},$$

dont on aura ces cas principaux:

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}=\frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+2\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}=\frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+3\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}}.$$

25. Comme l'expression infinie du sinus nous à conduit à ces intégrations, traitons de la même manière l'expression trouvée pour le cosinus, qui se réduit à cette forme:

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n.n}\cdot\frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n.3n}\cdot\frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n.5n}\ \text{etc.},$$

où puisque ni les numérateurs ni les dénominateurs ne contiennent des facteurs selon la progression 1, 2, 3, 4, 5 etc., nous n'en saurions exprimer la valeur par une seule formule intégrale. Cherchons donc deux formules dont le rapport exprime cette valeur, et l'on voit d'abord qu'il faut mettre $\mu=2n$. Soit donc $\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n.n}$, et nous aurons $\alpha=n$; $\beta=n-\nu$ et $\nu=2m$; de sorte que $\beta=n-2m$. Par conséquent, en posant après l'intégration $x=1$, nous aurons:

$$\frac{\int x^{n-1}dx\,(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-2m-1}dx\,(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}=\cos\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{(n-2m)\pi}{2n}.$$

Donc posant $m=\lambda\mu$ et $n=\lambda\nu$, nous aurons

$$\frac{\int x^{\lambda\nu-1}dx\,(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}{\int x^{\lambda\nu-2\lambda\mu-1}dx\,(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}=\cos\frac{\mu\pi}{\nu}=\sin\frac{(\nu-2\mu)\pi}{2\nu}.$$

26. Considérons en les cas les plus simples:

$$\text{I. Si } m=1,\; n=2:\quad \frac{\int x\,dx\,(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int \frac{dx}{x}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

$$\text{II. Si } m=1,\; n=3:\quad \frac{\int xx\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}{\int dx\,(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$\text{III. Si } m=\frac{1}{2},\; n=2:\quad \frac{\int x\,dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}{\int dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{IV. Si } m=\frac{1}{2},\; n=3:\quad \frac{\int x^2\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}}{\int dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

De la seconde nous tirons cette égalité:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}},$$

la troisième se réduit à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=\sqrt{2}\,.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

et la quatrième à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}.$$

27. Ces formules peuvent être changées, de sorte que la condition de l'intégration demeure la même. Ainsi l'on trouve:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}\quad\text{en posant } x^3 \text{ au lieu de } 1-xx,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},\quad\text{en posant } x^3 \text{ au lieu de } 1-x^6,$$

et partant nous aurons ces égalités:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\sqrt{2}\,.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

28. Par la même transformation nous trouvons en général:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{1}{2}}}=\cos\frac{m\pi}{n}\cdot\int\frac{x^{n-2m-1}\,dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{n}\cdot\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^{n})^{\frac{n+2m}{2n}}};$$

et partant:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{n})}}=\cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{n})^{n+2m}}}.$$

Donc puisque la formule $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{n})}}$ est la plus simple, comme ne renfermant que le signe radical carré, nous aurons ces réductions pour le cas $x=1$:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{n})}},$$

$$\int\frac{x^{n-2m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}}=\frac{1}{2\cos\frac{m\pi}{n}}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{n})}},$$

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{n})^{n+2m}}}=\frac{1}{\cos\frac{m\pi}{n}}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{n})}},$$

dont la première est évidente d'elle même, mais les deux autres renferment la nature des cosinus.

29. J'ai aussi trouvé dans mon Introduction ce produit infini:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m(2n-m)}{k(2n-k)}\cdot\frac{(2n+m)(4n-m)}{(2n+k)(4n-k)}\cdot\frac{(4n+m)(6n-m)}{(4n+k)(6n-k)}\ \text{etc.},$$

qu'on peut réduire à un rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu=2n$ et

$$\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)}=\frac{m(2n-m)}{k(2n-k)},$$

ce qui se peut faire de quatre manières:

I. $\alpha=k;\ \beta=m;\ \nu=2n-m-k;\ \frac{\nu-\mu}{\mu}=\frac{-m-k}{2n},$

II. $\alpha=k;\ \beta=2n-m;\ \nu=m-k;\ \frac{\nu-\mu}{\mu}=\frac{m-k-2n}{2n},$

III. $\alpha=2n-k;\ \beta=m;\ \nu=k-m;\ \frac{\nu-\mu}{\mu}=\frac{k-m-2n}{2n},$

IV. $\alpha=2n-k;\ \beta=2n-m;\ \nu=m+k-2n;\ \frac{\nu-\mu}{\mu}=\frac{m+k-4n}{2n},$

d'où nous aurons:

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}},$$

et par la transformation:

$$\frac{\int x^{\nu-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\alpha-\mu}{\mu}}}{\int x^{\nu-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\beta-\mu}{\mu}}}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}.$$

30. Cette dernière formule fournit les réductions suivantes:

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}.$$

Or, je ne m'arrête pas à donner des exemples; il est aisé de voir qu'on en peut tirer des réductions assez remarquables: comme si $k=n-m$, on aura:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n+m}}}=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}.$$

31. Considérons encore un produit infini, que j'avais trouvé pour la tangente d'un angle:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2(n-m)}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\ \text{etc.}$$

et que nous répresentons en sorte

$$\frac{m\pi}{2(n-m)\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}}=\frac{2n.2n(n+m)(3n-m)}{n.3n(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{4n.4n(3n+m)(5n-m)}{3n.5n(4n-m)(4n+m)}\ \text{etc.},$$

qu'on peut réduire à un produit de deux formules intégrales, qui étant en général

$$\nu n\int x^{\alpha-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}\cdot\int x^{a-1}dx\,(1-x^{m})^{\frac{n-m}{m}}=$$

$$\frac{\mu m(\alpha+\nu)(a+n)}{\alpha a(\mu+\nu)(m+n)}\cdot\frac{2\mu.2m(\alpha+\nu+\mu)(a+n+m)}{(\alpha+\mu)(a+m)(2\mu+\nu)(2m+n)}\ \text{etc.},$$

où l'on voit d'abord qu'il faut prendre $\mu=m=2n$, et ensuite il reste à rendre:

$$\frac{(n+m)(3n-m)}{n.3n(2n-m)(2n+m)}=\frac{(\alpha+\nu)(a+n)}{\alpha a(\mu+\nu)(m+n)}.$$

Qu'on prenne donc $\alpha+\nu=n+m$ et $a+n=3n-m$, on trouvera les quatre solutions suivantes:

I. $\nu=m$; $n=-m$; $\alpha=n$; $a=3n$; $\mu=2n$; $m=2n$,
II. $\nu=m$; $n=n$; $\alpha=n$; $a=2n-m$, $\mu=2n$; $m=2n$,
III. $\nu=-n$; $n=-m$; $\alpha=2n+m$; $a=3n$; $\mu=2n$; $m=2n$,
IV. $\nu=-n$; $n=n$; $\alpha=2n+m$; $a=2n-m$; $\mu=2n$; $m=2n$.

32. Voilà donc les quatre réductions qui s'en suivent:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{\pi}{2m(m-n)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}}\cdot\int\frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt[2m]{(1-x^{2n})^{n}}}=\frac{m\pi}{2nn(m-n)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

où il faut remarquer que:

$$\int\frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{-n}{m}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}\quad\text{et}$$

$$\int\frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}}=\frac{-m}{n}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

33. Ces substitutions nous fournissent les formules suivantes:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

qui se réduisent à ces formules plus simples:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}}=\frac{n\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}}=\frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

34. Or par des substitutions ultérieures, on trouve

$$\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}}=n\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}}=n\int\frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

De sorte que toutes nos formules se réduisent à la dernière qui est la plus simple, puisqu'elle ne renferme que le signe radical carré, laquelle, si nous posons $m=n-k$, se change en cette forme assez remarquable

$$\int\frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\tang\frac{k\pi}{2n},$$

d'où, si $k=0$, à cause de $\tang\frac{k\pi}{2n}=\frac{k\pi}{2n}$, on obtient:

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi\pi}{4nn}.$$

35. Considérons quelques cas particuliers:

I. si $n=1$, $k=0$: $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi\pi}{4}$,

II. si $n=\frac{3}{2}$, $k=\frac{1}{2}$: $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{2\pi}{3}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$,

III. si $n=2$, $k=1$: $\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,

IV. si $n=\frac{5}{2}$, $k=\frac{1}{2}$: $\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{5}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10}$,

V. si $n=\frac{5}{2}$, $k=\frac{3}{2}$: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{15}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{10}$,

VI. si $n=3$, $k=1$: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{6}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}$,

VII. si $n=3$, $k=2$: $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{12}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{3}$,

VIII. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{1}{2}$: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{7}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{14}$,

IX. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{3}{2}$: $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{21}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{14}$,

X. si $n=\frac{7}{2}$, $k=\frac{5}{2}$: $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{35}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{14}$,

XI. si $n=4$, $k=1$: $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{8}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8}$,

XII. si $n=4$, $k=3$: $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{24}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{8}$,

XIII. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{1}{2}$: $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{9}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{18}$,

XIV. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{5}{2}$: $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{45}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{18}$,

XV. si $n=\frac{9}{2}$, $k=\frac{7}{2}$: $\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{63}\,\text{tang}\,\frac{7\pi}{18}$,

XVI. si $n=5$, $k=2$: $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{20}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{5}$,

XVII. si $n=5$, $k=4$: $\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{40}\,\text{tang}\,\frac{2\pi}{5}$,

XVIII. si $n=6$, $k=1$: $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{12}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{12}$,

XIX. si $n=6$, $k=5$: $\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{60}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{12}$,

36. La formule $\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha}$ que nous avons trouvée ci-dessus (§ 24) a avec celles-ci un grand rapport, pour le développement duquel écrivons x à la place de y, et posons $\alpha=n$ pour avoir:

$$\int\frac{x^{\lambda+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2\lambda n}.$$

Or la formule que nous venons de trouver étant

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\cdot\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n},$$

si nous posons $\lambda=k$, nous aurons:

$$\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n},$$

et si nous posons $\lambda=n-k$,

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{2n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{n-k}{k}\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n}.$$

37. Or pour rendre ces équations plus générales, posons $y=x^{\frac{n}{a}}$ pour avoir suivant le § 24:

$$\int\frac{x^{\frac{\lambda n}{a}+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{\frac{\lambda n}{a}-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{a\pi}{2\lambda nn}.$$

Soit $\frac{\lambda n}{a}=k$, et nous trouverons la même formule que ci-dessus, et la position $\frac{\lambda n}{a}=n-k$ ne produit rien de nouveau non plus. Voyons donc quelques cas particuliers:

1. Soit $n=1$ et $k=0$: $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}:\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi}{2}$,

2. si $n=\frac{3}{2}$, $k=\frac{1}{2}$: $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

et l'autre: $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}}:\int\frac{xdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^3)}}=2\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

3. si $n=2$, $k=1$: $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1$,

$$\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{8},$$

et l'autre: $\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1$,

$$\int\frac{xdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{xxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}=3\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}.$$

Et en voilà encore quelques autres:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^5)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}=4\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{xxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=3\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=4\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{3}{2}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{12},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=5\,\text{tang}\,\frac{\pi}{12},$$

38. Ces formules sont semblables, par rapport à la forme, à celles qui ont été trouvées ci-dessus § 34: toutes ces formules étant comprises dans cette expression générale: $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$. Mais ci-dessus, c'était le produit de deux telles formules dont j'avais assigné la valeur, tandis qu'ici nous avons des quotients qui résultent de la division de l'une par l'autre. Mais dans l'un et l'autre cas, il est évident que l'intégration de l'une se réduit à celle de l'autre. Puisque la plupart de ces réductions sont tout à fait nouvelles, il vaudra bien la peine de les considérer plus soigneusement. Pour cet effet, je les distribuerai en classes selon l'exposant de la variable x derrière le signe radical, m et n étant des nombres entiers.

I. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{2\pi}{3}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

II. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

III. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$:

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{5}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{2\pi}{15}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{10}.$$

IV. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{6}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{\pi}{12}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{3},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6}.$$

V. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^7)}}$:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{7}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{14},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{21}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{14},$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^7)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}}=\frac{2\pi}{35}\,\text{tang}\,\frac{5x}{14}.$$

VI. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{8}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{16}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{4},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{24}\,\text{tang}\,\frac{3\pi}{8},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\text{tang}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=3\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8}.$$

VII. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^9)}}$:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{9}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{18},$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{27}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{45}\,\text{tang}\,\frac{5\pi}{18},$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{63}\,\text{tang}\,\frac{7\pi}{18}.$$

VIII. Réduction des formules $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{10}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{20}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{30}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{40}\operatorname{tang}\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=4\operatorname{tang}\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{5},$$

39. En combinant les quotients avec les produits de chaque classe, on en peut former de nouveaux produits, ce que je ferai voir en général; car ayant ce produit:

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n},$$

et outre cela, ces deux quotients:

$$\text{I.}\quad\int\frac{x^{n-\alpha-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\operatorname{tang}\frac{\alpha\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad\int\frac{x^{n+\beta-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{2n-\beta-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{n-\beta}{\beta}\operatorname{tang}\frac{\beta\pi}{2n}.$$

Combinons le produit avec le premier quotient, en posant $\alpha=n-k$, et nous aurons en les multipliant

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}.$$

Ensuite, pour le second quotient, posons $\beta=n-k$, et en multipliant, nous aurons:

$$\int\frac{x^{2n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-k)},$$

qui ne diffère pas du précédent. Ainsi, pour chaque classe nous aurons deux prodruits généraux:

$$\text{I.}\quad\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk},$$

dont le dernier convient avec ceux que j'avais déjà démontrés autrefois.

40. Développons ces produits pour quelques cas, où n et k sont des nombres entiers, et nous aurons les réductions suivantes pour le cas $x=1$:

I. Produits de la forme $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

II. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}.$$

III. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24}.$$

IV. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tang} \frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40}.$$

41. Après ces intégrations des formules, qui sont toutes comprises dans cette formule générale $\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{k}{n}}$ et qu'on peut nommer algébriques, puisque dx y est multiplié par une fonction algébrique de x, je passe, comme je me suis proposé, à considérer encore quelques formules intégrales où le différentiel dx est multiplié par une fonction transcendante de x, et dont l'intégrale, dans un certain cas, se peut exprimer algébriquement, ou par la quadrature du cercle. Ces cas sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manque encore des méthodes pour les traiter, et partant les observations suivantes serviront peut être à découvrir de telles méthodes.

42. Je ne m'arrêterai pas ici à cette formule intégrale assez connue $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$, dont on sait que la valeur, au cas qu'on met après l'intégration $x=1$, devient $=1.2.3..n$; de sorte que cette valeur peut être assignée, toutes les fois que l'exposant n est un nombre entier. Mais quand n est une fraction, la valeur est beaucoup plus difficile à assigner. Ainsi, si $n=\frac{1}{2}$, j'ai démontré que la valeur de l'intégrale $\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}}$, au cas $x=1$, est $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. De là, on tire aisément ces intégrations qui en dépendent:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}=\frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{5}{2}}=\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{7}{2}}=\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\sqrt{\pi},$$

puisqu'il y a en général

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^m=x\,(l\frac{1}{x})^m+m\int dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1};$$

donc posant après l'intégration $x=1$, à cause de $l\frac{1}{x}=0$, on aura:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^m=m\int dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1}.$$

43. Cette intégration du cas $n=\frac{1}{2}$ se peut exprimer de cette manière:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}}\quad\text{posant } x=1,$$

et pour les autres fractions mises pour n, j'ai trouvé les réductions suivantes:

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}=2\sqrt[3]{\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}},$$

$$\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x^5dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^5dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^8dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\tfrac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^5dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^7dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\tfrac{2}{5}\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^5dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^8dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^{11}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\tfrac{6}{5}\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^7dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^{11}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^{15}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}},$$

44. Puisque parmi ces formules, il s'en trouve où l'exposant de x est plus grand dans le numérateur, que dans le dénominateur, si nous déprimons ces exposants par le secours de cette réduction:

$$\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^k = \frac{m-n}{m+nk}\int x^{m-n-1}dx\,(1-x^n)^k,$$

nous trouverons les formules suivantes:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\tfrac{1}{3^2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\tfrac{1}{4^2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\tfrac{2}{4^3}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\tfrac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\tfrac{1}{5^2}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\tfrac{2}{5^3}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\tfrac{6}{5^4}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}}.$$

45. Voilà donc les valeurs de la formule intégrale transcendante $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$, lorsque n est une fraction réduite à des valeurs des formules intégrales, où dx est multiplié par une fonction algébrique de x. Or, parmi ces dernières formules, il y en a toujours une qui renferme la quadrature du cercle, puisque

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ensuite, pour pouvoir mieux composer les autres ensemble, posons dans les formules du § 21: $2k=2n+m-2\lambda$ pour avoir:

$$\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda-m}}}\cdot\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda}}}=\frac{\pi}{n(n-\lambda)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

de là nous aurons:

I. si $n=3$: $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}},$$

II. si $n=4$: $$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}=\frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}},$$

III. si $n=5$: $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\frac{\pi}{15\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{10\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

46. De là nous voyons que multipliant toutes les formules du même ordre ensemble, le produit se réduit à la quadrature du cercle; ainsi nous aurons:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\pi = \frac{2}{3^2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{4}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{4}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}} = \frac{6\pi\sqrt{\pi}}{4^3\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{6}{4^3}\sqrt{\frac{8\pi^3}{4}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = \frac{24\pi^2}{5^4\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{24}{5^4}\sqrt{\frac{16\pi^4}{5}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{6}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{6}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{6}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{6}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{5}{6}} = \frac{120\pi^2\sqrt{\pi}}{6^5\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2\pi}{6}} = \frac{120}{6^5}\sqrt{\frac{32\pi^5}{6}}.$$

De là nous concluons qu'il y aura en général:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{n}} \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{n}} \cdots\cdots \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}},$$

lequel théorème est tout à fait digne d'attention.

47. La comparaison de ces formules peut être poussée plus loin, en considérant ce théorème général:

$$\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\beta}}} = \int\frac{x^{n-\beta-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-\alpha}}},$$

d'où le théorème précédent tiré du § 21 se change aussi en d'autres formes. Ensuite, les formules du § 29 fournissent les comparaisons suivantes:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} : \int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} : \int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} : \int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}} : \int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n}.$$

dont les dernières se déduisent de la première, puisqu'au lieu de m et k on peut mettre $n-m$ et $n-k$.

48. Maintenant, puisque

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \frac{n-k}{m}\int\frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}},$$

on aura encore cette comparaison:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}:\int\frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}=\frac{n-k}{m}\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n}$$

et prenant pour m un nombre négatif:

$$\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}}:\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}}=\frac{n-k}{m}\sin\frac{m\pi}{n}:\sin\frac{k\pi}{n},$$

d'où nous tirons les comparaisons particulières suivantes:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}:\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\sin\frac{\pi}{4}:\sin\frac{\pi}{2}=1:\sqrt{2},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}:\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}:\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}:\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=2\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}=3\sin\frac{\pi}{5}:\sin\frac{2\pi}{5}.$$

49. Pour faire voir l'usage de ces réductions, considérons les formules particulières qui entrent dans les expressions des formules

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}};\quad \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}};\quad \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}};\quad \int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}}$$

et d'abord le nombre de toutes les dites formules étant 16, il y a 4 qui dépendent de la quadrature du cercle.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}};\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}};\quad \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Pour les autres 12 la réduction générale fournit:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

Ensuite nous venons de trouver:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}};$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{2\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = \frac{2\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

auxquelles on peut ajouter les produits de deux telles formules rapportées au § 45 pour le cas $n = 5$.

50. Si nous examinons toutes ces égalités, nous trouvons que ces 12 formules se réduisent à deux: posons pour abréger

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^5)}};\quad \alpha = \sin\frac{\pi}{5};\quad \beta = \sin\frac{2\pi}{5}$$

et toutes nos formules peuvent être réduites à la quadrature du cercle et à ces deux $\int yy\,dx$ et $\int y^3 dx$, de cette manière

$$\int y^4 dx = \frac{\beta}{\alpha}\int yy\,dx;\quad \int xy^4 dx = \int y^3 dx;\quad \int x^2y^4 dx = \int yy\,dx;\quad \int x^3y^4 dx = \frac{\pi}{5\alpha},$$

$$\int y^2 dx = \frac{\alpha}{\beta}\int y^3 dx;\quad \int x^2y^3 dx = \frac{\pi}{5\beta};\quad \int x^3y^3 dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dx},$$

$$\int xy^2 dx = \frac{\pi}{5\beta};\quad \int x^2y^2 dx = \frac{\pi}{5\beta\int y^3 dx};\quad \int x^3y^2 dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3 dx},$$

$$\int y\,dx = \frac{\pi}{5\alpha};\quad \int xy\,dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dx};\quad \int x^2y\,dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3 dx};\quad \int x^3y\,dx = \frac{\pi}{15\alpha\int yy\,dx},$$

soit donc $\int yy\,dx = A$ et $\int y^3 dx = B$, et les valeurs de nos formules transcendantes seront:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{\beta\pi AAB}{5^2\alpha\alpha}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{\alpha\pi^2 BB}{5^4\beta^3 A}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{\pi^3 A}{5^6\alpha\beta^2 BB}},$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{\pi^4}{5^8\alpha^3\beta AAB}}.$$

51. De là nous voyons que non seulement le produit de toutes ces quatre formules dépend uniquement de la quadrature du cercle, mais aussi le produit de deux, dont les exposants font ensemble l'unité, savoir:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\cdot\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{4}{5}} = \frac{4\pi}{5^2\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{6\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}},$$

Outre cela, nous en pourrons déduire ces égalités:

$$\left(\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 : \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\beta A}{2\alpha},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{4\pi B}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}.$$

52. Si nous joignons ces déterminations aux précédentes, nous en pourrons tirer les conclusions générales suivantes:

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2^2 \sin\frac{\pi}{2}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{3^2 \sin\frac{\pi}{3}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{3\pi}{4^2 \sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{4\pi}{5^2 \sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{6\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}}.$$

et en général:

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}} = \frac{m(n-m)\pi}{nn \sin\frac{m\pi}{n}},$$

donc puisque

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n-m}{n}\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}},$$

nous aurons:

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}} = \frac{m\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}} = m\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}.$$

53. Cette dernière égalité se peut aisément démontrer immédiatement en développant le cas le plus simple, où l'exposant est un nombre entier:

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\lambda} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots \lambda.$$

Or, cette expression finie se peut exprimer par un produit infini, comme:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\lambda}=(\tfrac{2}{1})^{\lambda}\cdot\frac{1}{1+\lambda}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\lambda}\cdot\frac{2}{2+\lambda}\cdot(\tfrac{4}{3})^{\lambda}\cdot\frac{3}{3+\lambda}\text{ etc.}$$

Posons maintenant $\lambda=\frac{m}{n}$ pour avoir:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{n}}=(\tfrac{2}{1})^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot(\tfrac{4}{3})^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{3n}{3n+m}\text{ etc.}$$

et faisons aussi m négatif:

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{-m}{n}}=(\tfrac{2}{1})^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot(\tfrac{4}{3})^{\frac{-m}{n}}\cdot\frac{3n}{3n-m}\text{ etc.}$$

Le produit de ces deux formules donne évidemment:

$$\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\text{ etc.}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

54. Nous pourrons pousser plus loin ces recherches, car puisque

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{p}{n}}=(\tfrac{2}{1})^{\frac{p}{n}}\cdot\frac{n}{n+p}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\frac{p}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+p}\text{ etc.,}$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{q}{n}}=(\tfrac{2}{1})^{\frac{q}{n}}\cdot\frac{n}{n+q}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\frac{q}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+q}\text{ etc.,}$$

$$\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{p+q}{n}}=(\tfrac{2}{1})^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{n}{n+p+q}\cdot(\tfrac{3}{2})^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+p+q}\text{ etc.}$$

Le produit des deux premières divisé par la dernière, donne:

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{q}{n}}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{p+q}{n}}}=\frac{n(n+p+q)}{(n+p)(n+q)}\cdot\frac{2n(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+q)}\text{ etc.,}$$

dont la valeur est

$$q\int\frac{x^{n+p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ou bien aussi:

$$=q\int x^{q-1}\,dx\,\sqrt[n]{(1-x^n)^p}=p\int x^{p-1}\,dx\,\sqrt[n]{(1-x^n)^q},$$

formule qui conduit à la précédente, quand on pose $p=m$ et $q=-m$. De même, on trouvera la valeur de

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{q}{n}}\cdot\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{r}{n}}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{p+q+r}{n}}}=\frac{pqr}{p+q+r}\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}.$$

55. Enfin, pour finir cette matière, la sommation des séries réciproques des puissances nous fournit encore la valeur des formules transcendantes suivantes, quand on met après l'intégration $x = 1$:

$$\int \frac{dx}{x} l \frac{1}{1-x} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \int \frac{dx}{x} l (1+x) = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{et} \quad \int \frac{dx}{x} l \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi^2}{8}$$

et ces autres, plus composées:

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} l \frac{1}{1-x} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} l (1+x) = \frac{7\pi^4}{720},$$

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \text{arc. tang}\, x = \frac{\pi^3}{32}; \quad \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} l \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Or, il ne paraît aucune route directe qui nous pourrait mener à ces déterminations, ce qui mérite, par cela même, d'autant plus d'attention.

XXI.

De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur.

1. Satis notum est problema inter Geometras olim multum agitatum, quo lineae curvae quaerebantur, quarum rectificatio a datae curvae quadratura pendeat, cujus solutionem etiam Hermannus beatae memoriae contra exspectationem summorum Geometrarum ita feliciter expedivit, ut non solum infinitas curvas algebraicas, quarum rectificatio a data quadratura penderet, exhibuerit, sed etiam hanc conditionem adjunxerit, ut istae curvae unum duosve atque adeo tot, quot lubuerit, haberent arcus absolute rectificabiles. Cum autem methodus, qua Hermannus erat usus, nimis videretur recondita, neque ad uberiorem usum in Analysi satis accommodata, aliam methodum planam ac facilem investigavi, cujus ope non solum hoc problema, sed etiam omnia, quae hujus generis occurrere queant, expedite resolvi possunt. Complectitur ista methodus quasi novam Analyseos speciem, cujus elementa, quae multo latius patere videntur, dilucide exposui in Novis Commentariis Academiae imperialis Petropolitanae.

2. Hujus methodi beneficio, si proponatur quadratura seu formula integralis quaecunque $\int Zdz$, existente Z functione ipsius z quacunque, innumerabiles curvae algebraicae definiri possunt, quarum rectificatio ab ista formula ita pendeat, ut ejus integratione concessa omnes harum curvarum arcus indefinite definiri queant. Per variabilem scilicet z ejusmodi expressiones algebraicae pro coordinatis x et y assignantur, ut inde formulae $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ integratio perducatur ad hujusmodi formam $\alpha\int Zdz+V$, ubi V sit functio algebraica ipsius z. Verum haec quantitas V non arbitrio nostro relinquitur, etiamsi infinitis modis variari queat: atque hinc ope methodi a me traditae problema non ita resolvi potest, ut curvarum inveniendarum arcus absolute per formulam propositam $\int Zdz$ ejusve multiplum $\alpha\int Zdz$ exprimantur.

3. Maxime igitur diversum est problema, quo quaeruntur curvae algebraicae, quarum arcus per propositam quampiam formulam integralem $\int Zdz$ simpliciter, sine adjunctione cujusdam functionis algebraicae exprimantur. Atque adeo hoc problema saepenumero ne solutionem quidem admittere videtur. Ita si sit $Z=\frac{a}{z}$, et curva algebraica sit investiganda, cujus arcus per $a\int\frac{dz}{z}$, seu alz exprimatur, vehementer dubito, num quisquam unquam hujusmodi curvam sit reperturus?

Quaestio scilicet huc redit, ut ejusmodi binae functiones algebraicae ipsius z inveniantur, quae pro coordinatis x et y substitutae praebeant $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{adz}{z}$. Postquam equidem hoc problema multis modis tentavi, aliisque insignibus Geometris enodandum proposui, neque ego, neque quisquam alius solutionem assequi potuimus: cum tamen in genere si quaeratur curva algebraica, cujus rectificatio a logarithmis pendeat, problema sit facillimum, atque adeo parabola conica ei satisfaciat. Unde concludendum est hoc problema vel omnino nullam solutionem admittere, vel methodum adhuc plane nobis incognitam requirere.

4. Evenire quoque posse videtur, ut hujusmodi problemata unicam tantum solutionem admittant, neque plus una curva exhiberi queat, cujus arcus per datam formulam integralem exprimantur. Equidem hoc sum expertus in formula $\int\frac{adz}{\sqrt{(aa-zz)}}$, qua arcus circuli exprimitur: nullam enim aliam lineam curvam algebraicam invenire potui, cujus arcus per eandem formulam exprimeretur. Sic nulla videtur extare curva algebraica, cujus arcui cuicunque aequalis arcus circularis exhiberi queat, etiamsi innumerabiles lineae algebraicae sint notae, quarum rectificatio a rectificatione circuli pendeat. Statim enim atque hae curvae a circulo sunt diversae, earum arcus aequantur aggregato ex arcu quodam circulari et linea geometrice assignabili, quae nonnisi certis casibus in nihilum abire potest. Idem tenendum est de formulis $\int\frac{adz}{\sqrt{(2az-zz)}}$ et $\int\frac{aadz}{aa+zz}$ aliisque, in quas illa formula $\int\frac{adz}{\sqrt{(aa-zz)}}$ per substitutiones transformari potest.

5. Dantur tamen etiam ejusmodi formulae $\int Zdz$, pro quibus innumerabiles curvae algebraicae exhiberi possunt, ita ut infinitae curvae algebraicae assignari queant, in quarum una si capiatur arcus quicunque, in reliquis omnibus pares arcus abscindere liceat. Huc imprimis pertinet problema olim a Celebb. Bernoulliis tractatum, quo curva algebraica quaerebatur, cujus rectificatio cum rectificatione curvae elasticae conveniret, seu per hanc formulam $\int\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}$ exprimeretur: invenerunt enim lineam quarti ordinis, ob figuram *lemniscatam* dictam, quae huic scopo satisfaceret. Ostendam autem praeter lemniscatam infinitas alias exhiberi posse curvas algebraicas, quarum arcus generatim per eandem formulam exprimantur. Cum igitur lemniscata, docente Ill. Fagnano, hanc habeat insignem proprietatem, ut in ea perinde atque in circulo, arcus quotcunque aequales abscindi queant, eadem proprietas quoque in omnes curvas, quarum arcus per eandem formulam $\int\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}$ exprimuntur, competet; quae ergo merentur, ut diligentius evolvantur.

6. Methodus quidem, qua hanc investigationem suscipio, per se satis est plana, et ope calculi angulorum facile expediri potest. Si enim arcus cujuspiam curvae per hanc formulam $\int Zdz$ debeat exprimi, vocatis coordinatis orthogonalibus x et y, atque introducto angulo quocunque φ, statuatur

$$dx = Zdz\cos\varphi \quad \text{et} \quad dy = Zdz\sin\varphi$$

sic enim prodibit arcus elementum

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = Zdz, \text{ ipseque arcus } = \int Zdz.$$

Unde quaestio huc redit, ut quemadmodum arcus φ ad variabilem z comparatus esse debeat, investigetur, ut ambae formulae $Zdz\cos\varphi$ et $Zdz\sin\varphi$ evadant integrabiles: quippe quod conditio,

qua curvae debent esse algebraicae, postulat. Hunc in finem illae integrationes per solos sinus et cosinus angulorum sunt absolvendae, neque ipsi anguli, qui formulas redderent transcendentes, sunt admittendi.

De curva lemniscata.

7. Propositum ergo sit curvas algebraicas investigare, quarum arcus indefinite per hanc formulam integralem $\int\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}$ exprimantur, et positis coordinatis orthogonalibus x et y statuamus

$$dx=\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}\cos\varphi \quad\text{et}\quad dy=\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}\sin\varphi,$$

quas formulas absolute integrabiles reddi oportet. Ut partem $\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}$ quoque ad calculum angulorum perducam, pono $zz=aa\sin\theta$, ut fiat $\sqrt{(a^4-z^4)}=aa\cos\theta$, et ob $z=a\sqrt{\sin\theta}$ erit

$$dz=\frac{ad\theta\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}} \quad\text{et}\quad \frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}=\frac{ad\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}.$$

Hinc itaque nostrae formulae integrabiles reddendae sunt

$$dx=\frac{ad\theta\cos\varphi}{2\sqrt{\sin\theta}} \quad\text{et}\quad dy=\frac{ad\theta\sin\varphi}{2\sqrt{\sin\theta}}.$$

Ponamus ergo $\varphi=n\theta$, ut sit

$$\frac{2dx}{a}=\frac{d\theta\cos n\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \quad\text{et}\quad \frac{2dy}{a}=\frac{d\theta\sin n\theta}{\sqrt{\sin\theta}},$$

et videamus quinam valores pro n sumti has ambas formulas integrabiles reddant.

8. Consideremus in genere has formulas

$$\frac{d\theta\cos m\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \quad\text{et}\quad \frac{d\theta\sin m\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$$

et perpendamus quomodo ad simpliciores revocari possunt. Talis enim reductio unica via esse videtur ad casus integrabilitatis eruendos. Statuamus ergo primo

$$P=\cos(m-1)\theta.\sqrt{\sin\theta},$$

et differentiando habebitur

$$dP=\frac{-(m-1)d\theta\sin(m-1)\theta.\sin\theta+\frac{1}{2}d\theta\cos(m-1)\theta.\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Cum autem sit $\sin\alpha\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-1)\theta-\frac{1}{2}\cos(\alpha+1)\theta$

et $\cos\alpha\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-1)\theta+\frac{1}{2}\cos(\alpha+1)\theta,$

erit

$$dP=\frac{-(2m-3)d\theta\cos(m-2)\theta+(2m-1)d\theta\cos m\theta}{4\sqrt{\sin\theta}},$$

unde obtinetur

$$\int\frac{d\theta\cos m\theta}{\sqrt{\sin\theta}}=\frac{4\cos(m-1)\theta\sqrt{\sin\theta}}{2m-1}+\frac{2m-3}{2m-1}\int\frac{d\theta\cos(m-2)\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

9. Si deinde simili modo statuamus

$$Q=\sin(m-1)\theta\sqrt{\sin\theta},$$

erit differentiando

$$dQ = \frac{(m-1)\,d\theta \cos(m-1)\theta \sin\theta + \frac{1}{2}\,d\theta \sin(m-1)\theta \cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Cum vero sit

$$\cos\alpha\theta \sin\theta = -\frac{1}{2}\sin(\alpha-1)\theta + \frac{1}{2}\sin(\alpha+1)\theta$$

$$\text{et}\quad \sin\alpha\theta\cos\theta = +\frac{1}{2}\sin(\alpha-1)\theta + \frac{1}{2}\sin(\alpha+1)\theta,$$

erit per has substitutiones

$$dQ = \frac{-(2m-3)\,d\theta \sin(m-2)\theta + (2m-1)\,d\theta \sin m\theta}{4\sqrt{\sin\theta}}.$$

Unde singulis partibus integratis consequemur

$$\int \frac{d\theta \sin m\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \frac{4\sin(m-1)\theta\sqrt{\sin\theta}}{2m-1} + \frac{2m-3}{2m-1}\int \frac{d\theta \sin(m-2)\theta}{\sqrt{\sin\theta}},$$

hincque ergo patet, si formulae propositae $\frac{d\theta\cos n\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$ et $\frac{d\theta\sin n\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$ fuerint integrabiles casu $n=\lambda$, tum etiam integrabiles esse futuras casibus

$$n = \lambda + 2,\quad n = \lambda + 4,\quad n = \lambda + 6,\ \text{etc.},$$

sicque ex uno infinitos resultare casus integrabiles.

10. Ex his autem reductionibus statim unus se offert casus absolute integrabilis, scilicet quando $2m - 3 = 0$ seu $m = \frac{3}{2}$; unde obtinemus

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \cos\frac{3}{2}\theta = 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} \quad\text{et}\quad \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \sin\frac{3}{2}\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta}.$$

Deinde integratio succedet casu $m = \frac{7}{2}$ seu $2m = 7$, unde fit

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \cos\frac{7}{2}\theta = \frac{2}{3}\cos\frac{5}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + 2\,.\,\frac{2}{3}\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta},$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \sin\frac{7}{2}\theta = \frac{2}{3}\sin\frac{5}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + 2\,.\,\frac{2}{3}\sin\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta}.$$

Hinc progressus patet ad casum $m = \frac{11}{2}$ seu $2m = 11$, qui dat

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \cos\frac{11}{2}\theta = \frac{2}{5}\cos\frac{9}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + \frac{2.4}{3.5}\cos\frac{5}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + 2\,.\,\frac{2.4}{3.5}\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta},$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \sin\frac{11}{2}\theta = \frac{2}{5}\sin\frac{9}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + \frac{2.4}{3.5}\sin\frac{5}{2}\theta\sqrt{\sin\theta} + 2\,.\,\frac{2.4}{3.5}\sin\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin\theta},$$

et sequens casus $m = \frac{15}{2}$ praebebit

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \cos\frac{15}{2}\theta = \left(\frac{2}{7}\cos\frac{13}{2}\theta + \frac{2.6}{5.7}\cos\frac{9}{2}\theta + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cos\frac{5}{2}\theta + 2\,.\,\frac{2.4.6}{3.5.7}\cos\frac{1}{2}\theta\right)\sqrt{\sin\theta},$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \sin\frac{15}{2}\theta = \left(\frac{2}{7}\sin\frac{13}{2}\theta + \frac{2.6}{5.7}\sin\frac{9}{2}\theta + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\frac{5}{2}\theta + 2\,.\,\frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\frac{1}{2}\theta\right)\sqrt{\sin\theta}.$$

11. Ut in coëfficientibus angulorum fractiones evitemus, ponamus $\theta = 2\omega$, ut sit

$$zz = aa \sin 2\omega, \text{ seu } \sin 2\omega = \frac{zz}{aa},$$

unde erit

$$\sin\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{zz}{aa}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{zz}{aa}\right)} \quad \text{et} \quad \cos\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{zz}{aa}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{zz}{aa}\right)}.$$

Atque infinitas curvas algebraicas exhibere poterimus, quarum arcus seu valor integralis

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

praecise fiat aequalis formulae

$$\int\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}} = a\int\frac{d\omega}{\sqrt{\sin 2\omega}}.$$

Ac curva quidem prima eaque simplicissima his continebitur coordinatis

$$x = a\cos\omega\sqrt{\sin 2\omega} \quad \text{et} \quad y = a\sin\omega\sqrt{\sin 2\omega},$$

ex quibus fit $xx+yy = aa\sin 2\omega$ et $\sqrt{(xx+yy)} = a\sqrt{\sin 2\omega}$. Hinc ergo porro elicitur

$$\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} \quad \text{et} \quad \sin\omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

ideoque $\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega = \frac{2xy}{xx+yy}$. Quo valore substituto habebitur aequatio inter solas x et y pro curva

$$(xx+yy)^2 = 2aaxy,$$

quae est ipsa aequatio lemniscatae.

12. Secunda curva algebraica, cujus arcus per eandem formulam

$$\int\frac{aadz}{\sqrt{(a^4-z^4)}} = a\int\frac{d\omega}{\sqrt{\sin 2\omega}},$$

exprimuntur, continebitur his coordinatis

$$x = \frac{a}{3}(\cos 5\omega + 2\cos\omega)\sqrt{\sin 2\omega},$$

$$y = \frac{a}{3}(\sin 5\omega + 2\sin\omega)\sqrt{\sin 2\omega}.$$

Tertia porro curva aeque satisfaciens his:

$$x = \frac{a}{5}\left(\cos 9\omega + \frac{4}{3}\cos 5\omega + \frac{4.2}{3.1}\cos\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega},$$

$$y = \frac{a}{5}\left(\sin 9\omega + \frac{4}{3}\sin 5\omega + \frac{4.2}{3.1}\sin\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega}.$$

Quarta vero his:

$$x = \frac{a}{7}\left(\cos 13\omega + \frac{6}{5}\cos 9\omega + \frac{6.4}{5.3}\cos 5\omega + \frac{6.4.2}{5.3.1}\cos\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega},$$

$$y = \frac{a}{7}\left(\sin 13\omega + \frac{6}{5}\sin 9\omega + \frac{6.4}{5.3}\sin 5\omega + \frac{6.4.2}{5.3.1}\sin\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega}.$$

Quinta hinc sponte formari potest

$$x = \frac{a}{9}\left(\cos 17\omega + \frac{8}{7}\cos 13\omega + \frac{8.6}{7.5}\cos 9\omega + \frac{8.6.4}{7.5.3}\cos 5\omega + \frac{8.6.4.2}{7.5.3.1}\cos\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega},$$

$$y = \frac{a}{9}\left(\sin 17\omega + \frac{8}{7}\sin 13\omega + \frac{8.6}{7.5}\sin 9\omega + \frac{8.6.4}{7.5.3}\sin 5\omega + \frac{8.6.4.2}{7.5.3.1}\sin\omega\right)\sqrt{\sin 2\omega}.$$

13. Sic igitur infinitas nacti sumus curvas algebraicas, quarum rectificatio plane congruit cum rectificatione lemniscatae, ita ut cuique arcui hujus curvae in omnibus illis arcus aequales abscindi possint; vix tamen asseverare ausim, praeter has nullas dari alias curvas algebraicas, quae eadem praeditae sint proprietate. Methodus enim, qua sum usus, non ita est comparata, ut pro generali haberi possit, propterea quod in formulis § 7 angulum φ tanquam multiplum anguli θ spectavi, cum tamen fortasse alia relatio inter eos intercedere possit, quae ad integrationem aeque sit accommodata. Hoc inde suspicari licet, quod si aliae formulae integrales $\int Z dz$ proponantur, eaeque pari modo ad angulum quempiam θ reducantur, integratio non succedat pro angulo φ multiplum anguli θ assumendo, cum tamen saepenumero aliae relationes negotium conficiant. Hujusmodi casus probe notasse juvabit, quoniam inde forte methodum latius patentem talia problemata tractandi derivare licebit, si cunctae operationes, quas varia problemata singularia requirunt, diligenter perpendantur, atque inter se conferantur. Quem in finem unam atque alteram solutionem similium quaestionum adjungam.

De Parabola.

14. Propositum itaque sit alias curvas algebraicas investigare, quarum rectificatio conveniat cum rectificatione parabolae, seu quarum arcus indefinite exprimatur per hanc formulam:

$$\int \frac{dz}{a}\sqrt{(aa+zz)}.$$

Necesse igitur est, ut coordinatae orthogonales ita se habeant

$$x = \int \frac{dz\cos\varphi}{a}\sqrt{(aa+zz)} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{dz\sin\varphi}{a}\sqrt{(aa+zz)},$$

ubi definiendum erit, qualem relationem angulus φ ad variabilem z tenere debeat, ut ambae istae formulae integrabiles reddantur. Ponamus ergo $\frac{z}{a} = \tang\theta$, ut fiat $\sqrt{(aa+zz)} = a\sec\theta = \frac{a}{\cos\theta}$, et cum sit $\frac{dz}{a} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$, erit arcus $\int \frac{dz}{a}\sqrt{(aa+zz)} = \int \frac{a\,d\theta}{\cos^3\theta}$, et coordinatae:

$$x = a\int \frac{d\theta\cos\varphi}{\cos^3\theta} \quad \text{et} \quad y = a\int \frac{d\theta\sin\varphi}{\cos^3\theta},$$

atque hic iterum observo, certa multipla anguli θ pro angulo φ exhiberi posse, quibus ambae formulae integrabiles evadant. Statuatur ergo $\varphi = n\theta$, ut habeamus pro coordinatis sequentes expressiones:

$$x = a\int \frac{d\theta\cos n\theta}{\cos^3\theta} \quad \text{et} \quad y = a\int \frac{d\theta\sin n\theta}{\cos^3\theta}.$$

15. Jam per reductionem formularum integralium, quali supra sum usus, reperiemus

$$\int \frac{d\theta\cos n\theta}{\cos^3\theta} = \frac{2\sin(n-1)\theta}{(n-3)\cos^2\theta} - \frac{(n+1)}{n-3}\int \frac{d\theta\cos(n-2)\theta}{\cos^3\theta}, \quad \int \frac{d\theta\sin n\theta}{\cos^3\theta} = \frac{-2\cos(n-1)\theta}{(n-3)\cos^2\theta} - \frac{(n+1)}{n-3}\int \frac{d\theta\sin(n-2)\theta}{\cos^3\theta}$$

unde patet, si integratio succedat casu quocunque $n = \lambda$, eam quoque succedere casibus

$$n = \lambda + 2, \quad n = \lambda + 4, \quad n = \lambda + 6, \text{ etc.},$$

sicque infinitas curvas algebraicas ex unica impetrari. Patet autem si sit $n = 3$, fore

$$\int \frac{d\theta \cos\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta} \quad \text{et} \quad \int \frac{d\theta \sin\theta}{\cos^3\theta} = -\frac{\cos 2\theta}{2\cos^2\theta}, \quad \text{sive}$$

$$\int \frac{d\theta \cos\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad \int \frac{d\theta \sin\theta}{\cos^3\theta} = +\frac{1}{2\cos^2\theta},$$

quo casu prodit

$$x = \frac{a\sin\theta}{\cos\theta}. \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2\cos^2\theta}, \quad \text{ergo} \quad \frac{xx}{2a} = \frac{a\sin^2\theta}{2\cos^2\theta},$$

hincque $y - \frac{xx}{2a} = \frac{a}{2}$, quae est aequatio pro ipsa parabola.

16. Verum etiamsi hic unum casum integrabilitatis, quo $\varphi = \theta$ seu $n = 1$ habeamus cognitum, tamen singulari fato ex eo nulli alii casus elici possunt. Si enim statuamus $n = 3$, ob denominatorem $n - 3$ evanescentem, integralia inde pro casu $\varphi = 3\theta$ minime reperiuntur. Casu autem $n = -1$ formulae praecedentes redeunt, ita ut propter hoc incommodum nullus aditus ad curvas magis compositas pateat. Videri ergo posset parabola pari conditione praedita ac circulus, ut praeter se ipsam nullas alias agnoscat curvas algebraicas secum commensurabiles. Ex ipsa verum angulorum compositione manifestum est, quicunque numerus integer excepta unitate pro n statuatur, formulam $\int \frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^3\theta}$ nunquam integrabilem evadere, sed semper per integrationem ipsum angulum θ induci. Interim tamen alia methodo quaesito satisfieri potest, unde non difficulter talis curva eruitur

$$x = \frac{1}{2} z\sqrt{(4 + zz)} \text{ et } y = \sqrt{(4 + zz)}, \text{ seu } y^4 = 4(xx + yy), \text{ pro qua est } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz\sqrt{(1 + zz)}.$$

De Ellipsi.

17. Progredior ergo ad curvas algebraicas indagandas, quarum arcus cum arcubus ellipseos sint commensurabiles. Quaestio igitur huc redit, ut curvarum inveniendarum arcus exprimantur per hanc formulam $\int dz\sqrt{(1 + \frac{mmzz}{1 - zz})}$, quae est formula pro arcu elliptico abscissae z respondente, dum applicata est $= m\sqrt{(1 - zz)}$. Pro curvis ergo, quas quaerimus, statuamus coordinatas

$$x = \int dz \cos\varphi\sqrt{(1 + \frac{mmzz}{1 - zz})} \quad \text{et} \quad y = \int dz \sin\varphi\sqrt{(1 + \frac{mmzz}{1 - zz})},$$

et videamus quomodo angulus φ capi debeat, ut ambae istae formulae fiant integrabiles. Ponamus $z = \sin\theta$, et hae formulae erunt

$$x = \int d\theta \cos\varphi\sqrt{(\cos^2\theta + mm\sin^2\theta)} \quad \text{et} \quad y = \int d\theta \sin\varphi\sqrt{(\cos^2\theta + mm\sin^2\theta)},$$

ubi manifestum est, quaecunque multipla anguli θ pro φ statuantur, has expressiones nullo modo ad integrationem perduci posse. Aliis ergo artificiis erit utendum, siquidem certum est dari curvas algebraicas quaesito satisfacientes.

18. Quoniam irrationalitas negotium turbat, ad ejus speciem saltem tollendam pono

$$m \tang \theta = \tang \omega, \quad \text{ut sit} \quad mm \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \tang^2 \omega,$$

hincque $\sqrt{(\cos^2 \theta + mm \sin^2 \theta)} = \cos \theta \sqrt{(1 + \tang^2 \omega)} = \frac{\cos \theta}{\cos \omega}$.

Hac substitutione facta nostrae coordinatae erunt

$$x = \int \frac{d\theta \cos \theta \cos \varphi}{\cos \omega} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{d\theta \cos \theta \sin \varphi}{\cos \omega},$$

ubi notandum est angulos θ et ω ita a se invicem pendere, ut sit

$$m \tang \theta = \tang \omega, \quad \text{ideoque} \quad \frac{m\, d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}.$$

Statuatur jam

$\varphi = n\theta - \omega$, et ob $\cos \varphi = \cos n\theta \cos \omega + \sin n\theta \sin \omega$ et $\sin \varphi = \sin n\theta \cos \omega - \cos n\theta \sin \omega$ coordinatae ita exprimentur, ut sit ob $\tang \omega = m \tang \theta$

$$x = \int d\theta \cos \theta \cos n\theta + \int d\theta \cos \theta \sin n\theta \tang \omega = \int d\theta (\cos \theta \cos n\theta + m \sin \theta \sin n\theta),$$

$$y = \int d\theta \cos \theta \sin n\theta - \int d\theta \cos \theta \cos n\theta \tang \omega = \int d\theta (\cos \theta \sin n\theta - m \sin \theta \cos n\theta),$$

quas formulas, quicunque numerus pro n assumatur praeter unitatem, manifestum est semper esse integrabiles.

19. Cum igitur sit

$$\cos \theta \cos n\theta = \frac{1}{2} \cos (n-1)\theta + \frac{1}{2} \cos (n+1)\theta,$$

$$\sin \theta \sin n\theta = \frac{1}{2} \cos (n-1)\theta - \frac{1}{2} \cos (n+1)\theta,$$

$$\cos \theta \sin n\theta = \frac{1}{2} \sin (n-1)\theta + \frac{1}{2} \sin (n+1)\theta,$$

$$-\sin \theta \cos n\theta = \frac{1}{2} \sin (n-1)\theta - \frac{1}{2} \sin (n+1)\theta,$$

substituendis his valoribus habebimus

$$x = \frac{1}{2} \int d\theta \left((m+1) \cos (n-1)\theta - (m-1) \cos (n+1)\theta\right),$$

$$y = \frac{1}{2} \int d\theta \left((m+1) \sin (n-1)\theta - (m-1) \sin (n+1)\theta\right),$$

unde valores integrales sponte fluunt:

$$x = \frac{+(m+1) \sin (n-1)\theta}{2(n-1)} - \frac{(m-1) \sin (n+1)\theta}{2(n+1)},$$

$$y = \frac{-(m+1) \cos (n-1)\theta}{2(n-1)} + \frac{(m-1) \cos (n+1)\theta}{2(n+1)}.$$

Hincque cum pro n numeros quoscunque rationales praeter unitatem accipere liceat, innumerabiles lineae algebraicae exhiberi possunt.

20. Cum igitur unitas pro n substitui nequeat, casus simplicissimus prodibit, si ponatur $n=0$, quo ergo habebitur

$$x = \frac{1}{2} (m+1) \sin \theta - \frac{1}{2} (m-1) \sin \theta = \sin \theta,$$

$$y = \frac{1}{2} (m+1) \cos \theta + \frac{1}{2} (m-1) \cos \theta = m \cos \theta,$$

unde fit $mmxx + yy = mm$, ideoque $y = m\sqrt{(1 - xx)}$, quae est aequatio pro ellipsi proposita, cujus arcus ob $x = \sin\theta = z$ utique est $\int dz\sqrt{(1 + \frac{mmzz}{1-zz})}$, uti requiritur, erit enim

$$x = z \quad \text{et} \quad y = m\sqrt{(1 - zz)}.$$

Aliae vero curvae, quarum eadem est rectificatio, prodibunt, si numero n praeter unitatem alii valores tribuantur. Sit igitur $n = 2$, atque habebitur

$$x = \tfrac{1}{2}(m+1)\sin\theta - \tfrac{1}{6}(m-1)\sin 3\theta, \qquad y = -\tfrac{1}{2}(m+1)\cos\theta + \tfrac{1}{6}(m-1)\cos 3\theta,$$

unde fit $xx + yy = \frac{1}{4}(m+1)^2 + \frac{1}{36}(m-1)^2 - \frac{1}{6}(mm-1)\cos 2\theta$, seu

$$xx + yy = \tfrac{5}{18}mm + \tfrac{4}{9}m + \tfrac{5}{18} - \tfrac{1}{6}(mm-1)\cos 2\theta.$$

Verum praestat uti formulis illis pro x et y inventis, quia ad cognoscendam et construendam curvam sunt maxime idoneae.

21. Antequam in evolutione horum casuum ulterius progrediar, notari conveniet, quantitatem m tam negative quam affirmative capi posse, propterea quod in expressione arcus quadratum mm tantum inest. Verumtamen iidem casus resultant, si numerus n negative capiatur, ita ut quantitate m ambigua assumta, non opus sit pro n valores negativos statuere. Hinc ergo quilibet numerus positivus pro n sumtus duas praebet lineas algebraicas, prouti m vel affirmative accipitur, vel negative; sicque post ellipsin has duas habebimus curvas satisfacientes

$$x = \tfrac{1}{2}(m+1)\sin\theta - \tfrac{1}{6}(m-1)\sin 3\theta, \qquad x = \tfrac{1}{2}(m-1)\sin\theta - \tfrac{1}{6}(m+1)\sin 3\theta,$$

$$y = \tfrac{1}{2}(m+1)\cos\theta - \tfrac{1}{6}(m-1)\cos 3\theta, \qquad y = \tfrac{1}{2}(m-1)\cos\theta - \tfrac{1}{6}(m+1)\cos 3\theta,$$

ubi quidem valorem ipsius y negative sumsi. Similes fere expressiones prodeunt, si ponatur $n = \frac{1}{2}$, unde quoque hae duae curvae oriuntur

$$x = (m+1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{3}(m-1)\sin\tfrac{3}{2}\theta, \qquad x = (m-1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{3}(m+1)\sin\tfrac{3}{2}\theta,$$

$$y = (m+1)\cos\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}(m-1)\cos\tfrac{3}{2}\theta, \qquad y = (m-1)\cos\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}(m+1)\cos\tfrac{3}{2}\theta.$$

Atque evidens est eliminando arcu θ has quatuor aequationes ad eundem ordinem esse ascensuras.

22. Ponamus $n = 3$, hincque duae nascentur curvae istae

$$x = \tfrac{1}{4}(m+1)\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}(m-1)\sin 4\theta, \qquad x = \tfrac{1}{4}(m-1)\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}(m+1)\sin 4\theta,$$

$$y = \tfrac{1}{4}(m+1)\cos 2\theta - \tfrac{1}{8}(m-1)\cos 4\theta, \qquad y = \tfrac{1}{4}(m-1)\cos 2\theta - \tfrac{1}{8}(m+1)\sin 4\theta,$$

At si ponamus $n = \frac{1}{3}$, non multum absimiles hae curvae nascuntur

$$x = \tfrac{3}{4}(m+1)\sin\tfrac{2}{3}\theta - \tfrac{3}{8}(m-1)\sin\tfrac{4}{3}\theta, \qquad x = \tfrac{3}{4}(m-1)\sin\tfrac{2}{3}\theta - \tfrac{3}{8}(m+1)\sin\tfrac{4}{3}\theta,$$

$$y = \tfrac{3}{4}(m+1)\cos\tfrac{2}{3}\theta + \tfrac{3}{8}(m-1)\cos\tfrac{4}{3}\theta, \qquad y = \tfrac{3}{4}(m-1)\cos\tfrac{2}{3}\theta + \tfrac{3}{8}(m+1)\cos\tfrac{4}{3}\theta.$$

Omnes enim hae quatuor curvae tantum ad ordinem linearum quartum referuntur. Ex quibus perspicuum est, quomodo ex quavis hypothesi quaternae curvae elici queant, ad eundem ordinem referendae, nisi quatenus forte casu ordo deprimi possit. Haec ergo infinita linearum algebraicarum multitudo, quarum arcus omnes per arcus ellipticos absolute mensurantur, omnino est notatu digna, idque eo magis, quod pro omnibus coordinatae x et y binis tantum terminis exprimuntur; unde earum constructio haud parum concinna adornari potest, etiamsi plerumque curvae ad altiores linearum ordines referantur.

23. De his autem omnibus lineis imprimis est notandum, eas ad classem Epicycloidum et Hypocycloidum pertinere ac per motum volutorium circuli super peripheria alterius circuli, sive extus sive intus describi posse. Hoc autem hae curvae a vulgaribus epicycloidibus et hypocycloidibus differunt, quod in circulo mobili punctum describens non in ejus peripheria, sed sive extra sive intra eam assumi debet. Si enim in peripheria caperetur, quo casu epicycloides et hypocycloides vulgares prodirent, curvae descriptae absolute essent rectificabiles, neque idcirco ad nostrum institutum essent accommodatae: sin autem punctum describens in ipso centro circuli mobilis assumeretur, curva descripta perpetuo foret circulus. Verum sive punctum describens capiatur extra, sive intra peripheriam circuli mobilis, hoc modo semper curvae describuntur, quarum rectificatio per arcus ellipticos absolute confici potest. Nostrae ergo curvae prodibunt, si distantia puncti describentis a centro circuli mobilis sive major fuerit sive minor quam ejus semidiameter.

24. Natura autem hujusmodi linearum accuratius perpensa, curvae, quarum arcus per arcus datae ellipsis mensurantur, ita describi posse deprehendentur. Sit in ellipsi proposita ratio amborum axium principalium $= 1 : m$, ac posito radio circuli mobilis $= r$, capiatur distantia puncti describentis ab ejus centro sive $= \frac{m+1}{m-1} r$, sive $= \frac{m-1}{m+1} r$. Tum si iste circulus super quocunque alio circulo sive extus sive intus provolvatur, ab utroque puncto describente semper ejusmodi curva describetur, cujus rectificatio cum rectificatione ellipsis propositae conveniet. Quo autem curvae hoc modo descriptae fiant algebraicae, necesse est, ut radius circuli mobilis ad radium circuli immoti rationem teneat rationalem, quae quo fuerit simplicior, eo minus curvae descriptae erunt compositae: ac constituto quidem circulo immoto, sive mobilis extra eum, sive intra volvatur, tum vero sive punctum describens extra sive intra circulum mobilem accipitur, quaternae illae curvae describentur, quas conjunctas inveneramus.

25. Operae pretium fore videtur harum linearum epi- et hypocycloidalium proprietates primarias, quatenus huc pertinent, ac praecipue earum rectificationem attentius contemplari. Sit igitur (Fig. 50, 51 item 52, 53) C centrum circuli immoti AQ, ejusque radius $CA = CQ = a$, super cujus peripheria volvatur circulus $OLRQV$, cujus radius $OQ = OR = r$; sitque punctum describens M in radio OR, ac vocetur $OM = \mu r$, ita ut sit sive $\mu = \frac{m+1}{m-1}$, sive $\mu = \frac{m-1}{m+1}$. Hoc modo a stilo M descripta sit curva DM, cujus initium D ei respondeat circuli mobilis situi, quo punctum R tangebat circulum immotum in A. Hinc ergo ex natura motus volutorii erit arcus QR aequalis arcui QA. Quare si dicamus angulum $ACQ = \varphi$, ob arcum $AQ = QR = a\varphi$, erit angulus $QOR = \frac{a}{r}\varphi$. Vocemus autem brevitatis gratia hunc angulum $QOR = \alpha\varphi$, ut sit $\alpha = \frac{a}{r}$. Tum

vero ex punctis M et O ad rectam CA pro axe assumtam demittantur perpendicula MP et OS, itemque ex M in rectam MT axi AC parallelam, sintque coordinatae orthogonales curvae descriptae $CP = x$ et $PM = y$.

26. Cum jam sit angulus $ACQ = \varphi$ et $CO = a \pm r$, ubi signum superius pro curvis epicycloidalibus, inferius vero pro hypocycloidalibus valet, erit $CS = (a \pm r)\cos\varphi$ et $OS = (a \pm r)\sin\varphi$. Deinde ob ang. $COS = 90° - \varphi$ et $COR = \alpha\varphi$, erit ang. $MOT = (\alpha + 1)\varphi - 90°$ pro epicycloidalibus (Figg. 50, 51), at pro hypocycloidalibus (Figg. 52, 53), ob $COS = 90° - \varphi$ et $COR = 180° - \alpha\varphi$, erit ang $MOT = 90° - (\alpha - 1)\varphi$, unde ex triangulo OMT ad T rectangulo, ob latus $OM = \mu r$, obtinebimus pro utroque casu

curvarum epicycloidalium Fig. 50 et 51:

$MT = -\mu r \cos(\alpha + 1)\varphi$,

$OT = +\mu r \sin(\alpha + 1)\varphi$,

ergo $CP = (a + r)\cos\varphi - \mu r\cos(\alpha + 1)\varphi = x$,

$PM = (a + r)\sin\varphi - \mu r\sin(\alpha + 1)\varphi = y$.

curvarum hypocycloidalium Fig. 52 et 53:

$MT = \mu r \cos(\alpha - 1)\varphi$,

$OT = \mu r \sin(\alpha - 1)\varphi$,

ergo $CP = (a - r)\cos\varphi + \mu r\cos(\alpha - 1)\varphi = x$,

$PM = (a - r)\sin\varphi + \mu r\sin(\alpha - 1)\varphi = y$.

Consequenter pro utroque casu conjunctim

$$CP = x = (a \pm r)\cos\varphi \mp \mu r\cos\left(1 \pm \frac{a}{r}\right)\varphi,$$

$$PM = y = (a \pm r)\sin\varphi \mp \mu r\sin\left(1 \pm \frac{a}{r}\right)\varphi,$$

27. Hinc ergo videmus totum discrimen inter has curvas epicycloidales et hypocycloidales tantum in signo quantitatis r esse situm, ita ut omnes his expressionibus pro coordinatis $CP = x$ et $PM = y$ possimus complecti

$$x = (a + r)\cos\varphi - \mu r\cos\left(1 + \frac{a}{r}\right)\varphi,$$

$$y = (a + r)\sin\varphi - \mu r\sin\left(1 + \frac{a}{r}\right)\varphi,$$

quae proprie ad epicycloidales pertinent, sed sumta quantitate r negativa simul ad hypocycloidales extenduntur. Differentiando ergo habebimus

$$dx = -(a + r)\,d\varphi\left(\sin\varphi - \mu\sin\left(1 + \frac{a}{r}\right)\varphi\right),$$

$$dy = +(a + r)\,d\varphi\left(\cos\varphi - \mu\cos\left(1 + \frac{a}{r}\right)\varphi\right),$$

unde elementum arcus hujus curvae $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ reperitur

$$ds = (a + r)\,d\varphi\sqrt{(1 + \mu\mu - 2\mu\cos\tfrac{a}{r}\varphi)},$$

et radius osculi in M ita erit expressus:

$$\frac{(a + r)(1 + \mu\mu - 2\mu\cos\frac{a}{r}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 + \mu\mu - \mu\left(2 + \frac{a}{r}\right)\cos\frac{a}{r}\varphi}.$$

28. Quaecunque igitur hujusmodi curva descripta dabitur ellipsis, in qua arcui curvae DM arcus aequalis assignari poterit. Sit (Fig. 54) $adbe$ haec ellipsis, ejusque axes orthogonales ab et de; vocetur semiaxis minor $ca = cb = c$ et semiaxis major $cd = ce = mc$, sumtaque super illo a centro c abscissa $cp = z$, erit applicata $pm = m\sqrt{(cc - zz)}$ et arcus ellipticus $dm = \int dz\sqrt{\left(1 + \frac{mmzz}{cc - zz}\right)}$. Statuatur $z = c\sin\theta$, eritque hic arcus

$$dm = \int c d\theta \sqrt{(1 + (mm - 1)\sin^2\theta)} = \int c d\theta \sqrt{(\tfrac{1}{2}(mm+1) - \tfrac{1}{2}(mm-1)\cos 2\theta)},$$

quae forma ut illi pro ds inventae aequalis reddatur, fieri oportet

$$\theta = \frac{a}{2r}\varphi = \frac{1}{2}QOR \quad \text{et} \quad \frac{mm+1}{mm-1} = \frac{1+\mu\mu}{2\mu}, \quad \text{seu} \quad m = \pm\frac{\mu+1}{\mu-1}$$

vel, quod eodem redit, capiatur $m = \frac{VM}{RM}$ in Figg. 50, 51, 52, 53, eritque arcus ellipticus

$$dm = \int \frac{acd\varphi}{2(\mu-1)r}\sqrt{(1+\mu\mu - 2\mu\cos\frac{a}{r}\varphi)}.$$

Superest ergo, ut sit $\frac{ac}{2(\mu-1)r} = a + r$, unde semiaxes ellipsis fiunt

$$ca = cb = \frac{2(\mu-1)r(a+r)}{a} \quad \text{et} \quad cd = ce = \frac{2(\mu+1)r(a+r)}{a}.$$

29. In genere ergo habebimus hanc constructionem pro ellipsi quaesita:

$$\text{semiaxis } ca = \frac{2RM.CO}{CQ} \quad \text{et semiaxis } cd = ce = \frac{2VM.CO}{CQ},$$

qua descripta circa centrum C radio $ca = cb$ delineetur circulus $afbg$, tum ducatur radius cn ita, ut sit angulus $fcn = \frac{1}{2}QOR$, et per n ducta recta pnm axi majori de parallela, erit arcus ellipticus dm aequalis arcui curvae supra descriptae DM. Unde patet, si circulus mobilis jam per semiperipheriam fuerit provolutus, quod evenit cum punctum V circulo immoto applicabitur, tum longitudinem curvae descriptae aequalem fore quadranti elliptico dma. Cum autem circulus mobilis integram revolutionem absolverit, tractus curvae descriptae semiperipheriae ellipticae dae erit aequalis; sicque uti ellipsis est curva in se rediens, ita provolutione continuata longitudo curvae continuo crescet.

30. De his curvis adhuc notari meretur ipsam quoque ellipsin inter eas comprehendi. Si enim pro hypocycloidalibus sumatur radius circuli immoti aequalis diametro circuli mobilis seu $a = 2r$, vel si in nostris formulis § 27 ponamus $r = -\frac{1}{2}a$, habebimus

$$x = \frac{1}{2}a\cos\varphi + \frac{1}{2}\mu a\cos\varphi = -(1+\mu)r\cos\varphi,$$

$$y = \frac{1}{2}a\sin\varphi - \frac{1}{2}\mu a\sin\varphi = -(1-\mu)r\sin\varphi,$$

unde prodit

$$\frac{xx}{(1+\mu)^2} + \frac{yy}{(1-\mu)^2} = rr,$$

quae est aequatio pro ellipsi, cujus semiaxes sunt $(\mu-1)r$ et $(\mu+1)r$ seu MR et MV, estque ea ipsa ellipsis, cujus arcubus nostrae curvae mensurantur: nam ob $CQ = 2CO$ fit utique $ca = RM$ et $cd = VM$. Potest itaque quaecunque ellipsis provolutione circuli intra peripheriam alterius circuli, cujus radius duplo est major, describi, ubicunque enim tum stylus in circulo mobili figatur, ab eo ellipsis describetur.

31. Innumerabiles autem curvae, quae sint cum arcubus parabolicis commensurabiles, quarum supra unam exhibui, seu ut positis coordinatis x et y, sit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz\sqrt{(1+zz)},$$

sequenti modo se habebunt. Ponatur $z = \frac{2}{n}\operatorname{tang}\varphi$ seu $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}nz$, ac statuatur

$$x = \frac{2\sin n\varphi}{nn\cos^2\varphi} \quad \text{et} \quad y = \frac{2\cos n\varphi}{nn\cos^2\varphi},$$

erit semper, quicunque numerus pro n assumatur, $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int dz\sqrt{(1+zz)}$. Facile autem ang. φ eliminatur ob $\sqrt{(xx+yy)} = \frac{2}{nn\cos^2\varphi}$, unde fit

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt[4]{(xx+yy)}} \quad \text{hincque} \quad \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} = \cos n\varphi.$$

At si variabilem z retinere velimus, erit

$$x = \frac{\frac{n}{1}\cdot\frac{nz}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n^3z^3}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{n^5z^5}{32} - \text{etc.}}{\frac{1}{2}nn\left(1+\frac{nnzz}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$y = \frac{1 - \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{nnzz}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{n^4z^4}{16} - \text{etc.}}{\frac{1}{2}nn\left(1+\frac{nnzz}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

quae formulae, quoties n sumitur numerus integer positivus, finito terminorum numero constabunt. Verum priores semper, etiamsi pro n statuatur numerus fractus, ad aequationem finitam deducunt. Veluti si $n = \frac{1}{2}$, cum sit

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(xx+yy)}} \quad \text{et} \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

erit hinc $\cos\varphi = \frac{2yy}{xx+yy} - 1 = \frac{yy-xx}{xx+yy}$, unde obtinetur

$$\frac{64}{xx+yy} = \frac{(yy-xx)^4}{(xx+yy)^4} \quad \text{seu} \quad (yy-xx)^4 = 64(xx+yy)^3$$

pro linea ordinis octavi.

XXII.

De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.

Sectio prima

continens evolutionem hujus aequationis:

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy.$$

I.

Si ex hac aequatione sigillatim utriusque variabilis x et y valor extrahatur, reperietur

$$y=\frac{-\beta-\delta x+\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx)}}{\gamma},$$

$$x=\frac{-\beta-\delta y-\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy)}}{\gamma}.$$

Ponatur brevitatis gratia $\beta\beta-\alpha\gamma=Ap$, $\beta(\delta-\gamma)=Bp$ et $\delta\delta-\gamma\gamma=Cp$, eritque

$$\beta+\gamma y+\delta x=+\sqrt{(A+2Bx+Cxx)p},$$

$$\beta+\gamma x+\delta y=-\sqrt{(A+2By+Cyy)p}.$$

II.

Litteris jam A, B, C pro lubitu assumtis, ex iis litterae α, β, γ, δ et p sequenti modo definientur: Primo ex aequalitate secunda fit $\delta-\gamma=\frac{Bp}{\beta}$, qui valor in tertia $\delta+\gamma=\frac{Cp}{\delta-\gamma}$ substitutus dat $\delta+\gamma=\frac{C\beta}{B}$; ita ut sit

$$\delta=\frac{C\beta}{2B}+\frac{Bp}{2\beta} \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{C\beta}{2B}-\frac{Bp}{2\beta}.$$

Hinc autem aequalitas prima abit in hanc

$$\beta\beta-\frac{C\alpha\beta}{2B}+\frac{B\alpha p}{2\beta}=Ap$$

ex qua definietur $p=\frac{\beta\beta(2B\beta-C\alpha)}{B(2A\beta-B\alpha)}$, indeque porro

$$\delta=\frac{\beta(AC\beta+BB\beta-BC\alpha)}{B(2A\beta-B\alpha)} \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{\beta\beta(AC-BB)}{B(2A\beta-B\alpha)}.$$

Sic ergo litterae α et β arbitrio nostro relinquuntur, quarum altera quidem unitate exprimi poterit, altera vero constantem arbitrariam, a coëfficientibus A, B, C non pendentem, exhibebit.

III.

Differentietur nunc aequatio proposita, ac prodibit

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y) + dy(\beta + \gamma y + \delta x) = 0,$$

unde conficitur haec aequatio

$$\frac{dx}{\beta + \gamma y + \delta x} = \frac{-dy}{\beta + \gamma x + \delta y},$$

quae substitutis valoribus in articulo I inventis, abibit in hanc aequationem differentialem:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = 0$$

cujus propterea integralis est ipsa aequatio assumta.

IV.

Proposita ergo vicissim hac aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = 0,$$

ejus integrale semper algebraice exhiberi poterit, quippe quod erit

$$0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \frac{\beta\beta(AC - BB)(xx + yy) + 2\beta(AC\beta + BB\beta - BC\alpha)xy}{B(2A\beta - B\alpha)},$$

et quia hic continetur constans ab arbitrio nostro pendens, erit hoc integrale quoque completum aequationis differentialis propositae. Erit ergo retentis litteris graecis

$$\text{vel}\quad y = \frac{-\beta - \delta x + \sqrt{(A + 2Bx + Cxx)p}}{\gamma},$$

$$\text{vel}\quad x = \frac{-\beta - \delta y - \sqrt{(A + 2By + Cyy)p}}{\gamma}.$$

V.

Quemadmodum autem istarum formularum integralium differentia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}},$$

est constans, siquidem inter x et y ea relatio subsistat, ut sit

$$0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy,$$

ita etiam eadem manente relatione, differentia hujusmodi formularum

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int \frac{y^n dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}}$$

commode exprimi potest; quos valores indagasse operae pretium erit.

VI.

Posito ergo exponente $n = 1$, statuamus

$$\frac{xdx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \frac{ydy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = dV,$$

eritque valoribus initio traditis pro his formulis irrationalibus substituendis

$$\frac{xdx\sqrt{p}}{\beta+\gamma y+\delta x}+\frac{ydy\sqrt{p}}{\beta+\gamma x+\delta y}=dV,$$

seu $xdx(\beta+\gamma x+\delta y)+ydy(\beta+\gamma y+\delta x)=\frac{dV}{\sqrt{p}}(\beta+\gamma y+\delta x)(\beta+\gamma x+\delta y)$; at est

$$(\beta+\gamma y+\delta x)(\beta+\gamma x+\delta y)=\beta\beta+\beta(\gamma+\delta)(x+y)+\gamma\delta(xx+yy)+(\gamma\gamma+\delta\delta)xy.$$

VII.

Quo hanc formulam facilius expediamus, ponamus $x+y=t$ et $xy=u$, erit

$$xx+yy=tt-2u \quad \text{et} \quad x^3+y^3=t^3-3tu,$$

sicque aequatio abit in hanc formam

$$\beta(xdx+ydy)+\gamma(xxdx+yydy)+\delta xy(dx+dy)=\frac{dV}{\sqrt{p}}(\beta\beta+\beta(\gamma+\delta)t+\gamma\delta tt+(\gamma-\delta)^2u).$$

Ipsa autem aequatio assumta fit: $0=\alpha+2\beta t+\gamma tt+2(\delta-\gamma)u$, et penitus introductis litteris t et u habebimus

$$\beta(tdt-du)+\gamma(ttdt-tdu-udt)+\delta udt=\frac{dV}{\sqrt{p}}(\beta\beta-\alpha\delta+\beta(\gamma-\delta)t+(\gamma\gamma-\delta\delta)u),$$

seu $dt(\beta t+\gamma tt-(\gamma-\delta)u)-du(\beta+\gamma t)=\frac{dV}{\sqrt{p}}(\beta\beta-\alpha\delta+\beta(\gamma-\delta)t+(\gamma\gamma-\delta\delta)u)$.

VIII.

Ex aequatione autem assumta si differentietur, fit $dt(\beta+\gamma t)=(\gamma-\delta)du$, unde aequationis ultimae prius membrum transformatur in

$$\frac{dt}{\gamma-\delta}(-\beta\beta-\beta(\gamma+\delta)t-\gamma\delta tt-(\gamma-\delta)^2u),$$

quod cum aequale esse debeat huic formulae

$$\frac{dV}{\sqrt{p}}(\beta\beta+\beta(\gamma+\delta)t+\gamma\delta tt+(\gamma-\delta)^2u),$$

commode inde oritur $\quad \frac{dV}{\sqrt{p}}=\frac{-dt}{\gamma-\delta}$ et $V=\frac{-t\sqrt{p}}{\gamma-\delta}$.

IX.

Cum jam sit $t=x+y$, habebimus sequentem aequationem integratam

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}-\int\frac{ydy}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=\text{Const.}-\frac{(x+y)\sqrt{p}}{\gamma-\delta},$$

existente $0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy$, siquidem relationes supra exhibitae inter litteras A, B, C et α, β, γ, δ ac p locum habeant. Hinc ergo eadem manente determinatione variabilium x et y erit generalius:

$$\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}-\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y)}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=\text{Const.}-\frac{\mathfrak{B}(x+y)\sqrt{p}}{\gamma-\delta}.$$

X.

Progrediamur porro, ac statuamus

$$\frac{xxdx}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}-\frac{yydy}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=dV,$$

erit posito brevitatis ergo $\beta\beta + \beta(\gamma + \delta)t + \gamma\delta tt + (\gamma - \delta)^2 u = T$, si loco istarum formularum surdarum valores ante reperti substituantur

$xxdx(\beta + \gamma x + \delta y) + yydy(\beta + \gamma y + \delta x) = \frac{TdV}{\sqrt{p}}$, existente ut ante $t = x + y$ et $u = xy$.

XI.

Cum nunc sit $x^4 + y^4 = t^4 - 4ttu + 2uu$, erit eliminatis variabilibus x et y

$$\beta(ttdt - tdu - udt) + \gamma(t^3dt - ttdu - 2tudt + udu) + \delta u(tdt - du) = \frac{TdV}{\sqrt{p}},$$

sive
$$dt(\beta tt - \beta u + \gamma t^3 - 2\gamma tu + \delta tu) - du(\beta t + \gamma tt - \gamma u + \delta u) = \frac{TdV}{\sqrt{p}}.$$

Cum autem sit $du = \frac{dt(\beta + \gamma t)}{\gamma - \delta}$, erit hac facta substitutione

$$\frac{dt}{\gamma - \delta}(-\beta\beta t - \beta(\gamma + \delta)tt - \gamma\delta t^3 - (\gamma - \delta)^2 tu) = \frac{TdV}{\sqrt{p}} = \frac{-Ttdt}{\gamma - \delta},$$

sicque erit $\frac{dV}{\sqrt{p}} = \frac{-tdt}{\gamma - \delta}$ et $V = \frac{-tt\sqrt{p}}{2(\gamma - \delta)}$.

XII.

Hinc ergo adipiscimur sequentem aequationem integratam

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int\frac{yydy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = \text{Const.} - \frac{(x + y)^2\sqrt{p}}{2(\gamma - \delta)},$$

atque in genere concludimus fore

$$\int\frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx)}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int\frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}yy)}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = \text{Const.} - \frac{\mathfrak{B}(x + y)\sqrt{p}}{\gamma - \delta} - \frac{\mathfrak{C}(x + y)^2\sqrt{p}}{2(\gamma - \delta)},$$

siquidem fuerit $0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy$. Erit autem ex relationibus supra assignatis $\frac{\sqrt{p}}{\gamma - \delta} = \frac{-\beta}{B\sqrt{p}}$ sive $\frac{\sqrt{p}}{\gamma - \delta} = -\sqrt{\frac{2A\beta - B\alpha}{B(2B\beta - C\alpha)}}$.

XIII.

Ponatur jam in genere

$$\frac{x^n dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \frac{y^n dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = dV,$$

eritque ponendo $T = \beta\beta + \beta(\gamma + \delta)t + \gamma\delta tt + (\gamma - \delta)^2 u$,

$$x^n dx(\beta + \gamma x + \delta y) + y^n dy(\beta + \gamma y + \delta x) = \frac{TdV}{\sqrt{p}},$$

at ob $x + y = t$ et $xy = u$ habebimus $x = \frac{t + \sqrt{(tt - 4u)}}{2}$ et $y = \frac{t - \sqrt{(tt - 4u)}}{2}$, ideoque

$$\beta + \gamma x + \delta y = \frac{2\beta + (\gamma + \delta)t + (\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}}{2},$$

$$\beta + \gamma y + \delta x = \frac{2\beta + (\gamma + \delta)t - (\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}}{2}.$$

XIV.

Differentiando autem habebimus

$$dx = \frac{dt\sqrt{(tt - 4u)} + tdt - 2du}{2\sqrt{(tt - 4u)}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dt\sqrt{(tt - 4u)} - tdt + 2du}{2\sqrt{(tt - 4u)}},$$

at ante vidimus esse $du = \frac{dt(\beta + \gamma t)}{\gamma - \delta}$: quo valore substituto prodibit

$$dx = \frac{-dt(2\beta + (\gamma + \delta)t - (\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)})}{2(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}}$$

$$dy = \frac{dt(2\beta + (\gamma + \delta)t + (\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)})}{2(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}}.$$

Hisque valoribus substitutis

$$dx\,(\beta + \gamma x + \delta y) = \frac{-dt(4\beta\beta + 4\beta(\gamma + \delta)t + 4\gamma\delta tt + 4(\gamma - \delta)^2 u)}{4(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}} = \frac{-Tdt}{(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}},$$

$$\text{et} \quad dy\,(\beta + \gamma y + \delta x) = \frac{+Tdt}{(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}}.$$

XV.

Nostra ergo aequatione per T divisa habebimus

$$\frac{-dt(x^n - y^n)}{(\gamma - \delta)\sqrt{(tt - 4u)}} = \frac{dV}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad V = \frac{-\sqrt{p}}{\gamma - \delta}\int\frac{dt(x^n - y^n)}{\sqrt{(tt - 4u)}},$$

existente $x = \frac{t + \sqrt{(tt - 4u)}}{2}$ et $y = \frac{t - \sqrt{(tt - 4u)}}{2}$ atque $u = \frac{\alpha + 2\beta t + \gamma tt}{2(\gamma - \delta)}$, unde

$$\sqrt{(tt - 4u)} = \sqrt{\frac{2\alpha + 4\beta t + (\gamma + \delta)tt}{\delta - \gamma}}.$$

Unde valores ipsius $\frac{x^n - y^n}{\sqrt{(tt - 4u)}}$ ex sequente progressione colligi poterunt:

$$\frac{x^0 - y^0}{\sqrt{(tt - 4u)}} = 0,$$

$$\frac{x^1 - y^1}{\sqrt{(tt - 4u)}} = 1,$$

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{(tt - 4u)}} = t,$$

$$\frac{x^3 - y^3}{\sqrt{(tt - 4u)}} = tt - u = \frac{(\gamma - 2\delta)tt - 2\beta t - \alpha}{2(\gamma - \delta)},$$

$$\frac{x^4 - y^4}{\sqrt{(tt - 4u)}} = t^3 - 2tu = \frac{-2\delta t^3 - 4\beta tt - 2\alpha t}{2(\gamma - \delta)},$$

$$\frac{x^5 - y^5}{\sqrt{(tt - 4u)}} = t^4 - 3ttu + uu = \frac{-(\gamma\gamma + 2\gamma\delta - 4\delta\delta)t^4 - 4\beta(2\gamma - 3\delta)t^3 + (4\beta\beta - 4\alpha\gamma + 6\alpha\delta)tt + 4\alpha\beta t + \alpha\alpha}{4(\gamma - \delta)^2}$$

etc. etc.

XVI.

Nanciscemur ergo formulas sequentes integratas

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int\frac{y^3\,dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = \text{Const.} - \frac{\sqrt{p}}{2(\gamma - \delta)^2}\left(\frac{1}{3}(\gamma - 2\delta)(x + y)^3 - \beta(x + y)^2 - \alpha(x + y)\right)$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cxx)}} - \int\frac{y^4\,dy}{\sqrt{(A + 2By + Cyy)}} = \text{Const.} + \frac{\sqrt{p}}{(\gamma - \delta)^2}\left(\frac{1}{4}\delta(x + y)^4 + \frac{2}{3}\beta(x + y)^3 + \frac{1}{2}\alpha(x + y)^2\right)$$

quae scilicet locum habent, si variabiles x et y ita a se invicem pendent, ut sit

$$0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy,$$

atque hi coëfficientes pariter atque p secundum praescriptas formulas ex datis A, B, C determinentur.

XVII.

Hinc ergo infinitae formulae integrales exhiberi possunt, quae etsi ipsae non sint integrabiles, earum tamen differentia vel sit constans, vel geometrice seu algebraice assignari queat. Quae comparatio cum in analysi insignem habeat usum, tum imprimis in arcubus curvarum irrectificabilium inter se comparandis summam affert utilitatem, quam in aliquot exemplis ostendisse juvabit.

De comparatione arcuum Circuli.

1. Sit radius circuli $=1$, in eoque abscissa a centro sumta $=z$; erit arcus ei respondens $=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, cujus propterea sinus est $=z$. Ut igitur nostrae formulae hujusmodi arcus circuli exprimant, poni debet $A=1$, $B=0$, $C=-1$; quo facto habebimus

$$\beta\beta-\alpha\gamma=p,\quad \beta(\delta-\gamma)=0 \quad \text{et} \quad \delta\delta-\gamma\gamma=-p;$$

has enim determinationes ab ipsa origine peti oportet, quia ob $B=0$, valores inventi fiunt incongrui. Jam ex formula secunda sequitur vel $\delta-\gamma=0$, vel $\beta=0$, quorum ille valor $\delta=\gamma$ formulae tertiae adversatur. Erit ergo $\beta=0$, $\delta=\pm\sqrt{(\gamma\gamma-p)}$ et $\alpha=\frac{-p}{\gamma}$. Ambae ergo quantitates constantes γ et p arbitrio nostro relinquuntur.

2. Quo formulae nostrae fiant simpliciores, ponamus $\gamma=1$ et $p=cc$, eritque

$$\alpha=-cc,\quad \beta=0,\quad \gamma=1 \quad \text{et} \quad \delta=-\sqrt{(1-cc)},$$

ac nostra aequatio canonica, relationem variabilium x et y determinans, fiet

$$0=-cc+xx+yy-2xy\sqrt{(1-cc)},$$

ex qua colligitur
$$y=x\sqrt{(1-cc)}\pm c\sqrt{(1-xx)}.$$

3. Quodsi ergo iste valor ipsi y tribuatur, erit

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\int\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}=\text{Const.}$$

Denotemus brevitatis gratia haec integralia ita

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\Pi.x \quad \text{et} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{(1-yy)}}=\Pi.y$$

atque $\Pi.x$ et $\Pi.y$ indicabunt arcus circuli, abscissis seu sinibus x et y respondentes. Quocirca erit

$$\Pi.x-\Pi.(x\sqrt{(1-cc)}+c\sqrt{(1-xx)})=\text{Const.}$$

4. Ad constantem determinandam ponatur $x=0$, et ob $\Pi.0=0$, fiet Const. $=-\Pi.c$ sicque erit

$$\Pi.c+\Pi.x=\Pi.(x\sqrt{(1-cc)}+c\sqrt{(1-xx)});$$

unde arcus assignari poterit aequalis summae duorum arcuum quorumcunque. Ac si x capiatur negativum ob $\Pi.(-x)=-\Pi.x$, erit

$$\Pi.c-\Pi.x=\Pi.(c\sqrt{(1-xx)}-x\sqrt{(1-cc)}),$$

qua arcus, differentiae duorum arcuum aequalis, definitur.

5. Si in formula priori ponatur $x = c$, erit $2\Pi . c = \Pi . 2c\sqrt{(1-cc)}$. Ac si porro ponatur $x = 2c\sqrt{(1-cc)}$, ut sit $\Pi . x = 2\Pi . c$, erit ob $\sqrt{(1-xx)} = 1-2cc$,

$$3\Pi . c = \Pi . (3c - 4c^3).$$

Posito autem ultra $x = 3c - 4c^3$, erit

$$4\Pi . c = \Pi . (x\sqrt{(1-cc)} + c\sqrt{(1-xx)})$$

unde multiplicatio arcuum circularium est manifesta.

De comparatione arcuum Parabolae.

6. Existente (Fig. 55.) AB parabolae axe, sumentur abscissae AP in tangente verticis A, sitque parameter parabolae $= 2$; unde vocata abscissa quacunque $AP = z$, erit applicata $Pp = \frac{zz}{2}$, ideoque arcus $Ap = \int dz\sqrt{(1+zz)}$, quae expressio ut ad nostras formulas reducatur, in hanc abit $\int \frac{dz(1+zz)}{\sqrt{(1+zz)}}$. Quare fieri oportet $A = 1$, $B = 0$ et $C = 1$, unde ut ante habebimus

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{-p}{\gamma} \quad \text{et} \quad \delta = \pm\sqrt{(\gamma\gamma + p)}.$$

Sit ergo $\gamma = 1$ et $p = cc$, atque aequatio relationem inter x et y exhibens erit

$$0 = -cc + xx + yy - 2xy\sqrt{(cc+1)}, \quad \text{seu} \quad y = x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}.$$

7. Deinde ob $\sqrt{p} = c$ et $\gamma - \delta = 1 + \sqrt{(1+cc)}$, facto $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 1$, erit ex formula XII data

$$\int \frac{dx(1+xx)}{\sqrt{(1+xx)}} - \int \frac{dy(1+yy)}{\sqrt{(1+yy)}} = \text{Const.} - \frac{c(x+y)^2}{2+2\sqrt{(1+cc)}}.$$

At est $x + y = x(1+\sqrt{(1+cc)}) + c\sqrt{(1+xx)}$, ergo

$$(x+y)^2 = 2xx(1+cc+\sqrt{(1+cc)}) + cc + 2cx(1+\sqrt{(1+cc)})\sqrt{(1+xx)}.$$

Quare formularum istarum integralium differentia erit

$$\text{Const.} - cxx\sqrt{(1+cc)} - ccx\sqrt{(1+xx)} = \text{Const.} - cxy.$$

8. Indicetur arcus parabolae abscissae cuicunque z respondens $\int dz\sqrt{(1+zz)}$ per $\Pi . z$, et nostra aequatio hanc induet formam:

$$\Pi . x - \Pi . (x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}) = -\Pi . c - cx(x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}),$$

sive $$\Pi . c + \Pi . x = \Pi . (x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}) - cx(x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}).$$

Datis ergo duobus arcubus quibuscunque, tertius arcus assignari potest, qui a summa illorum deficit quantitate geometrice assignabili. Vel quo indoles hujus aequationis clarius perspiciatur, erit

$$\Pi . c + \Pi . x = \Pi . y - cxy$$

siquidem fuerit

$$y = x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}.$$

9. Cum sit $y > x$, sint in figura abscissae $AE = c$, $AF = x$ et $AG = y$, erit arcus $Ae = \Pi . c$ et arcus $fg = \Pi . y - \Pi . x$; hinc ergo habebimus

$$\text{Arc} . Ae = \text{Arc} . fg - cxy, \quad \text{seu} \quad \text{Arc} . fg - \text{Arc} . Ae = cxy$$

existente $y = x\sqrt{(1+cc)} + c\sqrt{(1+xx)}$. Ex his igitur sequentia problemata circa parabolam resolvi poterunt.

10. **Problema 1.** Dato arcu parabolae Ae, in vertice A terminato a puncto quovis f alium abscindere arcum fg, ita ut differentia horum arcuum $fg - Ae$ geometrice assignari queat.

Solutio. Ponatur arcus dati Ae abscissa $AE = e$, et abscissa, termino dato f arcus quaesiti fg respondens, $AF = f$; abscissa vero alteri termino g arcus quaesiti respondens, $AG = g$, quae ita accipiatur, ut sit $g = f\sqrt{(1+ee)} + e\sqrt{(1+ff)}$; eritque existente parabolae parametro $= 2$, uti constanter assumemus: $\quad \text{Arc}.\,fg - \text{Arc}.\,Ae = efg.$

A puncto autem f quoque retrorsum arcus abscindi potest $f\gamma$, qui superet arcum Ae quantitate algebraica: ob signum radicale $\sqrt{(1+ff)}$ enim ambiguum, capiatur

$$AT = \gamma = f\sqrt{(1+ee)} - e\sqrt{(1+ff)}$$

eritque $\text{Arc}.\,f\gamma - \text{Arc}.\,Ae = ef\gamma$. Q. E. I.

11. **Coroll. 1.** Inventis ergo his duobus punctis g et γ, erit quoque arcuum fg et $f\gamma$ differentia geometrice assignabilis; erit enim

$$\text{Arc}.\,fg - \text{Arc}.\,f\gamma = ef(g-\gamma).$$

At est $g - \gamma = 2e\sqrt{(1+ff)}$, unde $e = \frac{g-\gamma}{2\sqrt{(1+ff)}}$. Tum vero habemus $g + \gamma = 2f\sqrt{(1+ee)}$, sive $\sqrt{(1+ee)} = \frac{g+\gamma}{2f}$; unde eliminanda e fit

$$1 = \frac{(g+\gamma)^2}{4ff} - \frac{(g-\gamma)^2}{4(1+ff)}, \quad \text{seu} \quad 4ff(1+ff) = (g+\gamma)^2 + 4ffg\gamma.$$

Fit ergo $\quad \gamma = -g(1+2ff) + 2f\sqrt{(1+ff)(1+gg)}.$

12. **Coroll. 2.** Dato ergo arcu quocunque fg, existente $AF = f$ et $AG = g$, a puncto f retrorsum arcus $f\gamma$ abscindi potest, ita ut arcuum fg et $f\gamma$ differentia fiat geometrica. Capiatur scilicet $AT = \gamma = -g(1+2ff) + 2f\sqrt{(1+ff)(1+gg)}$ eritque

$$\text{Arc}.\,fg - \text{Arc}.\,f\gamma = 2f(g\sqrt{(1+ff)} - f\sqrt{(1+gg)})^2\sqrt{(1+ff)}.$$

Horum ergo arcuum differentia evanescere nequit, nisi sit vel $f = 0$, quo casu fit $\gamma = -g$, vel $g = f$, quo casu uterque arcus fg et $f\gamma$ evanescit.

13. **Coroll. 3.** Ut igitur positis $AE = e$, $AF = f$, $AG = g$, differentia arcuum fg et Ae fiat geometrice assignabilis scilicet $\text{Arc}.\,fg - \text{Arc}.\,Ae = efg$, oportet sit

$$g = f\sqrt{(1+ee)} + e\sqrt{(1+ff)},$$

seu ex trium quantitatum e, f, g binis datis tertia ita determinatur, ut sit

$$\text{vel} \quad g = f\sqrt{(1+ee)} + e\sqrt{(1+ff)},$$
$$\text{vel} \quad f = g\sqrt{(1+ee)} - e\sqrt{(1+gg)},$$
$$\text{vel} \quad e = g\sqrt{(1+ff)} - f\sqrt{(1+gg)}.$$

14. **Coroll. 4.** Cum sit $g = f\sqrt{(1+ee)} + e\sqrt{(1+ff)}$, erit

$$\sqrt{(1+gg)} = ef + \sqrt{(1+ee)(1+ff)},$$

unde colligitur $\quad g + \sqrt{(1+gg)} = (e + \sqrt{(1+ee)})(f + \sqrt{(1+ff)}).$

Ergo ut arcus fg superet arcum Ae quantitate algebraica efg, oportet ut sit

$$\frac{g + \sqrt{(1+gg)}}{f + \sqrt{(1+ff)}} = e + \sqrt{(1+ee)}.$$

15. **Coroll. 5.** Haec ultima formula ideo est notatu digna, quod in ea quantitatum e, f et g functiones sint a se invicem separatae. Quod si ergo ponatur

$$e + \sqrt{(1 + ee)} = E, \quad f + \sqrt{(1 + ff)} = F, \quad g + \sqrt{(1 + gg)} = G,$$

erit $$e = \frac{EE - 1}{2E}, \qquad f = \frac{FF - 1}{2F}, \qquad g = \frac{GG - 1}{2G}.$$

Quare si capiatur $\frac{G}{F} = E$, erit arcuum differentia

$$\text{Arc}\,.\,fg - \text{Arc}\,.\,Ae = efg = \frac{(EE-1)(FF-1)(GG-1)}{8EFG},$$

seu $$\text{Arc}\,.\,fg - \text{Arc}\,.\,Ae = \frac{(FF-1)(GG-1)(GG-FF)}{8FFGG} = \frac{fg(GG-FF)}{2FG}.$$

16. **Problema 2.** Dato arcu parabolae quocunque fg, a puncto parabolae dato p alium abscindere arcum pq ita, ut differentia horum duorum arcuum fg et pq fiat geometrice assignabilis.

Solutio. Pro arcu dato fg ponantur abscissae $AF = f$, $AG = g$; pro arcu autem quaesito pq sint abscissae $AP = p$, $AQ = q$. Jam a vertice parabolae concipiatur arcus Ae respondens abscissae $AE = e$, cujus defectus ab utroque illorum arcuum sit geometrice assignabilis. Ad hoc autem vidimus (14) requiri, ut sit

$$\frac{g + \sqrt{(1 + gg)}}{f + \sqrt{(1 + ff)}} = e + \sqrt{(1 + ee)} \quad \text{et} \quad \frac{q + \sqrt{(1 + qq)}}{p + \sqrt{(1 + pp)}} = e + \sqrt{(1 + ee)}.$$

Ponamus brevitatis gratia

$$f + \sqrt{(1 + ff)} = F \qquad p + \sqrt{(1 + pp)} = P$$
$$g + \sqrt{(1 + gg)} = G \qquad q + \sqrt{(1 + qq)} = Q$$

atque ut problemati satisfiat, necesse est sit $\frac{G}{F} = \frac{Q}{P}$. Porro autem cum sit ex (15)

$$\text{Arc}\,.\,fg - \text{Arc}\,.\,Ae = \frac{fg(GG-FF)}{2FG} \quad \text{similiterque} \quad \text{Arc}\,.\,pq - \text{Arc}\,.\,Ae = \frac{pq(QQ-PP)}{2PQ},$$

erit arcuum determinatorum differentia

$$\text{Arc}\,.\,pq - \text{Arc}\,.\,fg = \frac{pq(QQ-PP)}{2PQ} - \frac{fg(GG-FF)}{2FG}$$

ideoque geometrice assignabilis. Q. E. I.

17. **Coroll. 1.** Cum autem sit $\frac{G}{F} = \frac{Q}{P}$, erit $\frac{QQ-PP}{2PQ} = \frac{GG-FF}{2FG}$, unde differentia arcuum determinatorum prodit

$$\text{Arc}\,.\,pq - \text{Arc}\,.\,fg = \frac{(pq-fg)(GG-FF)}{2FG}.$$

Est autem $f = \frac{FF-1}{2F}$, $g = \frac{GG-1}{2G}$, $p = \frac{PP-1}{2P}$, $q = \frac{QQ-1}{2Q}$, ideoque ob $Q = \frac{GP}{F}$, erit

$$q = \frac{GGPP - FF}{2FGP}.$$

18. **Coroll. 2.** Erit ergo

$$pq = \frac{(PP-1)(GGPP-FF)}{4FGPP} \quad \text{et} \quad fg = \frac{(FF-1)(GG-1)}{4FG} \qquad \text{ideoque}$$

$$pq - fg = \frac{(PP - FF)(GGPP - 1)}{4FGPP}.$$

Hinc arcuum differentia prodit

$$\text{Arc}.pq - \text{Arc}.fg = \frac{(GG - FF)(PP - FF)(GGPP - 1)}{8FFGGPP}.$$

19. **Coroll. 3.** Ut igitur arcus pq arcui fg adeo fiat aequalis, esse oportet vel $GG - FF = 0$, vel $PP - FF = 0$, vel $GGPP - 1 = 0$. Primo autem casu arcus fg ideoque et pq evanescit; altero casu punctum p in f, ideoque et q in g cadit, arcusque ergo pq non prodit diversus ab arcu fg; tertius autem casus dat $P = \frac{1}{G}$, seu $p + \sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{g + \sqrt{(1 + gg)}} = \sqrt{(1 + gg)} - g$, unde fit $p = -g$ et $q = -f$, ita ut pq in alterum ramum parabolae cadat, arcuique fg similis et aequalis prodeat.

20. **Coroll. 4.** Hinc ergo sequitur, in parabola non exhiberi posse duos arcus dissimiles, qui sint inter se aequales. Interim proposito quocunque arcu fg, infinitis modis alius abscindi potest pq, qui illum quantitate algebraica superet, vel ab eo deficiat. Superabit scilicet, si fuerit $P > F$, seu $AP > AF$; deficiet autem, si $P < F$, seu $AP < AF$.

21. **Problema 3.** Dato parabolae arcu quocunque fg, a dato puncto p alium arcum abscindere pr, qui duplum arcus fg superet quantitate geometrice assignabili.

Solutio. Positis ut ante abscissis $AF = f$, $AG = g$, $AP = p$, $AQ = q$, sit $AR = r$ denotentque litterae majusculae F, G, P, Q, R istas functiones $f + \sqrt{(1 + ff)}$, $g + \sqrt{(1 + gg)}$ etc. minuscularum cognominum. Primum igitur si statuatur $\frac{Q}{P} = \frac{G}{F}$, erit

$$\text{Arc}.pq - \text{Arc}.fg = \frac{(pq - fg)(GG - FF)}{2FG}.$$

Simili autem modo si statuatur $\frac{R}{Q} = \frac{G}{F}$, erit

$$\text{Arc}.qr - \text{Arc}.fg = \frac{(qr - fg)(GG - FF)}{2FG}.$$

Addantur ergo invicem hae duae aequationes, erit

$$\text{Arc}.pr - 2\,\text{Arc}.fg = \frac{(pq + qr - 2fg)(GG - FF)}{2FG}.$$

Ut jam ex calculo eliminentur litterae q et Q, erit primo $\frac{R}{P} = \frac{GG}{FF}$; tum vero est $q = \frac{GGPP - FF}{2FGP}$, seu $q = \frac{F(PR - 1)}{2GP}$, et ob $p = \frac{PP - 1}{2P}$ et $r = \frac{G^4P^2 - F^4}{2F^2G^2P}$, erit

$$p + r = \frac{(FF + GG)(GGPP \quad FF)}{2FFGGP},$$

ideoque $$pq + qr = \frac{(FF + GG)(GGPP - FF)^2}{4F^3G^3PP} \quad \text{et} \quad 2fg = \frac{2(FF - 1)(GG - 1)}{4FG}.$$

Sumto ergo $\frac{R}{P} = \frac{GG}{FF}$, arcus pr superabit duplum arcus fg quantitate algebraica. Q. E. I.

22. **Coroll. 1.** Punctum igitur p ita assumi poterit, ut excessus arcus pr supra duplum arcum $2fg$ sit datae magnitudinis; definietur enim P per aequationem algebraicam, ope extractionis radicis quadratae tantum.

23. **Coroll. 2.** Fieri igitur poterit, ut arcus pr praecise sit duplus arcus dati fg, quod evenit si P definiatur ex hac aequatione

$$(GGPP - FF)^2 = \frac{2(FF-1)(GG-1)FFGGPP}{FF+GG}$$

unde elicitur
$$\frac{GGPP}{FF} = \frac{FFGG+1+\sqrt{(F^4-1)(G^4-1)}}{FF+GG}$$

et
$$\frac{GP}{F} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(FF+1)(GG+1)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(FF-1)(GG-1)}}{\sqrt{(FF+GG)}} = \frac{FR}{G}.$$

24. **Coroll. 3.** Haec autem determinatio arcus dupli pr maxime fit obvia, si arcus datus fg in vertice A incipiat; tum enim ob $F=1$ fit $GP=F$, seu $P=\frac{1}{G}=\sqrt{(1+gg)}-g$. Obtinetur ergo $p=-g$ et $R=G$, ideoque $r=g$. Hoc scilicet casu arcus pr in parabola circa verticem A utrinque aequaliter extendetur, sicque manifesto fit duplus arcus propositi.

25. **Coroll. 4.** Fieri quoque potest, ut arcus pr in ipso puncto g terminetur, sicque ambo arcus, simplus fg et duplus pr, evadant contigui. Hoc nempe evenit si $P=G$, quo casu haec habetur aequatio

$$F^6 + F^4G^2 - 2F^4G^6 + F^2G^8 - 2F^2G^4 + G^{10} = 0,$$

quae per $FF-GG$ divisa praebet

$$F^4 - 2FFG^6 + 2FFGG - G^8 = 0.$$

unde elicitur

$$FF = GG(G^4-1) + GG\sqrt{(G^8-G^4+1)} \quad \text{ideoque} \quad F = G\sqrt{(G^4-1+\sqrt{(G^8-G^4+1)})}$$

$$\text{et} \quad R = \frac{G^3}{FF} \quad \text{seu} \quad R = \frac{\sqrt{(G^8-G^4+1)} - G^4 + 1}{G^3}.$$

26. **Coroll. 5.** Quantitas ergo G, seu parabolae punctum g pro lubitu assumi licet, in quo duo arcus terminabuntur, quorum alter alterius exacte erit duplus. Cum autem sumto g affirmativo, ideoque $G>1$, prodeat $F>G$, punctum f a vertice magis erit remotum quam punctum g; tum vero reperitur

$$r = \frac{RR-1}{2R} = \frac{-(GG-1)\sqrt{(G^8-G^4+1)} - G^6 - G^4 + GG + 1}{2G^3},$$

cujus valor cum sit negativus, punctum r in alterum parabolae ramum incidit. Arcus ergo ita erunt
* disponiti, ut habet figura 56, eritque

$$\text{Arcus } gr = 2\,\text{Arc}.fg.$$

27. **Coroll. 6.** Sit g valde parvum, erit $G = 1 + g + \frac{1}{2}gg$, hincque $G^2 = 1 + 2g + 2gg$, $G^3 = 1 + 3g + \frac{9}{2}gg$, $G^4 = 1 + 4g + 8gg$ et $G^8 = 1 + 8g + 32gg$, unde

$$F = (1 + g + \tfrac{1}{2}gg)(1 + 3g + \tfrac{9}{2}gg) = 1 + 4g + 8gg,$$

* ergo $f = \frac{FF-1}{2F} = 4g$; porro $R = 1 - 5g + \frac{25}{2}gg$, unde $r = -5g$. Quare (Fig. 56) si $Ag = g$ valde parvum, erit proxime $AF = 4AG$ et $AR = 5AG$, ita ut sit quoque $GR = 2GF$.

28. Scholion. Antequam ad ulteriorem arcuum parabolicorum multiplicationem progrediamur, etiamsi ea ex formulis datis non difficulter erui queat, tamen expediet differentiam algebraicam arcuum parabolicorum commodius exprimere. Cum igitur (Fig. 55) positis abscissis $AE=e$, $AF=f$, $AG=g$ invenerimus (13) $\text{Arc}.Ag-\text{Arc}.Af-\text{Arc}.Ae=efg$, existente $e=g\sqrt{(1+ff)}-f\sqrt{(1+gg)}$, videndum est, num quantitas efg non possit transformari in terna membra, quae sint singula functiones certae ipsarum e, f et g, ita ut sit $efg=\text{funct}.g-\text{funct}.f-\text{funct}.e$; sic enim quaelibet harum functionum cum arcu cognomine comparari posset. Cum autem sit

$$efg=fgg\sqrt{(1+ff)}-ffg\sqrt{(1+gg)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1+ee)}=\sqrt{(1+ff)(1+gg)}-fg,$$

erit
$$e\sqrt{(1+ee)}=g\sqrt{(1+gg)}+2ffg\sqrt{(1+gg)}-f\sqrt{(1+ff)}-2fgg\sqrt{(1+ff)}, \quad \text{hincque}$$

$$fgg\sqrt{(1+ff)}-ffg\sqrt{(1+gg)}=efg=\tfrac{1}{2}g\sqrt{(1+gg)}-\tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)}-\tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)},$$

quae est expressio talis qualis desideratur. Quare si istas abscissarum e, f, g functiones brevitatis gratia ponamus $\tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}=\mathfrak{E}$, $\tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)}=\mathfrak{F}$ et $\tfrac{1}{2}g\sqrt{(1+gg)}=\mathfrak{G}$, habebimus

$$\text{Arc}.Ag-\text{Arc}.Af-\text{Arc}.Ae=\mathfrak{G}-\mathfrak{F}-\mathfrak{E}=\text{Arc}.fg-\text{Arc}.Ae.$$

Si porro hae functiones cum illis, quibus ante usi sumus, comparemus, scilicet

$$e+\sqrt{(1+ee)}=E, \quad f+\sqrt{(1+ff)}=F, \quad g+\sqrt{(1+gg)}=G,$$

erit
$$\mathfrak{E}=\frac{E^4-1}{8EE}, \qquad \mathfrak{F}=\frac{F^4-1}{8FF}, \qquad \mathfrak{G}=\frac{G^4-1}{8GG}$$

et ex natura horum arcuum est $\frac{G}{F}=E$. Si jam simili modo pro arcu pq procedamus, et ex abscissis $AP=p$ et $AQ=q$ has formemus functiones

$$p+\sqrt{(1+pp)}=P \qquad \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}=\mathfrak{P}$$
$$q+\sqrt{(1+qq)}=Q \qquad \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)}=\mathfrak{Q},$$

erit simili modo $\text{Arc}.pq-\text{Arc}.Ae=\mathfrak{Q}-\mathfrak{P}-\mathfrak{E}$, existente $\frac{Q}{P}=E$. Hinc si illa aequatio ab hac subtrahatur, remanebit $\text{Arc}.pq-\text{Arc}.fg=(\mathfrak{Q}-\mathfrak{P})-(\mathfrak{G}-\mathfrak{F})$, si modo fuerit $\frac{Q}{P}=\frac{G}{F}$.

29. Problema 4. Dato arcu parabolae quocunque fg, abscindere arcum alium pz, qui ad arcum fg sit in data ratione $n:1$.

Solutio. Positis abscissis $AF=f$, $AG=g$, capiantur plures abscissae $AP=p$, $AQ=q$, $AR=r$, $AS=s$ etc. ultima $AZ=z$, ex quibus formentur geminae functiones, litteris majusculis cum latinis tum germanicis cognominibus denotandae, scilicet

$$f+\sqrt{(1+ff)}=F, \quad g+\sqrt{(1+gg)}=G, \quad p+\sqrt{(1+pp)}=P \text{ etc.}$$
$$\tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)}=\mathfrak{F}, \quad \tfrac{1}{2}g\sqrt{(1+gg)}=\mathfrak{G}, \quad \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}=\mathfrak{P} \text{ etc.}$$

sitque primo $\frac{Q}{P}=\frac{G}{F}$, erit

$$\text{Arc}.pq-\text{Arc}.fg=(\mathfrak{Q}-\mathfrak{P})-(\mathfrak{G}-\mathfrak{F}).$$

Deinde sit $\frac{R}{Q} = \frac{G}{F}$, seu $\frac{R}{P} = \frac{G^2}{F^2}$, erit

$$\mathrm{Arc}.\,qr - \mathrm{Arc}.\,fg = (\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}) - (\mathfrak{G} - \mathfrak{F})$$

qua aequatione ad priorem addita fit

$$\mathrm{Arc}.\,pr - 2\,\mathrm{Arc}.\,fg = (\mathfrak{R} - \mathfrak{P}) - 2(\mathfrak{G} - \mathfrak{F}).$$

Sit porro $\frac{S}{R} = \frac{G}{F}$, seu $\frac{S}{P} = \frac{G^3}{F^3}$, erit

$$\mathrm{Arc}.\,rs - \mathrm{Arc}\,fg = (\mathfrak{S} - \mathfrak{R}) - (\mathfrak{G} - \mathfrak{F}),$$

qua iterum ad praecedentem adjecta obtinebitur

$$\mathrm{Arc}.\,ps - 3\,\mathrm{Arc}.\,fg = (\mathfrak{S} - \mathfrak{P}) - 3(\mathfrak{G} - \mathfrak{F}).$$

Simili modo si ulterius pauatur $\frac{T}{S} = \frac{G}{F}$, seu $\frac{T}{P} = \frac{G^4}{F^4}$, erit

$$\mathrm{Arc}.\,pt - 4\,\mathrm{Arc}.\,fg = (\mathfrak{T} - \mathfrak{P}) - 4(\mathfrak{G} + \mathfrak{F}).$$

Unde perspicitur, si z sit ultimum punctum arcus pz qui quaeritur, et posita $AZ = z$ fit

$$Z = z + \sqrt{(1 + zz)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2} z \sqrt{(1 + zz)},$$

poni debere $\frac{Z}{P} = \frac{G^n}{F^n}$, tumque fore

$$\mathrm{Arc}.\,pz - n\,\mathrm{Arc}.\,fg = (\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}) - n(\mathfrak{G} - \mathfrak{F}).$$

Nunc ut sit $\mathrm{Arc}.\,pz = n\,\mathrm{Arc}.\,fg$, reddi oportet $\mathfrak{Z} - \mathfrak{P} = n(\mathfrak{G} - \mathfrak{F})$. At est

$$\mathfrak{Z} = \frac{Z^4 - 1}{8ZZ}, \quad \mathfrak{P} = \frac{P^4 - 1}{8PP}, \quad \mathfrak{G} = \frac{G^4 - 1}{8GG} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = \frac{F^4 - 1}{8FF}.$$

Verum ob $Z = \frac{G^n P}{F^n}$, erit $\mathfrak{Z} = \frac{G^{4n} P^4 - F^{4n}}{8 F^{2n} G^{2n} PP}$. Quibus valoribus substitutis sequens acquiretur aequatio resolvenda

$$\frac{G^{4n} P^4 - F^{4n}}{F^{2n} G^{2n} PP} = \frac{P^4 - 1}{PP} + \frac{n(GG - FF)(1 + FFGG)}{FFGG},$$

sive $$0 = G^{2n}(G^{2n} - F^{2n}) P^4 + F^{2n}(G^{2n} - F^{2n}) - n F^{2n-2} G^{2n-2} (G^2 - F^2)(F^2 G^2 + 1) PP,$$

seu $$P^4 = \frac{+ n F^{2n} (G^2 - F^2)(F^2 G^2 + 1) P^2}{F^2 G^2 (G^{2n} - F^{2n})} - \frac{F^{2n}}{G^{2n}}.$$

Quocunque ergo assumto multiplicationis indice n, sive numero integro, sive fracto, ex hac aequatione semper definiri potest P, unde arcus quaesiti pz alter terminus p innotescit. Quo invento pro altero termino z erit $Z = \frac{G^n P}{F^n}$, sicque obtinebitur arcus pz, ut sit $pz = n\,.\,fg$. Q. E. I.

30. **Coroll. 1.** Si loco P quaerere velimus Z, in ultima aequatione substitui oportet $\frac{F^n Z}{G^n}$ prodibitque

$$Z^4 = \frac{n G^{2n} (G^2 - F^2)(F^2 G^2 + 1) ZZ}{F^2 G^2 (G^{2n} - F^{2n})} - \frac{G^{2n}}{F^{2n}},$$

ubi litterae F et G pariter uti P et Z sunt inter se commutatae.

31. **Coroll. 2.** Cum $G^{2n} - F^{2n}$ dividi queat per $G^2 - F^2$, pro variis valoribus ipsius n, formulae inventae ita se habebunt

$$\text{si } n=1, \qquad P^4 = \frac{(F^2G^2+1)P^2}{G^2} - \frac{F^2}{G^2} \qquad \text{et} \quad Z = \frac{GP}{F},$$

$$\text{si } n=2, \qquad P^4 = \frac{2F^2(F^2G^2+1)P^2}{G^2(G^2+F^2)} - \frac{F^4}{G^4} \qquad \text{et} \quad Z = \frac{G^2P}{F^2},$$

$$\text{si } n=3, \qquad P^4 = \frac{3F^4(F^2G^2+1)P^2}{G^2(G^4+F^2G^2+F^4)} - \frac{F^6}{G^6} \qquad \text{et} \quad Z = \frac{G^3P}{F^3},$$

$$\text{si } n=4, \qquad P^4 = \frac{4F^6(F^2G^2+1)P^2}{G^2(G^6+F^2G^4+F^4G^2+F^6)} - \frac{F^8}{G^8} \qquad \text{et} \quad Z = \frac{G^4P}{F^4},$$

etc. etc.

32. **Coroll. 3.** Ex solutione ceterum apparet pari modo pro arcu dato quocunque fg inveniri posse alium pz, qui illum arcum n vicibus sumtum data quantitate superet, vel ab eo deficiat; ut enim sit $\text{Arc}.pz - n\,\text{Arc}.fg = D$, resolvi oportebit hanc aequationem $\mathfrak{Z} - \mathfrak{P} = n(\mathfrak{G} - \mathfrak{F}) + D$, quae non habet plus difficultatis, quam si esset $D = 0$.

33. **Scholion.** Haec quidem, quae de circulo et parabola hic protuli, jam dudum satis sunt cognita, et quia utriusque rectificatio quasi in potestate est, (quae enim vel a quadratura circuli vel a logarithmis pendent, in ordinem quantitatum algebraicarum propemodum recipiuntur) nulli omnino difficultati sunt subjecta: ea tamen nihilominus aliquanto uberius hic exponere visum est, quod ex methodo prorsus singulari consequuntur. Quod autem imprimis notatu dignum est, haec methodus ad comparationem aliarum quoque curvarum manuducit, quarum rectificatio per calculum solitum nullo modo expediri potest; ita ut ex eodem quasi fonte plurimae eximiae affectiones tam cognitae quam incognitae hauriri queant, ex quo Analysi non contemnenda incrementa accedere censeri debebunt.

Sectio secunda

continens evolutionem hujus aequationis:

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy.$$

I.

Extrahatur ex hac aequatione sigillatim radix utriusque quantitatis variabilis x et y, ac reperietur

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx))}}{\gamma + \zeta xx}$$

$$x = \frac{-\delta y - \sqrt{(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))}}{\gamma + \zeta yy}$$

Ponatur brevitatis gratia $-\alpha\gamma = Ap$, $\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta = Cp$ et $-\gamma\zeta = Ep$, eritque

$$\gamma y + \delta x + \zeta xxy = \sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}\,p$$

$$\gamma x + \delta y + \zeta xyy = -\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}\,p.$$

II.

Si igitur coëfficientes A, C, E fuerint dati, ex iis litterarum graecarum valores facile definiuntur. Erit enim

$$\alpha = \frac{-Ap}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{-Ep}{\gamma} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{(\gamma\gamma + Cp + \frac{AEpp}{\gamma\gamma})}.$$

Valores ergo γ et p arbitrio nostro relinquuntur, atque alterum quidem sine ulla restrictione ad lubitum determinare licet. Ponatur ergo $\gamma\gamma = A$ et $p = cc$, fietque

$$\alpha = -cc\sqrt{A},\quad \gamma = \sqrt{A},\quad \delta = \sqrt{(A + Ccc + Ec^4)} \text{ et } \zeta = \frac{-Ecc}{\sqrt{A}}$$

et aequatio canonica hanc induet formam

$$0 = -Acc + A(xx + yy) + 2xy\sqrt{(A + Ccc + Ec^4)A} - Eccxxyy.$$

III.

Antequam autem his litteris majusculis utamur, differentiemus ipsam aequationem propositam

$$dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) = 0,$$

quae abit in hanc $\dfrac{dx}{\gamma y + \delta x + \zeta xxy} = \dfrac{-dy}{\gamma x + \delta y + \zeta xyy}.$

Substituendo ergo loco horum denominatorum valores surdes primo inventos, habebimus per $\sqrt{p}$ multiplicando

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}.$$

IV.

Proposita ergo hac aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}},$$

ejus aequatio integralis erit

$$0 = -Acc + A(xx + yy) + 2xy\sqrt{(A + Ccc + Ec^4)A} - Eccxxyy,$$

quae cum constantem novam c ab arbitrio nostro pendentem involvat, erit adeo integralis completa. Inde autem oritur

$$y = \frac{-x\sqrt{(A + Ccc + Ec^4)A} \pm c\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)A}}{A - Eccxx},$$

ubi quidem signa radicalium pro lubitu mutare licet.

V.

Cum igitur posita nostra aequatione canonica sit

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} - \int\frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = \text{Const.}$$

ponamus ad alias integrationes eruendas

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} - \int\frac{yydy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = V,$$

erit ergo loco radicalium valores praecedentes restituendo

$$\frac{xxdx}{\gamma y + \delta x + \zeta xxy} + \frac{yydy}{\gamma x + \delta y + \zeta xyy} = \frac{dV}{\sqrt{p}}$$

hincque porro

$$xxdx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + yydy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) =$$
$$\frac{dV}{\sqrt{p}}(\gamma\delta(xx + yy) + (\gamma\gamma + \delta\delta)xy + \zeta\zeta x^3y^3 + \gamma\zeta xy(xx + yy) + 2\delta\zeta xxyy).$$

VI.

Ponamus ad hanc aequationem concinniorem reddendam $xx + yy = tt$ et $xy = u$, ut sit

$$0 = \alpha + \gamma tt + 2\delta u + \zeta uu,$$

et aequatio nostra differentialis erit

$$\gamma(x^3 dx + y^3 dy) + \delta u(x dx + y dy) + \zeta uu(x dx + y dy) = \frac{dV}{\sqrt{p}}(\gamma\delta tt + (\gamma\gamma + \delta\delta)u + \gamma\zeta ttu + 2\delta\zeta uu + \zeta\zeta u^3).$$

At est $x dx + y dy = t dt$, et ob $x^4 + y^4 = t^4 - 2uu$, erit $x^3 dx + y^3 dy = t^3 dt - u du$. Porro aequatio canonica differentiata dat

$$\gamma t dt + \delta du + \zeta u du = 0, \quad \text{ideoque} \quad t dt = \frac{-\delta du - \zeta u du}{\gamma},$$

unde fit $\quad x dx + y dy = -\frac{\delta}{\gamma} du - \frac{\zeta}{\gamma} u du \quad$ et $\quad x^3 dx + y^3 dy = -\frac{\delta}{\gamma} tt du - \frac{\zeta}{\gamma} ttu du - u du.$

VII.

His igitur valoribus substitutis obtinebimus

$$du\left(-\delta tt - \zeta ttu - \gamma u - \frac{\delta\delta}{\gamma} u - \frac{2\delta\zeta}{\gamma} uu - \frac{\zeta\zeta}{\gamma} u^3\right) = \frac{dV}{\sqrt{p}}(\gamma\delta tt + (\gamma\gamma + \delta\delta)u + \zeta ttu + 2\delta\zeta uu + \zeta\zeta u^3),$$

quae sponte abit in $\frac{-du}{\gamma} = \frac{dV}{\sqrt{p}}$, ita ut sit $V = \frac{-u\sqrt{p}}{\gamma}$, seu $V = \frac{-xy\sqrt{p}}{\gamma}$. Facto ergo $p = cc$, erit

$$\int\frac{xx dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} - \int\frac{yy dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = \text{Const.} - \frac{cxy}{\sqrt{A}}$$

siquidem fuerit $0 = -Acc + A(xx + yy) + 2xy\sqrt{(A + Ccc + Ec^4)A} - Eccxxyy$; seu

$$y = \frac{c\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)A} - x\sqrt{(A + Ccc + Ec^4)A}}{A - Eccxx}.$$

VIII.

Quo nunc rem generalius complectamur, ponamus

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} - \int\frac{y^n dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = V,$$

erit

$$x^n dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + y^n dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) = \frac{dV}{\sqrt{p}}(\gamma\delta tt + (\gamma\gamma + \delta\delta)u + \gamma\zeta ttu + 2\delta\zeta uu + \zeta\zeta u^3),$$

posito ut ante $xx + yy = tt$ et $xy = u$. Erit ergo $xx - yy = \sqrt{(t^4 - 4uu)}$, unde

$$x = \sqrt{\frac{tt + \sqrt{(t^4 - 4uu)}}{2}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{tt - \sqrt{(t^4 - 4uu)}}{2}},$$

seu $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{(tt + 2u)} + \frac{1}{2}\sqrt{(tt - 2u)} \quad$ et $\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{(tt + 2u)} - \frac{1}{2}\sqrt{(tt - 2u)}.$

Quare differentiando habebitur

$$dx = \frac{tdt + du}{2\sqrt{(tt + 2u)}} + \frac{tdt - du}{2\sqrt{(tt - 2u)}} = \frac{du(\gamma - \delta - \zeta u)}{2\gamma\sqrt{(tt + 2u)}} - \frac{du(\gamma + \delta + \zeta u)}{2\gamma\sqrt{(tt - 2u)}}.$$

IX.

Porro vero est $\gamma x + \delta y + \zeta xyy = (\frac{1}{2}(\gamma + \delta) + \frac{1}{2}\zeta u)\sqrt{(tt + 2u)} + (\frac{1}{2}(\gamma - \delta) - \frac{1}{2}\zeta u)\sqrt{tt - 2u}$, unde colligitur $dx\,(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) =$

$$\frac{du}{4\gamma}(\gamma + \delta + \zeta u)(\gamma - \delta - \zeta u) + \frac{du}{4\gamma}(\gamma - \delta - \zeta u)(\gamma - \delta - \zeta u)\sqrt{\frac{tt - 2u}{tt + 2u}}$$

$$- \frac{du}{4\gamma}(\gamma - \delta - \zeta u)(\gamma + \delta + \zeta u) - \frac{du}{4\gamma}(\gamma + \delta + \zeta u)(\gamma + \delta + \zeta u)\sqrt{\frac{tt + 2u}{tt - 2u}},$$

seu $$dx\,(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) = \frac{-du}{\gamma\sqrt{(t^4 - 4uu)}}(\gamma\delta tt + \gamma\zeta u + (\gamma\gamma + \delta\delta)u + 2\delta\zeta uu + \zeta\zeta u^3),$$

et quia $dy\,(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) = -dx\,(\gamma x + \delta y + \zeta xyy)$, erit

$$\frac{dV}{\sqrt{p}} = \frac{-du\,(x^n - y^n)}{\gamma\sqrt{(t^4 - 4uu)}} \quad \text{et} \quad V = \frac{-\sqrt{p}}{\gamma}\int\frac{(x^n - y^n)\,du}{\sqrt{(t^4 - 4uu)}}.$$

X.

Ut haec formula evadat integrabilis, oportet pro n scribi numerum parem, ut etiam usus hujus formae plerumque exigit. Quare

si $n = 0$, erit $x^0 - y^0 = 0$ . . . . $V = \text{Const.}$

$n = 2$ $x^2 - y^2 = \sqrt{(t^4 - 4uu)}$ . . . . $V = \frac{-u\sqrt{p}}{\gamma}$

$n = 4$ $x^4 - y^4 = tt\sqrt{(t^4 - 4uu)}$ . . . . $V = \frac{-\sqrt{p}}{\gamma}\int tt\,du$

$n = 6$ $x^6 - y^6 = (t^4 - uu)\sqrt{(t^4 - 4uu)}$ . . . . $V = \frac{-\sqrt{p}}{\gamma}\int(t^4 - uu)\,du$

$n = 8$ $x^8 - y^8 = (t^6 - 2ttuu)\sqrt{(t^4 - 4uu)}$ . . . . $V = \frac{-\sqrt{p}}{\gamma}\int(t^6 - 2ttuu)\,du$

etc. etc.

XI.

Cum vero sit $tt = \frac{-\alpha - 2\delta u - \zeta uu}{\gamma}$, erit

$$\int tt\,du = \frac{-\alpha u}{\gamma} - \frac{\delta uu}{\gamma} - \frac{\zeta u^3}{3\gamma}$$

$$\int(t^4 - uu)\,du = \frac{\alpha\alpha}{\gamma\gamma}u + \frac{2\alpha\delta}{\gamma\gamma}uu + \frac{(4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)}{3\gamma\gamma}u^3 + \frac{\delta\zeta}{\gamma\gamma}u^4 + \frac{\zeta\zeta}{5\gamma\gamma}u^5.$$

Ex his introductis litteris majusculis A, C, E una cum constanti arbitraria c, aequatio in fine art. VII data satisfaciet huic aequationi integrali

$$\int\frac{dx\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}xx + \mathfrak{E}x^4)}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} - \int\frac{dy\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}yy + \mathfrak{E}y^4)}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = \text{Const.} - \frac{\mathfrak{C}cxy}{\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{E}cxy}{\sqrt{A}}\left(cc - xy\sqrt{\frac{A + Ccc + Ec^4}{A}} + \frac{Eccxxyy}{3A}\right).$$

Unde sequentes curvarum comparationes adipiscimur.

Comparatio arcuum Ellipsis.

1. Expressio simplicissima ad hoc genus pertinens est utique curva lemniscata, sed quia comparationem arcuum ejus jam satis prolixe sum persecutus, hic statim ab ellipsi incipiam. Sit igitur

(Fig. 57) ACB quadrans ellipticus, cujus alter semiaxis $CA = 1$, alter $CB = k$. Eritque posita abscissa quacunque $CP = z$, arcus ei respondens $Bp = \int dz \sqrt{\frac{1-(1-kk)zz}{1-zz}}$. Sit brevitatis gratia $1 - kk = n$, ita ut $\sqrt{n}$ denotet distantiam foci a centro C, hincque fiet $\text{Arc}.\,Bp = \int \frac{dz\sqrt{(1-nzz)}}{\sqrt{(1-zz)}}$.

2. Reddatur formulae hujus numerator rationalis, ut prodeat

$$\text{Arc}.\,Bp = \int \frac{dz\,(1-nzz)}{\sqrt{(1-(n+1)zz+nz^4)}},$$

ad quam formam ut formulae superiores reducantur, poni oportet $A = 1$, $C = -n-1$, $E = n$, $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{C} = -n$, $\mathfrak{E} = 0$; quo facto habebimus pro differentia duorum arcuum ellipticorum

$$\int dx \sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} - \int dy \sqrt{\frac{1-nyy}{1-yy}} = \text{Const.} + ncxy$$

siquidem abscissa y ex abscissa x ita determinetur, ut sit

$$y = \frac{c\sqrt{(1-xx)(1-nxx)} - x\sqrt{(1-cc)(1-ncc)}}{1-nccxx},$$

$$\text{sive} \qquad 0 = -cc + xx + yy + 2xy\sqrt{(1-cc)(1-ncc)} - nccxxyy.$$

3. Denotet $\Pi.z$ arcum ellipsis abscissae z respondentem, ac nostra aequatio inventa hanc induet formam

$$\Pi.x - \Pi.y = \text{Const.} + ncxy,$$

posito autem $x = 0$, fit $y = c$, unde $\text{Const.} = -\Pi.c$. Ergo

$$\Pi.c + \Pi.x - \Pi.y = ncxy.$$

Sin autem sumto $\sqrt{(1-cc)(1-ncc)}$ negativo, ut sit

$$y = \frac{c\sqrt{(1-xx)(1-nxx)} + x\sqrt{(1-cc)(1-ncc)}}{1-nccxx}$$

fiet $\Pi.y - \Pi.c - \Pi.x = -ncxy$, sive $\Pi.c - (\Pi.y - \Pi.x) = ncxy$, ut ante.

4. Ternae autem quantitates c, x, y ita a se invicem pendent, ut habita signorum ratione inter se permutari possint; si enim ad abbreviandum ponatur

$$\sqrt{(1-cc)(1-ncc)} = C, \quad \sqrt{(1-xx)(1-nxx)} = X, \quad \sqrt{(1-yy)(1-nyy)} = Y,$$

erit

$$y = \frac{cX + xC}{1-nccxx}, \quad x = \frac{yC - cY}{1-nccyy}, \quad c = \frac{yX - xY}{1-nxxyy},$$

ex quibus per combinationem eliciuntur sequentes formulae

$$\begin{aligned} yy - xx &= c\,(yX + xY) & \qquad xX + yY &= (nccxy + C)(yX + xY), \\ yy - cc &= x\,(yC + cY) & \qquad cC - xX &= (ncxyy - Y)(xC - cX), \\ xx - cc &= y\,(xC + cX) & \qquad cC + yY &= (ncxxy + X)(yC + cY) \end{aligned}$$

ac denique

$$\begin{aligned} 2xyC &= xx + yy - cc - nccxxyy \\ 2cyX &= cc + yy - xx - nccxxyy \\ -2cxY &= cc + xx - yy - nccxxyy. \end{aligned}$$

5. **Problema 1.** Dato arcu elliptico Be in vertice B terminato, abscindere a quovis puncto dato f alium arcum fg, ut eorum differentia $fg - Be$ geometrice assignari queat.

Solutio. Sint abscissae datae $CE = e$, $CF = f$ et quaesita $Cg = g$, erit Arc. $Be = \Pi.e$ et Arc. $fg = \Pi.g - \Pi.f$; ut igitur arcuum fg et Be differentia fiat geometrica, necesse est, ut sit $\Pi.e - (\Pi.g - \Pi.f) =$ quantitati algebraicae. Hoc autem, ut vidimus, evenit si

$$g = \frac{e\sqrt{(1-ff)(1-nff)} + f\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeff}.$$

Quodsi ergo abscissae $Cg = g$ hic tribuatur valor, erit Arc. Be — Arc. $fg = nefg$, posito scilicet $CA = 1$ et $CB = k$, atque $n = 1 - kk$. Q. E. I.

6. **Coroll. 1.** Poterit etiam a puncto dato f versus B accedendo ejusmodi arcus $f\gamma$ abscindi, ut differentia $Be - f\gamma$ fiat algebraica. Posita enim abscissa $C\Gamma = \gamma$ capiatur

$$\gamma = \frac{f\sqrt{(1-ee)(1-nee)} - e\sqrt{(1-ff)(1-nff)}}{1-neeff}$$

eritque Arc. Be — Arc. $f\gamma = nef\gamma$.

7. **Coroll. 2.** Erit ergo quoque arcuum $f\gamma$ et fg differentia geometrice assignabilis; habebitur enim Arc. $f\gamma$ — Arc. $fg = nef(g - \gamma)$. Est autem

$$g - \gamma = \frac{2e\sqrt{(1-ff)(1-nff)}}{1-neeff},$$

sive cum sit $\quad 2fg\sqrt{(1-ee)(1-nee)} = ff + gg - ee - neeffgg$ et

$$+ 2f\gamma\sqrt{(1-ee)(1-nee)} = ff + \gamma\gamma - ee - neeff\gamma\gamma, \text{ erit}$$

$$ee = \frac{ff - \gamma g}{1 - nff\gamma g} \quad \text{et} \quad g - \gamma = 2\sqrt{(1-ff)(1-nff)(ff-\gamma g)(1-nff\gamma g)}$$

atque $\quad$ Arc. $f\gamma$ — Arc. $fg = 2nf(ff - \gamma g)\sqrt{(1-ff)(1-nff)}$.

8. **Coroll. 3.** Cum sit

$$g = \frac{e\sqrt{(1-ff)(1-nff)} + f\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeff},$$

erit

$$\sqrt{(1-gg)} = \frac{\sqrt{(1-ee)(1-ff)} - ef\sqrt{(1-nee)(1-nff)}}{1-neeff}$$

$$\text{et} \quad \sqrt{(1-ngg)} = \frac{\sqrt{(1-nee)(1-nff)} - nef\sqrt{(1-ee)(1-ff)}}{1-neeff}$$

hincque

$$\frac{g}{\sqrt{(1-gg)}} = \frac{e\sqrt{(1-ee)(1-nff)} + f\sqrt{(1-ff)(1-nee)}}{1-ee-ff+neeff}$$

$$\frac{\sqrt{(1-ngg)}}{\sqrt{(1-gg)}} = \frac{\sqrt{(1-ee)(1-nee)(1-ff)(1-nff)} + (1-n)ef}{1-ee-ff+neeff}$$

$$\frac{g\sqrt{(1-ngg)}}{\sqrt{(1-gg)}} = \frac{e(1-2nff+nf^4)\sqrt{(1-ee)(1-nee)} + f(1-2nee+ne^4)\sqrt{(1-ff)(1-nff)}}{(1-ee-ff+neeff)(1-neeff)}$$

$$\sqrt{(1-gg)(1-ngg)} = \frac{ef(2n(ee+ff)-(n+1)(1+neeff)) + (1+neeff)\sqrt{(1-ee)(1-nee)(1-ff)(1-nff)}}{(1-neeff)^2}$$

Hujusmodi autem formulae inveniuntur, si simpliciores in verso quoque exprimantur; sic erit

$$\frac{1}{g}=\frac{f\sqrt{(1-ee)(1-nee)}-e\sqrt{(1-ff)(1-nff)}}{ff-ee}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-gg)}}=\frac{\sqrt{(1-ee)(1-ff)}+ef\sqrt{(1-nee)(1-nff)}}{1-ee-ff+neeff}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-ngg)}}=\frac{\sqrt{(1-nee)(1-nff)}+nef\sqrt{(1-ee)(1-ff)}}{1-nee-nff+neeff}.$$

9. **Coroll. 4.** Has formulas ideo evolvere visum est, ut si fieri posset, ex iis ejusmodi relatio inter e, f, g determinaretur, ut functio quaepiam ipsius g fieret aequalis producto ex functionibus similibus ipsarum e et f. Verum hujusmodi expressio, qualis pro parabola est reperta, hic pro ellipsi non tam facile erui posse videtur. Simpliciores autem harum formularum combinationes dant

$$\sqrt{(1-gg)}+ef\sqrt{(1-ngg)}=\sqrt{(1-ee)(1-ff)}$$
$$\sqrt{(1-ngg)}+nef\sqrt{(1-gg)}=\sqrt{(1-nee)(1-nff)}.$$

10. **Coroll. 5.** Ut igitur sit $\text{Arc.}Be-\text{Arc.}fg=nefg$, relatio inter abscissas e, f, g ita debet esse comparata, ut sit

$$\text{vel}\quad g=\frac{e\sqrt{(1-ff)(1-nff)}+f\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeff},$$

$$\text{vel}\quad f=\frac{g\sqrt{(1-ee)(1-nee)}-e\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-neegg},$$

$$\text{vel}\quad e=\frac{g\sqrt{(1-ff)(1-nff)}-f\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-nffgg}.$$

11. **Coroll. 6.** Si punctum g statuatur in vertice A, erit $g=1$ et $f=\sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$, qui est casus a Com. Fagnani datus. Nunc igitur hoc problema de duobus arcubus ellipseos, quorum differentia sit geometrice assignabilis, multo generalius est solutum, cum dato arcu Be, alter terminus arcus quaesiti ubi libuerit, accipi queat.

12. **Coroll. 7.** Effici autem omnino nequit, ut horum arcuum differentia evanescat; ita ut duo arcus dissimiles ellipsis inter se aequales exhiberi queant; ut enim hoc eveniret, vel e, vel f, vel g evanescere deberet, unde vel arcus evanescentes vel similes prodituri essent.

13. **Problema 2.** Dato ellipsis arcu quocunque fg, a puncto quovis dato p alium arcum pq abscindere, ita ut horum duorum arcuum differentia sit geometrice assignabilis.

Solutio. Positis abscissis pro arcu dato $CF=f$, $CG=g$, et pro quaesito $CP=p$ et $CQ=q$, quarum quidem altera, vel p vel q, pro lubitu assumi poterit. In subsidium nunc vocetur arcus Be abscissae $CE=e$ respondens, qui per problema 1 ita sit comparatus, ut fiat

$$\text{Arc.}Be-\text{Arc.}fg=nefg\quad\text{et}\quad\text{Arc.}Be-\text{Arc.}pq=nepq.$$

Hoc autem ut eveniat, necesse est ut sit

$$e=\frac{g\sqrt{(1-ff)(1-nff)}-f\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-nffgg}$$

$$\text{pariterque}\quad e=\frac{q\sqrt{(1-pp)(1-npp)}-p\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-nppqq}.$$

His igitur duobus valoribus inter se aequatis determinabitur q per f, g et p, uti problema exigit; et quia abscissa e est cognita, erit

$$\text{Arc}.fg - \text{Arc}.pq = ne(pq - fg).$$

Sicque differentia arcuum fg et pq est geometrica, et arcus quaesiti pq alter terminus ab arbitrio nostro pendet. Q. E. I.

14. **Coroll. 1.** Datis ergo punctis f, g et p, quartum punctum q, seu ejus abscissa $CQ = q$ ex hac aequatione debet definiri

$$\frac{g\sqrt{(1-ff)(1-nff)} - f\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-nffgg} = \frac{q\sqrt{(1-pp)(1-npp)} - p\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-nppqq},$$

vel, quia haec formula non parum est complicata, quantitas e ex hujusmodi aequationibus simplicioribus eliminari poterit

$$\sqrt{(1-ee)} - fg\sqrt{(1-nee)} = \sqrt{(1-ff)(1-gg)} \text{ et } \sqrt{(1-ee)} - pq\sqrt{(1-nee)} = \sqrt{(1-pp)(1-qq)}$$
$$\sqrt{(1-nee)} - nfg\sqrt{(1-ee)} = \sqrt{(1-nff)(1-ngg)} \text{ et } \sqrt{(1-nee)} - npq\sqrt{(1-ee)} = \sqrt{(1-npp)(1-nqq)};$$

unde elicitur

$$\sqrt{(1-ff)(1-gg)} - pq\sqrt{(1-nff)(1-ngg)} = \sqrt{(1-pp)(1-qq)} - fg\sqrt{(1-npp)(1-nqq)},$$

vel etiam

$$\sqrt{(1-nff)(1-ngg)} - npq\sqrt{(1-ff)(1-gg)} = \sqrt{(1-npp)(1-nqq)} - nfg\sqrt{(1-pp)(1-qq)}.$$

15. **Coroll. 2.** Ut ambo hi arcus fg et pq fiant inter se aequales, oportet sit $pq = fg$. Ponatur $pp + qq = t$, et ambae postremae aequationes dabunt

$$\sqrt{(1-ff)(1-gg)} - fg\sqrt{(1-nff)(1-ngg)} = \sqrt{(1-t+ffgg)} - fg\sqrt{(1-nt+nnffgg)}$$
$$\sqrt{(1-nff)(1-ngg)} - nfg\sqrt{(1-ff)(1-gg)} = \sqrt{(1-nt+nnffgg)} - nfg\sqrt{(1-t+ffgg)},$$

quarum haec per fg multiplicata ad illam addatur, ut prodeat

$$(1-nffgg)\sqrt{(1-ff)(1-gg)} = (1-nffgg)\sqrt{(1-t+ffgg)},$$

seu $1 - ff - gg + ffgg = 1 - t + ffgg$, ideoque $t = ff + gg = pp + qq$. Unde sequitur arcum pq similem et aequalem futurum esse arcui fg.

16. **Problema 3.** Dato arcu ellipsis quocunque fg, abscindere a dato puncto p alium arcum pqr, qui deficiat a duplo illius arcus fg quantitate algebraica, seu ut sit $2\,\text{Arc}.fg - \text{Arc}.pqr =$ lineae rectae.

Solutio. Sint abscissae ut ante $CE = e$, $CF = f$, $CG = g$, $CP = p$, $CQ = q$ et $CR = r$; ubi Be est arcus a vertice B abscissus, ab arcu fg dato geometrice discrepans; a quo etiam arcus pq et qr discrepent quantitatibus geometrice assignabilibus. Erit ergo

$$\text{I.}\quad e = \frac{g\sqrt{(1-ff)(1-nff)} - f\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-nffgg},$$

$$\text{II.}\quad e = \frac{q\sqrt{(1-pp)(1-npp)} - p\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-nppqq},$$

$$\text{III.}\quad e = \frac{r\sqrt{(1-qq)(1-nqq)} - q\sqrt{(1-rr)(1-nrr)}}{1-nqqrr}.$$

Hinc si primum definiatur abscissa e, ex eaque porro abscissae q et r, erit

$$\text{Arc}.fg - \text{Arc}.pq = ne\,(pq - fg)$$
$$\text{Arc}.fg - \text{Arc}.qr = ne\,(qr - fg),$$

quibus aequationibus additis habebitur

$$2\,\text{Arc}.fg - \text{Arc}.pqr = ne\,(pq + qr - 2fg). \quad \text{Q. E. I.}$$

17. **Coroll. 1.** Quoniam dato arcu fg etiam arcus Be datur, spectemus e tanquam quantitatem cognitam, eritque

$$p = \frac{q\sqrt{(1-ee)(1-nee)} - e\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-neeqq}$$
$$r = \frac{q\sqrt{(1-ee)(1-nee)} + e\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-neeqq}$$

unde fit
$$p + r = \frac{2q\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeqq}.$$

18. **Coroll. 2.** Differentia ergo arcuum $2fg$ et pqr hoc modo determinatorum erit

$$2\,\text{Arc}.fg - \text{Arc}.pqr = 2ne\left(\frac{qq\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeqq} - fg\right).$$

Ut ergo arcus pqr exacte aequalis fiat duplo arcus fg, oportet esse

$$fg = \frac{qq\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-neeqq}, \quad \text{unde definitur} \quad qq = \frac{fg}{neefg + \sqrt{(1-ee)(1-nee)}}$$

hincque porro inveniuntur p et r.

19. **Coroll. 3.** Relatio autem abscissarum e, f, g hac aequatione exprimitur

$$ff + gg = ee + neeffgg + 2fg\sqrt{(1-ee)(1-nee)};$$

unde facillime duo arcus in ellipsi, quorum alter alterius sit duplus, hoc modo determinabuntur: Sumta pro lubitu abscissa e, capiatur quoque pro lubitu valor producti fg, ex hinc reperietur summa quadratorum $ff + gg$, unde utraque abscissa f et g seorsim reperietur. Inde vero porro colligitur abscissa q, ex eaque denique abscissae p et r, ut arcus pqr fiat duplus arcus fg.

20. **Coroll. 4.** Nihilo tamen minus arcus fg pro arbitrio assumi potest, nec non alter terminus arcus quaesiti vel p vel r, ex quo deinceps definiri poterit alter terminus, ut arcus pqr fiat duplo major quam arcus fg. Sed haec operatio multo fit molestior, et calculum requirit prolixiorem.

21. **Coroll. 5.** Si priore operatione utamur, qua quantitatibus e et fg arbitrarios valores tribuimus, cavendum est, ne inde valor ipsius q prodeat unitate major, seu $CQ > CA$, sic enim perveniretur ad imaginaria. Ut autem prodeat $q < 1$, capi debet $fg < \sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$; at si capiatur $fg = \sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$, fit $g = 1$, $f = \sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$ et $q = 1$; hincque $p + r = 2\sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$ et $p = r = \sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$. Hoc ergo casu arcus fg in A terminatur, et arcus pqr utrinque circa A aequaliter protenditur, uti est obvium.

22. **Exemplum.** Ponamus $n = \frac{1}{2}$ et $ee = \frac{1}{2}$, ut semiaxis conjugatus ellipsis prodeat $CB = \sqrt{\frac{1}{2}}$, altero existente $CA = 1$. Quia nunc esse debet $fg < \sqrt{\frac{2}{3}}$, statuatur $fg = \frac{6}{7}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, ac reperietur $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, tum vero $q = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; porro autem elicitur $p + r = \frac{6\sqrt{3}}{7}$ et $r - p = \frac{\sqrt{10}}{7}$, unde fit $p = \frac{6\sqrt{3} - \sqrt{10}}{14}$ et $r = \frac{6\sqrt{3} + \sqrt{10}}{14}$. Hic casus Fig. 58 repraesentatur, ubi arcus fg terminus

g fere in verticem A cadit, punctum vero ultra f versus B reperitur, at punctum r capi debet in ellipsis parte inferiori; ita, ut arcus $pfgAr$ alterum arcum fg, cujus ille est duplus, totum in se complectatur.

23. **Scholion.** Si libuerit alia hujusmodi exempla expedire, in quibus radicalia non inter se implicentur, casus prodibunt simplicissimi ponendo $f = e$, unde prodit

$$g = \frac{2e}{1-ne^4}\sqrt{(1-ee)(1-nee)};$$

tum vero reperitur $qq = \frac{2ee}{1+ne^4}$, ita ut esse oporteat $2ee < 1 + ne^4$, seu $ee > \frac{1-\sqrt{(1-n)}}{n}$, alioquin loca p, q, r fuerint imaginaria. Hinc itaque pro terminis arcus quaesiti pqr elicitur

$$r + p = \frac{2e}{1-ne^4}\sqrt{2(1-ee)(1-nee)(1+ne^4)}$$

$$r - p = \frac{2e}{1-ne^4}\sqrt{(1-2ee+ne^4)(1-2nee+ne^4)}$$

eritque ut desideratur $\text{Arc.}pqr = 2\,\text{Arc.}fg$. Si ponamus semiaxem conjugatum

$$CB = k = \frac{2(1-ee)}{1-2ee}, \quad \text{ut sit} \quad n = 1 - kk = \frac{-3+4ee}{(1-2ee)^2}$$

pleraeque irrationalitates evanescunt, fiet enim

$$f = e, \quad g = \frac{2e(1-2ee)}{1-3ee+4e^4}, \quad qq = \frac{2ee(1-2ee)^2}{1-4ee+e^4+4e^6}$$

atque

$$r + p = \frac{2e\sqrt{(2-8ee+2e^4+8e^6)}}{1-3ee+4e^4}$$

$$r - p = \frac{2e(1-ee)\sqrt{(1-16e^4)}}{1-3ee+4e^4}.$$

Debet ergo sumi $4ee < 1$, ne loca p et r fiant imaginaria. Imprimis autem notari meretur casus, quem in problemate sequente evolvam.

24. **Problema 4.** In quadrante elliptico ACB abscindere arcum fg, qui sit semissis totius arcus quadrantis $BfgA$.

Solutio. Cum arcus fg duplum esse debeat ipse quadrans BA, quantitates problematis ita debent definiri, ut punctum p in B, et punctum r in A cadat. Erit ergo $p = 0$ et $r = 1$, unde fit $e = q$ et $e = \sqrt{\frac{1-qq}{1-nqq}} = \sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$, seu $1 - 2ee + ne^4 = 0$, ideoque $ee = \frac{1-\sqrt{(1-n)}}{n}$. Cum autem posito $CB = k$ sit $n = 1 - kk$, erit $ee = \frac{1-k}{1-kk} = \frac{1}{1+k}$, sicque habebimus $e = q = \frac{1}{\sqrt{(1+k)}}$. Tum vero quia esse oportet $2fg = pq + qr$, erit

$$2fg = e = \frac{1}{\sqrt{(1+k)}}; \text{ atque } ff + gg = ee + \frac{1}{4}ne^4 + e\sqrt{(1-ee)(1-nee)},$$

sive $ff + gg = \frac{5+3k}{4+4k}$, ergo ob $2fg = \frac{4\sqrt{(1+k)}}{4+4k}$, fiet

$$(f+g)^2=\frac{5+3k+4\sqrt{(1+k)}}{4+4k} \quad \text{et} \quad (g-f)^2=\frac{5+3k-4\sqrt{(1+k)}}{4+4k}, \text{ ergo}$$

$$f=\sqrt{\frac{5+3k-\sqrt{(9+14k+9kk)}}{8+8k}} \quad \text{et} \quad g=\sqrt{\frac{5+3k+\sqrt{(9+14k+9kk)}}{8+8k}},$$

sicque puncta f et g determinantur, ut arcus fg sit semissis quadrantis AB. Q. E. I.

25. **Coroll. 1.** Quo hae formulae simpliciores evadant, ponatur semiaxis conjugatus

$$CB=k=\frac{1-4m}{1+4m}, \quad \text{seu} \quad 4m=\frac{1-k}{1+k}$$

eritque

$$f=CF=\sqrt{\frac{1+m-\sqrt{(mm+\frac{1}{2})}}{2}} \quad \text{et} \quad g=CG=\sqrt{\frac{1+m+\sqrt{(mm+\frac{1}{2})}}{2}}.$$

26. **Coroll. 2.** Vel in subsidium vocetur angulus quidem φ, cujus sinus sit $=\frac{\sqrt{(2m+\frac{1}{2})}}{m+1}$, seu $\sin\varphi=\frac{4\sqrt{(1+k)}}{5+3k}$, eritque $CF=f=\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{5+3k}{4+4k}}$ et $CG=g=\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{5+3k}{4+4k}}$.

27. **Coroll. 3.** Si sit $k=1$, quo casu ellipsis abit in circulum, erit $\sin\varphi=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque $\varphi=45^\circ$, et ob $\sqrt{\frac{5+3k}{4+4k}}=1$, erit $CF=f=\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ et $CG=g=\cos 22\frac{1}{2}^\circ=\sin 67\frac{1}{2}^\circ$, ita ut arcus fg prodeat 45°, qui utique est semissis quadrantis.

28. **Coroll. 4.** Si ellipsis semiaxis conjugatus $CB=k$ evanescat, prae $CA=1$, fiet $f=\frac{1}{2}$ et $g=1$; sin autem $CB=k$ sit quasi infinitus respectu $CA=1$, erit $f=0$ et $g=\sqrt{\frac{3}{4}}$, unde applicatae $Ff=k$ et $Gg=\frac{1}{2}k$; ita ut hi duo casus eodem recidant, utroque enim ellipsis confunditur cum linea recta.

29. **Coroll. 5.** Si fuerit $k=\frac{5}{7}$, prodit $f=\sqrt{\frac{1}{8}}$ et $g=\sqrt{\frac{7}{8}}$. At si generalius ponatur $m=\frac{1-2uu}{4u}$, ut sit $k=\frac{2uu+u-1}{1+u-2uu}$, fiet $f=\sqrt{\frac{1-u}{2}}$ et $g=\sqrt{\frac{1+2u}{4u}}$. Jam ut utraque expressio fiat rationalis, sit $u=1-2ff$, fietque

$$k=\frac{1-5ff+4f^4}{3ff-4f^4} \quad \text{et} \quad g=\frac{\sqrt{(3-10ff+8f^4)}}{2(1-2ff)}.$$

Ergo f ita debet determinari, ut $3-10ff+8f^4$ fiat quadratum; quod cum eveniat casu $f=1$, ponatur $f=\frac{1-z}{1+z}$, eritque

$$3-10ff+8f^4=\frac{1-20z+86zz-20z^3+z^4}{(1+z)^4}.$$

Cujus numerator ergo quadratum effici debet, ita tamen ut prodeat $f<1$, seu z affirmativum et unitate minus. Statim quidem apparet quadratum prodire posito $z=-\frac{3}{10}$; quia vero hic valor est negativus, ponatur $z=\frac{y-3}{10}$, eritque numerator ille

$$1-20z+86zz-20z^3+z^4=\frac{y^4-212y^3+10454yy-77108y+391.391}{10000}.$$

Posita hujus radice $=\frac{yy-106y+391}{100}$, fit $y=\frac{1446}{391}$ et $z=\frac{273}{3910}$, $f=\frac{3637}{4183}$ et $g=\frac{yy-106y+391}{200(1-2ff)(1+z)^2}$,

seu
$$g=\frac{yy-106y+391}{200(6z-1-zz)}=\frac{100zz-1000z+82}{200(6z-1-zz)}=\frac{647}{5986}.$$

Sicque casus exhiberi potest, in quo tam semiaxes ellipsis quam ambae abscissae f et g numeris rationalibus exprimuntur.

30. **Scholion.** Simili etiam modo, si detur (Fig. 57) arcus ellipsis quicunque fg, a puncto quovis dato p alius assignari poterit arcus pz, qui datum multiplum arcus fg, puta $m.fg$, superet quantitate algebraica; si enim abscissae ponantur $CF=f$, $CG=g$, $CP=p$, $CQ=q$, $CR=r$, $CS=s$, $CT=t$, et ab abscissa CP numerando fuerit $CZ=z$, ultima indici m respondens; tum in subsidium vocando arcum Be, cujus abscissa $Ce=e$, ut sit

$$e=\frac{g\sqrt{(1-ff)(1-nff)}-f\sqrt{(1-gg)(1-ngg)}}{1-nffgg},$$

ex data abscissa p sequentes ita determinentur

$$q=\frac{p\sqrt{(1-ee)(1-nee)}+e\sqrt{(1-pp)(1-npp)}}{1-neepp},$$

$$r=\frac{q\sqrt{(1-ee)(1-nee)}+e\sqrt{(1-qq)(1-nqq)}}{1-neeqq},$$

$$s=\frac{r\sqrt{(1-ee)(1-nee)}+e\sqrt{(1-rr)(1-nrr)}}{1-neerr},$$

etc.

donec perveniatur ad ultimam z, quae a p numerando locum tenet indice m notatum. Quo facto erit

$$m.\text{Arc}.fg-\text{Arc}.pz=ne\,(pq+qr+rs+\ldots+yz-mfg).$$

Hinc igitur quoque punctum p ita definiri poterit, ut haec quantitas algebraica evanescat, seu fiat

$$pq+qr+rs+\ldots+yz=mfg,$$

quo casu arcus pz exacte erit aequalis arcui fg toties sumto, quot numerus m continet unitates, seu erit $\text{Arc}.pz=m.\text{Arc}.fg$. Dato ergo ellipsis arcu quocunque fg, alius assignari poterit pz, qui ad illum datam teneat rationem, puta $m:1$. Quin etiam m poterit esse numerus fractus, seu ista ratio ut numerus ad numerum $\mu:\nu$; nam quaeratur primo arcus pz, ut sit $pz=\mu.fg$, tum quaeratur alius $\pi\omega$, ut sit $\pi\omega=\nu.fg$, eritque $pz:\pi\omega=\mu:\nu$. Verum quo longius hic progrediamur, hae formulae continuo magis fiunt complicatae, ut calculum in genere expedire non liceat.

31. **Problema 5.** In dato ellipseos quadrante AB arcum abscindere fg, qui sit tertia pars totius quadrantis AB.

Solutio. Cum in genere fuerit determinatus arcus $pqrs$, qui sit triplus arcus fg, dum hic arcus tanquam cognitus est spectatus, nunc vicissim calculus ita instruatur, ut punctum p in B, et punctum s in A incidat, seu ut sit $p=0$ et $s=1$. Formulae ergo modo exhibitae abibunt in has

$$q=e,\quad r=\frac{2e\sqrt{(1-ee)(1-nee)}}{1-ne^4}\quad \text{et}\quad 1=\frac{r\sqrt{(1-ee)(1-nee)}+e\sqrt{(1-rr)(1-nrr)}}{1-neerr},$$

seu $r=\sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}}$, ob $r=\frac{s\sqrt{(1-ee)(1-nee)}-e\sqrt{(1-ss)(1-nss)}}{1-neess}$, unde fit $2e(1-nee)=1-ne^4$, seu $1-2e+2ne^3-ne^4=0$, existente semiaxe $CA=1$, $CB=k$ et $n=1-kk$. Primum ergo ex hac aequatione biquadratica definiri debet valor ipsius e, quae resolutio commode ita succedit.

Sit $e=\frac{1}{x}$, ut habeatur $x^4-2x^3+2nx-n=0$; ac ponatur ad secundum terminum tollendum $x=y+\frac{1}{2}$, prodibit

$$y^4-\frac{3}{2}yy+(2n-1)y-\frac{3}{16}=0,$$

cujus factores fingantur $yy+\alpha y+\beta$ et $yy-\alpha y+\gamma$; eritque

$$\beta+\gamma=\alpha\alpha-\frac{3}{2},\quad \gamma-\beta=\frac{2n-1}{\alpha}\quad \text{et}\quad \beta\gamma=-\frac{3}{16}$$

unde elicimus

$$(\beta+\gamma)^2-(\gamma-\beta)^2=\alpha^4-3\alpha^2+\frac{9}{4}-\frac{(2n-1)^2}{\alpha\alpha}=4\beta\gamma=-\frac{3}{4},$$

$$\text{ideoque}\quad \alpha^6-3\alpha^4+3\alpha^2=(2n-1)^2;$$

subtrahatur utrinque 1, ut cubus fiat completus

$(\alpha\alpha-1)^3=4nn-4n$, ergo $\alpha\alpha=1+\sqrt[3]{4n(n-1)}=1-\sqrt[3]{4nkk}$ et $\alpha=\sqrt{(1-\sqrt[3]{4nkk})}$.

Invento ergo α erit

$$\beta=\frac{1}{2}\alpha\alpha-\frac{3}{4}-\frac{(2n-1)}{2\alpha}\quad \text{et}\quad \gamma=\frac{1}{2}\alpha\alpha-\frac{3}{4}+\frac{(2n-1)}{2\alpha}$$

indeque $$y=-\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\alpha\alpha\pm\frac{(2n-1)}{2\alpha}\right)}=\frac{-\alpha\alpha\pm\sqrt{(3\alpha\alpha-\alpha^4\pm 2(2n-1)\alpha)}}{2\alpha}$$

unde obtinetur $e=\frac{2}{2y+1}$. Porro debet esse $3fg=pq+qr+rs$, seu

$$3fg=(1+e)\sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}},\quad \text{ideoque}\quad fg=\frac{1}{3}(1+e)\sqrt{\frac{1-ee}{1-nee}},$$

ex quo obtinemus

$$ff+gg=ee+\frac{1}{9}nee(1+e)^2\cdot\frac{1-ee}{1-nee}+\frac{2}{3}(1+e)(1-ee).$$

Cognitis igitur valoribus fg et $ff+gg$, seorsim abscissae $CF=f$ et $CG=g$ reperientur, quae arcum determinabunt fg praecise subtriplum totius quadrantis AB. Q. E. I.

Comparatio arcuum Hyperbolae.

32. (Fig. 59). Sit C centrum hyperbolae, cujus semiaxis transversus $CA=k$, et semiaxis conjugatus $=1$. Hinc sumta super axe conjugato a centro C abscissa quacunque $CZ=z$, erit applicata $Zz=k\sqrt{(1+zz)}$, unde

$$\text{arcus } Az=\int dz\sqrt{\frac{1+(1+kk)zz}{1+zz}}=\int\frac{dz(1+(1+kk)zz)}{\sqrt{(1+(2+kk)zz+(1+kk)z^4)}}.$$

33. Ponatur brevitatis gratia $1+kk=n$, ita ut n sit numerus affirmativus unitate major, eritque arcus hyperbolae quicunque

$$Az=\int\frac{dz(1+nzz)}{\sqrt{(1+(n+1)zz+nz^4)}}.$$

Poni igitur in § XI oportet $A=1$, $C=n+1$, $E=n$, $\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{C}=n$ et $\mathfrak{E}=0$. Unde si fuerit

$$y=\frac{c\sqrt{(1+xx)(1+nxx)}-x\sqrt{(1+cc)(1+ncc)}}{1-nccxx}$$

habebimus $$\int dx\sqrt{\frac{1+nxx}{1+xx}}-\int dy\sqrt{\frac{1+nyy}{1+yy}}=\text{Const.}-ncxy.$$

34. **Denotet** $\Pi.x$ **arcum abscissae** x **respondentem, et** $\Pi.y$ **arcum abscissae** y **respondentem.** Quia facto $x=0$ fit $y=c$, erit $\Pi.x-\Pi.y=-\Pi.c-ncxy$, seu

$$\Pi.y-\Pi.x-\Pi.c=ncxy.$$

35. Ob $\sqrt{(1+cc)(1+ncc)}$ ambiguum, poni quoque poterit

$$y=\frac{c\sqrt{(1+xx)(1+nxx)}+x\sqrt{(1+cc)(1+ncc)}}{1-nccxx}$$

eritque $\Pi.y-\Pi.x-\Pi.c=ncxy$, secundum ea, quae de ellipsi § 3 sunt exposita; atque hinc sequens problema solvi poterit.

36. **Problema 6.** Dato arcu hyperbolae Ae a vertice sumto, abscindere a quovis dato puncto f alium arcum fg, ut differentia horum arcuum fg et Ae sit geometrice assignabilis.

Solutio. Ponatur arcus propositi Ae abscissa $CE=e$, abscissa data $CF=f$ et quaesita $CG=g$; statuatur porro

$$g=\frac{e\sqrt{(1+ff)(1+nff)}+f\sqrt{(1+ee)(1+nee)}}{1-neeff}$$

eritque $\Pi.g-\Pi.f-\Pi.e=nefg$. At est

$$\Pi.g-\Pi.f=\text{Arc}.fg \quad \text{et} \quad \Pi.e=\text{Arc}.Ae, \quad \text{unde} \quad \text{Arc}.fg-\text{Arc}.Ae=nefg.$$

Puncto ergo g hoc modo definito erit arcuum fg et Ae differentia geometrice assignabilis. Q. E. I.

37. **Coroll. 1.** Si ergo f ita capiatur, ut sit $1-neeff=0$, seu $f=\frac{1}{e\sqrt{n}}$, abscissa $CG=g$ fit infinita, ideoque et arcus fg erit infinitus, qui etiam arcum Ae excedere reperitur quantitate infinita $nefg$ ob $g=\infty$. Ut igitur casus, quemadmodum figura repraesentatur, substituere possit, necesse est ut capiatur $f<\frac{1}{e\sqrt{n}}$.

38. **Coroll. 2.** Sin autem sit $f>\frac{1}{e\sqrt{n}}$, fiet g negativum, et $\Pi.g$ pariter fiet negativum: unde si fuerit

$$g=\frac{e\sqrt{(1+ff)(1+nff)}+f\sqrt{(1+ee)(1+nee)}}{neeff-1}$$

habebimus
$$\Pi.e+\Pi.f+\Pi.g=nefg=Ae+Af+Ag.$$

Tres ergo arcus exhiberi possunt Ae, Af et Ag, quorum summa geometrice assignari queat.

39. **Coroll. 3.** Casus hic, quo summa trium arcuum hyperbolicorum rectificabilis prodiit, eo magis est notatu dignus, quod similis casus in ellipsi locum non habet; ibi enim terni arcus $\Pi.y-\Pi.e-\Pi.x=-ncxy$ (3) nunquam ejusdem signi fieri possunt, propterea quod $nccxx$ unitate semper minus existit.

40. **Coroll. 4.** Horum ternorum arcuum duo inter se fieri possunt aequales; sit enim

$$f=e, \quad \text{erit} \quad g=\frac{2e\sqrt{(1+ee)(1+nee)}}{ne^4-1}$$

unde prodit $2\Pi.e+\Pi.g=neeg$, seu $2\,\text{Arc}.Ae+\text{Arc}.Ag=$ quantitati geometricae. Si igitur insuper fiat $g=e$, habebitur arcus hyperbolicus, cujus triplum, ideoque et ipse ille arcus erit rectificabilis, qui casus cum sit maxime memorabilis, eum in sequente problemate data opera evolvamus.

41. **Problema 7.** In hyperbola a vertice A arcum abscindere Ae, cujus longitudo geometrice assignari queat.

Solutio. Posito hyperbolae semiaxe transverso $CA = k$, et conjugato $= 1$, ita ut posita abscissa $CE = e$, sit applicata $Ee = k\sqrt{(1+ee)}$; brevitatis gratia autem sit $n = 1 + kk$. Sit ergo $CE = e$ abscissa arcus Ae quaesiti, cujus rectificatio desideratur; quem in finem statuatur in § praec. $g = e$, ut sit

$$e = \frac{2e\sqrt{(1+ee)}(1+nee)}{ne^4-1} \quad \text{eritque} \quad 3\Pi.e = ne^3, \quad \text{seu} \quad \text{Arc.}Ae = \frac{1}{3}ne^3$$

ideoque rectificabilis. Abscissa ergo hujus arcus $CE = e$ determinari debet ex hac aequatione $ne^4 - 1 = 2\sqrt{(1+ee)}(1+nee)$, quae abit in hanc

$$nne^8 - 6ne^4 - 4(n+1)ee - 3 = 0.$$

Ad quam resolvendam faciamus $ee = \frac{x}{n}$, ut prodeat

$$x^4 - 6nxx - 4n(n+1)x - 3nn = 0,$$

cujus factores fingantur $(xx + \alpha x + \beta)(xx - \alpha x + \gamma) = 0$; unde comparatione instituta orietur

$$\gamma + \beta = \alpha\alpha - 6n, \quad \gamma - \beta = \frac{-4n(n+1)}{\alpha} \quad \text{et} \quad \beta\gamma = -3nn.$$

Quare cum sit $(\gamma+\beta)^2 - (\gamma-\beta)^2 = 4\beta\gamma = -12nn$, fiet

$$\alpha^4 - 12n\alpha\alpha + 36nn - \frac{16nn(n+1)^2}{\alpha\alpha} = -12nn,$$

$$\text{sive} \quad \alpha^6 - 12n\alpha^4 + 48nn\alpha\alpha = 16nn(n+1)^2.$$

Subtrahatur utrinque $64n^3$, ut fiat

$$(\alpha\alpha - 4n)^3 = 16n^2(n-1)^2, \quad \text{seu} \quad \alpha\alpha = 4n + \sqrt[3]{16nn(n-1)^2},$$

$$\text{ergo} \quad \alpha = \sqrt{(4n + \sqrt[3]{16nn(n-1)^2})}.$$

Invento nunc valore ipsius α, erit porro

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha - 3n + \frac{2n(n+1)}{\alpha} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}\alpha\alpha - 3n - \frac{2n(n+1)}{\alpha}$$

et quatuor radices ipsius x erunt

$$x = \pm\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(3n - \frac{1}{4}\alpha\alpha \pm \frac{2n(n+1)}{\alpha})} = nee,$$

seu cum valor ipsius α tam affirmative quam negative accipi queat, erit

$$e = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2n} \pm \sqrt{(\frac{3}{n} - \frac{\alpha\alpha}{4nn} + \frac{2(n+1)}{n\alpha})}\right)}.$$

Hic igitur valor si tribuatur abscissae $CE = e$, erit arcus hyperbolae

$$Ae = \frac{1}{3}ne^3 \qquad \text{Q. E. I.}$$

42. **Coroll. 1.** Si loco unitatis semiaxis conjugatus ponatur $= b$, ut abscissae cuicunque $CP = x$ respondeat applicata $Pp = k\sqrt{(1 + \frac{xx}{bb})}$, erit

$$\alpha = \sqrt{(4bb(bb+kk) + \sqrt[3]{16b^4k^4(bb+kk)^2})}$$

tumque sumta abscissa

$$CP = x = b\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2(bb+kk)} + \sqrt{\left(\frac{2bb}{bb+kk} + \frac{2bb(2bb+kk)}{\alpha(bb+kk)} - \sqrt[3]{\frac{b^4k^4}{4(bb+kk)^4}}\right)}\right)},$$

$$\text{erit arcus } Ap = \frac{(bb+kk)x^3}{3b^4}.$$

43. **Coroll. 2.** Si hyperbola fuerit aequilatera, seu $k = b = 1$, poni debet $n = 2$, fietque $\alpha = 2\sqrt{3}$ et arcus rectificabilis Ae abscissa prodit

$$CE = e = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}}{2}}$$

et ipsa hujus arcus longitudo reperitur

$$Ae = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}}{2}}.$$

44. **Coroll. 3.** Si ponatur $4n(n-1) = s^3$, ut sit $n = \frac{1 + \sqrt{(s^3+1)}}{2}$, signa radicalia cubica ex calculo evanescent; prodit enim

$$\alpha = \sqrt{(2 + ss + 2\sqrt{(s^3+1)})} = \sqrt{(1 - s + ss)} + \sqrt{(1+s)},$$

unde fit $\left(\frac{1 + \sqrt{(1+s^3)}}{2}\right)ee =$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+s)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-s+ss)} \pm \sqrt{\left(1 - \tfrac{1}{4}ss + \sqrt{(1+s^3)} + (1 - \tfrac{1}{2}s)\sqrt{(1+s)} + (1 + \tfrac{1}{2}s)\sqrt{(1-s+ss)}\right)},$$

$$\text{sive}\quad ee = \frac{\sqrt{(1+s)} + \sqrt{(1-s+ss)} \pm \sqrt{\left(4 - ss + 4\sqrt{(1+s^3)} + 2(2-s)\sqrt{(1+s)} + 2(2+s)\sqrt{(1-s+ss)}\right)}}{1 + \sqrt{(1+s^3)}}.$$

45. **Coroll. 4.** Pro hyperbola aequilatera, ubi $n = 2$, si radicalia per fractiones decimales evolvantur, reperitur $CE = e = 1,4619354$ et $Ae = 1,4248368e$, seu Arc. $Ae = 2,0830191$, semiaxe transverso existente $CA = 1$, quos numeros ideo adjeci, quo veritas hujus rectificationis facilius perspici queat.

46. **Coroll. 5.** Casus etiam satis simplex prodit si $s = 1$ et $n = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = 1 + kk$, ita ut sit $k = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, hinc enim fit

$$ee = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{(9 + 6\sqrt{2})}}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{3}.$$

Ergo sumta abscissa $CE = \sqrt{(1 + \sqrt{3})}$, erit arcus $Ae = \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})\sqrt{(1+\sqrt{3})}}{6}$. In fractionibus decimalibus fit $k = 0,45509$, $e = 1,65289$ et Arc. $Ae = 1,81701$.

47. **Coroll. 6.** Si sit $s = 0$, quo casu fit $n = 1$ et $k = 0$, hyperbola autem abit in lineam rectam CE, erit $ee = 3$ et $e = \sqrt{3} = CE$, arcusque Ae evadit $= \sqrt{3} = CE$, uti natura rei postulat.

48. **Problema 8.** Invenire alios arcus hyperbolicos rectificabiles.

Solutio. Sumta abscissa $CE = e$, capiantur aliae duae abscissae $CP = p$ et $CQ = q$, ut sit

$$q = \frac{e\sqrt{(1+pp)(1+npp)} + p\sqrt{(1+ee)(1+nee)}}{1 - neepp},$$

erit $\Pi.q - \Pi.p - \Pi.e = nepq$. Quia ergo $\Pi.q - \Pi.p = \text{Arc}.pq$ et $\Pi.e = \text{Arc}.Ae$, erit

$$\text{Arc}.pq = nepq + \text{Arc}.Ae.$$

Quodsi igitur abscissae e is tribuatur valor, qui in problemate praecedente est definitus, ita ut arcus Ae sit rectificabilis; hunc scilicet in finem posito

$$a = \sqrt{(4n + \sqrt[3]{16nn(n-1)^2})}$$

capiatur

$$e = \sqrt{\left(\frac{a}{2n} + \sqrt{\left(\frac{3}{n} - \frac{aa}{4nn} + \frac{2(n+1)}{na}\right)}\right)}$$

eritque arcus $Ae = \frac{1}{3}ne^3$. Hinc sumta abscissa p pro lubitu, ex superiori formula ita definietur abscissa q, ut prodeat arcus rectificabilis

$$\text{Arc}.pq = nepq + \frac{1}{3}ne^3.$$

Verumtamen p ita accipi debet, ut sit $neepp < 1$, seu $p < \frac{1}{e\sqrt{n}}$; cum igitur sit $ne^4 > 1$, capienda est abscissa p minor quam e, et quidem oportet sit

$$\frac{1}{p} > \sqrt{\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(3n - \frac{1}{4}aa + \frac{2n(n+1)}{a}\right)}\right)}.$$

Dummodo ergo punctum p non capiatur ultra hunc terminum, semper ab eo abscindi potest arcus pq, cujus longitudo geometrice assignari queat. Q. E. I.

49. **Coroll. 1.** Quodsi capiatur $p = \frac{1}{e\sqrt{n}}$, ob $1 - neepp = 0$, fiet abscissae q valor infinitus, ideoque ipse arcus rectificabilis pq erit infinitus.

50. **Coroll. 2.** In hyperbola ergo aequilatera, ubi $n = 2$ et $e = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}}{2}}$, prior abscissa $CP = p$ tam parva accipi debet, ut sit $p < \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}}$, seu $p < 0{,}4836784$. Sumta igitur hac abscissa tam parva, semper alterum punctum q assignari poterit, ut arcus pq sit rectificabilis.

51. **Scholion.** Insigni hac hyperbolae proprietate, qua reliquis sectionibus conicis antecellit, contentus, non immoror investigationi ejusmodi arcuum, quorum differentia sit algebraica, vel qui inter se datam teneant rationem, cujusmodi quaestiones pro ellipsi evolvi; cum enim talia problemata pro hyperbola simili modo resolvi queant, ea ne lectori sim molestus, data opera praetermitto. Hanc igitur dissertationem finiam comparatione arcuum parabolae cubicalis primariae, cujus rectificationem constat pariter fines analyseos transgredi.

Comparatio arcuum Parabolae cubicalis primariae.

52. (Fig. 60). Sit $Aefg$ parabola cubicalis primaria, A ejus vertex et $AEFG$ ejus tangens in vertice, super qua sumta abscissa quacunque $AP = z$, sit applicata $Pp = \frac{1}{3}z^3$, unde arcus Ap reperitur

$$= \int dz\sqrt{(1 + z^4)} = \int \frac{dz(1 + z^4)}{\sqrt{(1 + z^4)}}.$$

53. Quo igitur formulas nostras huc accommodemus, poni oportet $A = 1$, $C = 0$, $E = 1$ $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{C} = 0$ et $\mathfrak{E} = 1$, ita ut sit $y = \frac{c\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{(1+c^4)}}{1-ccxx}$; quo facto erit

$$\int dx\sqrt{(1+x^4)} - \int dy\sqrt{(1+y^4)} = \text{Const.} - cxy\,(cc + xy\sqrt{(1+c^4)} + \tfrac{1}{3}ccxxyy)$$

sumto tam $\sqrt{A}$ quam c negativo in formulis N° VII et XI expositis.

54. Quodsi ergo tres capiamus abscissas $AE = e$, $AF = f$ et $AG = g$, ita ut sit

$$g = \frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{1-eeff},$$

erit
$$\text{Arc}.Af - \text{Arc}.Ag = -\text{Arc}.Ae - efg\,(ee + fg\sqrt{(1+e^4)} + \tfrac{1}{3}eeffgg), \quad \text{seu}$$
$$\text{Arc}.fg - \text{Arc}.Ae = efg\,(ee + fg\sqrt{(1+e^4)} + \tfrac{1}{3}eeffgg).$$

Dato ergo quovis arcu Ae, a dato puncto f abscindi poterit alius arcus fg, ut horum arcuum differentia sit rectificabilis.

55. Si capiantur arcus e et f negativi, ita ut sit $eeff > 1$ et

$$g = \frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{eeff-1}$$

et arcus abscissis e, f, g respondentes denotentur per $\Pi.e$, $\Pi.f$, $\Pi.g$, erit

$$\Pi.e + \Pi.f + \Pi.g = efg\,(ee - fg\sqrt{(1+e^4)} + \tfrac{1}{3}eeffgg).$$

Sin autem sit
$$g = \frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{1-eeff},$$

erit
$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.e = efg\,(ee + fg\sqrt{(1+e^4)} + \tfrac{1}{3}eeffgg).$$

56. Cum sit hoc posteriori casu $ff + gg = ee + 2fg\sqrt{(1+e^4)} + eeffgg$, erit quoque

$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.e = \tfrac{1}{2}efg\,(ee + ff + gg - \tfrac{1}{3}eeffgg).$$

Casu autem altero pro summa arcuum, quo

$$g = \frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{eeff-1},$$

erit
$$\Pi.e + \Pi.f + \Pi.g = \tfrac{1}{2}efg\,(ee + ff + gg - \tfrac{1}{3}eeffgg).$$

57. **Problema 9.** Dato arcu Ae parabolae cubicalis primariae, in ejus vertice A terminato, ab alio quocunque puncto f abscindere in eadem parabola, arcum fg, ita ut horum arcuum differentia $fg - Ae$ sit rectificabilis.

Solutio. Positis abscissis $AE = e$, $AF = f$, $AG = g$, quarum illae duae dantur, haec vero ita accipiatur, ut sit $g = \frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{1-eeff}$, eritque horum arcuum differentia

$$\text{Arc}.fg - \text{Arc}.Ae = \tfrac{1}{2}efg\,(ee + ff + gg - \tfrac{1}{3}eeffgg)$$

Verum cum data sit abscissa e, altera abscissa f ita accipi debet, ut sit $eeff < 1$, seu $f < \frac{1}{e}$, ne abscissa $AG = g$ prodeat negativa. Sin autem detur punctum g, inde reperitur

$$f = \frac{g\sqrt{(1+e^4)} - e\sqrt{(1+g^4)}}{1 - eegg},$$

unde si g tam fuerit magna, ut sit $eegg > 1$, seu $g > \frac{1}{e}$, erit

$$f = \frac{e\sqrt{(1+g^4)} - g\sqrt{(1+e^4)}}{eegg - 1},$$

simulque necesse est, ut sit $g > e$, ne f fiat negativum. A dato ergo puncto f siquidem sit $f < \frac{1}{e}$, arcus quaesitus fg in consequentia vergit; a puncto autem g, si sit $g > \frac{1}{e}$ et simul $g > e$, arcus quaesitus fg retro accipietur. Q. E. I.

58. **Coroll. 1.** Cum sit applicata $Ee = \frac{1}{3}e^3$, seu $AE^3 = 3Ee$, erit parameter hujus parabolae $= 3$, ideoque unitas nostra est triens parametri.

59. **Coroll. 2.** Si ergo sit $e = 1$, abscissa data f seu g vel debet esse minor quam 1, vel major quam 1; dummodo ergo punctum datum non in e cadat, ab eo semper vel prorsum vel retrorsum arcus quaesito satisfaciens abscindi poterit: prorsum scilicet, si abscissa data minor sit quam e, retrorsum vero, si major. At si abscissa data esset $= 1$, altera vel infinita vel $= 0$ prodiret.

60. **Coroll. 3.** Si sit $e > 1$, ideoque $e > \frac{1}{e}$, altera abscissarum f vel g, quae datur, vel minor esse debet quam $\frac{1}{e}$, vel major quam e; alioquin arcus problemati satisfaciens abscindi nequit, quod ergo usu venit, si abscissa data inter limites e et $\frac{1}{e}$ contineatur.

61. **Coroll. 4.** Sin autem sit $e < 1$, ideoque $\frac{1}{e} > e$, alteram abscissam datam vel minorem esse oportet quam $\frac{1}{e}$, vel majorem quam $\frac{1}{e}$; dum ergo non sit aequalis ipsi $\frac{1}{e}$, quo casu arcus quaesitus vel fieret infinitus, vel ipsi arcui Ae similis et aequalis, reperietur semper arcus problemati satisfaciens.

62. **Coroll. 5.** Hoc autem casu, quo $e < 1$, fieri potest, ut a dato puncto f in utramque partem arcus problemati satisfaciens abscindi queat; hoc scilicet evenit, si abscissa data intra limites e et $\frac{1}{e}$ contineatur: tum enim ea tam loco f quam loco g scribi poterit.

63. **Coroll. 6.** Si arcus fg debeat esse contiguus arcui Ae, seu si sit $f = e$, reperietur

$$g = \frac{2e\sqrt{(1+e^4)}}{1-e^4};$$

hoc ergo fieri nequit nisi sit $e < 1$. Hoc ergo casu erit arcuum differentia

$$\text{Arc.}fg - \text{Arc.}Ae = \frac{2e^3(9 - 2e^4 + e^8)\sqrt{(1+e^4)}}{3(1-e^4)^3}$$

64. **Problema 10.** Dato in parabola cubicali arcu quocunque fg, alium invenire arcum pq, qui illum superet quantitate geometrice assignabili.

Solutio. Sint abscissae datae $AF=f$, $AG=g$, quaesitae $AP=p$ et $AQ=q$, et in subsidium vocetur arcus Ae, cujus abscissa $AE=e$, sitque

$$g=\frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{1-eeff} \quad \text{et} \quad q=\frac{e\sqrt{(1+p^4)}+p\sqrt{(1+e^4)}}{1-eepp}$$

erit
$$\text{Arc}.fg-\text{Arc}.Ae=\frac{1}{2}efg\left(ee+ff+gg-\frac{1}{3}eeffgg\right)=M$$

et
$$\text{Arc}.pq-\text{Arc}.Ae=\frac{1}{2}epq\left(ee+pp+qq-\frac{1}{3}eeppqq\right)=N,$$

$$\text{ergo} \quad \text{Arc}.pq-\text{Arc}.fg=N-M.$$

Eliminemus autem utrinque e, reperieturque

$$e=\frac{g\sqrt{(1+f^4)}-f\sqrt{(1+g^4)}}{1-ffgg}=\frac{q\sqrt{(1+p^4)}-p\sqrt{(1+q^4)}}{1-ppqq},$$

unde si f, g et p dentur, obtinebitur q hoc modo:

$$\begin{aligned}q=\Big[&g(1-ffgg+ffpp-ggpp)\sqrt{(1+f^4)(1+p^4)}-f(1-ffgg+ggpp-ffpp)\sqrt{(1+g^4)(1+p^4)}\\&+p(1-ffpp-ggpp+ffgg)\sqrt{(1+f^4)(1+g^4)}-2fgp(ff+gg+pp+ffggpp)\Big]:\\&\Big[(1-ffgg-ffpp-ggpp)^2-4ffggpp(ff+gg+pp)\Big],\end{aligned}$$

qui valor quoties non fit negativus, praebebit a dato puncto p arcum pq, ab arcu proposito fg geometrice discrepantem. Q. E. I.

65. **Coroll. 1.** Ambo abscissarum paria ita pendent ab e, ut sit

$$ff+gg=ee(1+ffgg)+2fg\sqrt{(1+e^4)}$$
$$pp+qq=ee(1+ppqq)+2pq\sqrt{(1+e^4)},$$

unde reperietur

$$ee=\frac{pq(ff+gg)-fg(pp+qq)}{(pq-fg)(1-fgpq)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1+e^4)}=\frac{(pp+qq)(1+ffgg)-(ff+gg)(1+ppqq)}{2(pq-fg)(1-fgpq)}$$

et hinc penitus eliminando e habebitur

$$((1-ffgg)(pp+qq)+(1-ppqq)(ff+gg))^2=4(1-fgpq)^2((pq-fg)^2+(ff+gg)(pp+qq)),$$
$$\text{vel } ((1-ffgg)(pp+qq)-(1-ppqq)(ff+gg))^2=4(pq-fg)^2((1-fgpq)^2+(ff+gg)(pp+qq)).$$

66. **Coroll. 2.** Hinc ergo dato quocunque arcu fg, infinitis modis alii determinari possunt arcus pq, quorum differentia ab illo fg sit geometrice assignabilis. Erit autem haec differentia

$$\text{Arc}.pq-\text{Arc}.fg=\frac{1}{2}e\left(ee(pq-fg)\left(1-\frac{1}{3}ppqq-\frac{1}{3}fgpq-\frac{1}{3}ffgg\right)+pq(pp+qq)-fg(ff+gg)\right)$$

$$=\frac{e(pq-fg)\left(ff+gg+pp+qq-\frac{1}{3}pq(pq+2fg)(ff+gg)-\frac{1}{3}fg(fg+2pq)(pp+qq)\right)}{2(1-fgpq)}.$$

67. **Coroll. 3.** Casus hic duo peculiares considerandi occurrunt, alter quo $pq=fg$, alter quo $fgpq=1$. Priori casu fit $pp+qq=ff+gg$, ideoque $p=f$ et $q=g$; ita ut arcus pq in ipsum arcum fg incidat. eorumque differentia fiat $=0$. Altero vero casu fit

$$(1-ffgg)(pp+qq)+\left(1-\frac{1}{ffgg}\right)(ff+gg)=0, \quad \text{seu} \quad pp+qq=\frac{ff+gg}{ffgg},$$

unde colligitur $p=\frac{1}{g}$ et $q=\frac{1}{f}$, qui est casus a Celeb. Joh. Bernoullio b. m. primum in Actis Lipsiensibus A. 1698 expositus.

68. **Coroll. 4.** Hoc ergo casu Bernoulliano, quo $p=\frac{1}{g}$, $q=\frac{1}{f}$, ac proinde $pq=\frac{1}{fg}$ et $pp+qq=\frac{ff+gg}{ffgg}$, erit arcuum differentia

$$\text{Arc.}\,pq-\text{Arc.}\,fg=\frac{e(1-ffgg)}{6f^3g^3}(3(ff+gg)(1+ffgg)-ee(1-ffgg)^2);$$

at est $e(1-ffgg)=g\sqrt{(1+f^4)}-f\sqrt{(1+g^4)}$, unde colligimus

$$ee(1-ffgg)^2=(ff+gg)(1+ffgg)-2fg\sqrt{(1+f^4)(1+g^4)},$$

quibus valoribus substitutis erit

$$\text{Arc.}\,pq-\text{Arc.}\,fg=\frac{(g\sqrt{(1+f^4)}-f\sqrt{(1+g^4)})}{3f^3g^3}((ff+gg)(1+ffgg)+fg\sqrt{(1+f^4)(1+g)^4}),$$

quae abit in hanc formam

$$\text{Arc.}\,pq-\text{Arc.}\,fg=\frac{(1+f^4)\sqrt{(1+f^4)}}{3f^3}-\frac{(1+g^4)\sqrt{(1+g^4)}}{3g^3},$$

quae est ipsa horum arcuum differentia a Cel. Bernoullio exhibita.

69. **Scholion.** Simili modo dato quocunque arcu parabolae cubicalis fg, alii arcus inveniri poterunt, qui a duplo vel triplo vel quovis multiplo arcus fg discrepent quantitate algebraica: quin etiam hi arcus ita determinari poterunt, ut differentia evanescat. Hinc ergo proposito arcu quocunque fg, alius in eadem parabola assignari poterit, qui arcus istius sit duplus vel triplus, vel alius quicunque multiplus. Ex quo vicissim pro lubitu infinitis modis ejusmodi arcus assignare licebit, qui inter se datam teneant rationem. Ut autem duo arcus sint inter se in ratione aequalitatis, alii assignari nequeunt, nisi qui sint inter se similes et aequales. Quod quo clarius appareat, sit

$$fg=m,\ pq=\mu,\ ff+gg=n \text{ et } pp+qq=\nu,$$

erit primo $$n=ee(1+mm)+2m\sqrt{(1+e^4)},$$

tum vero $$\nu=ee(1+\mu\mu)+2\mu\sqrt{(1+e^4)}.$$

Unde ut arcus pq et fg inter se fiant aequales, oportet esse

$$ee(\mu-m)\left(1-\tfrac{1}{3}\mu\mu-\tfrac{1}{3}m\mu-\tfrac{1}{3}mm\right)+\mu\nu-mn=0.$$

At pro n et ν illis valoribus substitutis fit

$$\mu\nu-mn=ee(\mu-m)(1+\mu\mu+m\mu+mm)+2(\mu-m)(\mu+m)\sqrt{(1+e^4)}$$

unde debet esse, postquam per $\mu-m$ fuerit divisum,

$$2ee\left(1+\tfrac{1}{3}\mu\mu+\tfrac{1}{3}m\mu+\tfrac{1}{3}mm\right)+2(\mu+m)\sqrt{(1+e^4)}=0,$$

quae quantitates cum sint omnes affirmativae, solus prior factor $\mu-m=0$ dabit solutionem,

eritque $f=p$ et $g=q$. Ad multo illustriora autem progredior ostensurus in hac curva etiam arcus rectificabiles assignari posse.

70. **Problema 11.** In parabola cubicali primaria a vertice A arcum exhibere Ae, cujus longitudo geometrice assignari queat.

Solutio. Assumtis tribus abscissis $AE=e$, $AF=f$ et $AG=g$, supra vidimus, si sit

$$g=\frac{e\sqrt{(1+f^4)}+f\sqrt{(1+e^4)}}{eeff-1},$$

fore

$$\Pi.e+\Pi.f+\Pi.g=\frac{1}{2}efg\,(ee+ff+gg-\frac{1}{3}eeffgg).$$

Statuantur nunc hi tres arcus inter se aequales, seu $e=f=g$, eritque

$$e=\frac{2e\sqrt{(1+e^4)}}{e^4-1},\quad \text{seu}\quad e^8-6e^4-3=0$$

$$\text{hincque}\qquad e^4=3+2\sqrt{3}.$$

Sumta ergo abscissa $AE=e=\sqrt[4]{(3+2\sqrt{3})}$, erit

$$3\,\mathrm{Arc}.Ae=\frac{1}{2}e^5(3-\frac{1}{3}e^4)=\frac{1}{6}e^5(6-2\sqrt{3}),$$

sive

$$\mathrm{Arc}.Ae=\frac{1}{9}(3-\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})\sqrt[4]{(3+2\sqrt{3})}=\frac{1}{3}(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{(3+2\sqrt{3})}.$$

. . . .

XXIII.

Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromtorum.

(Conf. supra pagg. 157 ad 266.)

I. Supplementa numerorum doctrinae.

91.

(*Lexell.*)

Problema. Invenire numeros p, q, r, s, ut haec formula

$$\frac{\lambda\,(pp+ss)\,(qq+rr)}{pqrs\,(pp-ss)\,(qq-rr)}$$

fiat quadratum.

Solutio. I. Primo ponatur

$$pp+ss=(aa+bb)\,(xx+yy) \quad \text{et}$$
$$qq+rr=(cc+dd)\,(xx+yy)$$

eritque

$$p=ax+by \quad \text{et} \quad q=cx+dy$$
$$s=bx-ay \qquad r=dx-cy\,;$$

quo facto, quadratum esse debet haec formula:

$$\frac{\lambda\,(aa+bb)\,(cc+dd)}{pqrs\,(p+s)\,(p-s)\,(q+r)\,(q-r)}.$$

II. Ut numerus factorum diminuatur, statuatur $r=s$, sive

$$dx-cy=bx-ay, \quad \text{unde fit } \frac{x}{y}=\frac{a-c}{b-d}\,;$$

fiat ergo

$$x=a-c \quad \text{et} \quad y=b-d,$$

unde colligitur

$$p=aa-ac+bb-bd,\; q=ac-cc+bd-dd \quad \text{et}$$
$$s=r=ab-bc-ab+ad=ad-bc, \text{ hincque}$$
$$p+s=aa-ac+ad+bb-bc-bd, \quad q+r=ac-bc-cc+bd+ad-dd$$
$$p-s=aa-ac-ad+bb+bc-bd, \quad q-r=ac+bc-cc+bd-ad-dd.$$

Formula ergo quadratum reddenda erit

$$\frac{\lambda\,(aa+bb)\,(cc+dd)}{pq\,(p+s)\,(p-s)\,(q+r)\,(q-r)}.$$

III. Fiat porro $p=cc+dd$, sive $cc+dd=aa-ac+bb-bd$, ad quam resolvendam statuatur $d=a$, eritque $cc=-ac+bb-ba$, sive $0=-cc-ac+bb-ab$, seu $cc+ac-bb+ab=0$, quae per $c+b$ divisa dat $a+c-b=0$, unde fit $c=b-a$ existente $d=a$. Habebimus ergo

$$p=cc+dd,\; q=(3a-b)\,(b-a),\; r=s=aa+ab-bb,$$

unde fit $p+s=a\,(3a-b)$, $p-s=(b-a)\,(2b-a)$, $q+r=(2a-b)\,(2b-a)$, $q-r=a\,(3b-4a)$.

Consequenter formula quadratum reddenda erit

$$\frac{\lambda\,(aa+bb)}{(3a-b)\,(b-a)\,a\,(3a-b)\,(b-a)\,(2b\quad a)\,(2a\quad b)\,(2b-a)\,a\,(3b-4a)},$$

quae reducitur ad hanc formam $\frac{\lambda(aa+bb)}{(2a-b)(3b-4a)} = \square$, ita ut habeatur haec conditio

$$\lambda(2a-b)(3b-4a)(aa+bb) = \square.$$

Nota. Si N° III posuissemus $d = -a$, habuissemus $cc - bb + ac - ab = 0$, quae per $c - b$ divia praebet $c + b + a = 0$, sive $c = -a - b$, unde porro fit

$$p = (a+b)^2 + aa = cc + dd, \quad q = -(3a+b)(a+b), \quad r = s = -(aa - ab - bb)$$

$$p + s = (2b+a)(b+a), \quad p - s = a(3a+b), \quad q + r = -a(4a+b), \quad q - r = -(2a+b)(2b+a)$$

Unde quadratum esse debet haec forma

$$\frac{\lambda(aa+bb)}{-(3a+b)(a+b)(2b+a)(b+a)a(3a+b)a(4a+3b)(2a+b)(2b+a)};$$

sicque quaestio reducitur ad hanc formam $-\lambda(aa+bb)(2a+b)(4a+3b) = \square$. Hic imprimis notatu dignum occurrit, quod per positionem tertiam, qua fecimus $p = cc + dd$, praeter expectationem, quatuor paria simplicium factorum ex calculo discesserunt.

Conditioni tertiae $p = cc + dd$ sequenti modo generaliter satisfieri potest: Quum sit

$$cc + dd = aa - ac + bb - bd, \quad \text{erit} \quad cc + ac - aa = bb - bd - dd, \quad \text{sive}$$

$$(2c+a)^2 - 5aa = (2b-d)^2 - 5dd, \quad \text{sive} \quad (2c+a)^2 - (2b-d)^2 = 5(aa - dd) \quad \text{et}$$

$$(2c + a - 2b + d)(2c + a + 2b - d) = 5(a+d)(a-d) = 5mntu;$$

unde colligitur $2c + a - 2b + d = nu$, $2c + a + 2b - d = 5mt$ et $a + d = mu$ et $a - d = nt$. Ex his concluditur

$$a = \frac{mu + nt}{2} \quad \text{et} \quad d = \frac{mu - nt}{2};$$

inde vero $4c + 2a = 5mt + nu$ et $4b - 2d = 5mt - nu$, unde fit

$$c = \frac{(5m-n)t + (n-m)u}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{(5m-n)t - (n-m)u}{4}.$$

Hinc $\quad p = [5(5mm - 2mn + nn)tt - 2(5mm - 2mn + nn)tu + (5mm - 2mn + nn)uu] : 16$

$\quad q = [-5(5mm - 2mn + nn)tt + 6(5mm - 2mn + nn)tu - (5mm - 2mn + nn)uu] : 16$

sive $\quad p = \frac{5mm - 2mn + nn}{16}(5tt - 2tu + uu)$

$$q = -\frac{(5mm - 2mn + nn)}{16}(5tt - 6tu + uu) = -\frac{(5mm - 2mn + nn)}{16}(t-u)(5t-u)$$

$$r = s = \frac{5mm - 2mn + nn}{16}(-5tt + uu).$$

Sit brevitatis gratia $\quad \frac{(5mm - 2mn + nn)}{16} = C$, ut sit

$$p = C(5tt - 2tu + uu), \quad q = -C(t-u)(5t-u), \quad r = s = C(-5tt + uu)$$

eritque

$$p + s = -2Cu(t-u), \quad p - s = 2Ct(5t-u)$$

$$q + r = -2Cu(3t-u), \quad q - r = 2Ct(5t-3u)$$

$$aa + bb = C(5tt + 2tu + uu);$$

quare formula quadratum reddenda est

$$\frac{\lambda(5tt + 2tu + uu)}{(t-u)(5t-u)\,.\,-2u(t-u)2t(5t-u)\,.\,-2u(3t-u)2t(5t-3u)},$$

quae reducitur ad hanc conditionem: $\lambda(5tt + 2tu + uu)(3t-u)(5t-3u) = \square$. Statuatur $u = v - t$, fietque $\lambda(4tt + vv)(4t - v)(8t - 3v) = \square$; seu posito $2t = w$ erit $\lambda(ww + vv)(2w - v)(4w - 3v) = \square$; quo facto habebitur $\quad p = ww + (w-v)^2, \quad q = (w-v)(3w-v) \quad$ et $\quad r = s = vv - vw - ww$.

Quae solutio cum praecedente prorsus congruit, ex quo patet illam solutionem multo esse generaliorem, quam initio videbatur.

Hinc alius modus solvendi colligitur: Ponatur $p+s=\alpha\beta$, $p-s=\varepsilon\zeta$, $q+r=\alpha\gamma$, $q-r=\varepsilon\eta$; tum vero $q=\beta\zeta$. Hinc ob $r=s$ fit $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{\zeta-\eta}{\beta-\gamma}$; ideoque sumatur $\alpha=\eta-\zeta$ et $\varepsilon=\gamma-\beta$; deinde $2\beta\zeta=\alpha\gamma+\varepsilon\eta$, habebitur $2\beta\zeta=2\eta\gamma-\gamma\zeta-\beta\eta$ et $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{2\eta-\zeta}{2\zeta+\eta}$. Statuatur ergo $\beta=\frac{2\eta-\zeta}{5}$, $\gamma=\frac{2\zeta+\eta}{5}$, $\alpha=\eta-\zeta$, $\varepsilon=\frac{3\zeta-\eta}{5}$,

ergo
$$p=\frac{7\zeta\zeta-2\zeta\eta+\eta\eta}{5},\quad q=\frac{\zeta(2\eta-\zeta)}{5},\quad r=s=\frac{\eta\eta-\eta\zeta-\zeta\zeta}{5},$$
consequenter
$$pp+ss=\frac{(5\zeta\zeta-6\zeta\eta+2\eta\eta)(\zeta\zeta+\eta\eta)}{25}\quad\text{et}$$
$$qq+rr=\frac{(2\zeta\zeta-2\zeta\eta+\eta\eta)(\zeta\zeta+\eta\eta)}{25},$$
unde praecedens solutio nascitur. Imprimis hic notetur, totum negotium pendere ab his tribus rationibus: $\alpha:\varepsilon$, $\beta:\gamma$, et $\zeta:\eta$, neque ipsas quantitates absolutas in computum venire.

Solutio generalior.

Maneat
$$p+s=\alpha\beta,\quad p-s=\varepsilon\zeta,\quad q+r=\alpha\gamma,\quad q-r=\varepsilon\eta,\quad\text{ut sit}$$
$$p=\frac{\alpha\beta+\varepsilon\zeta}{2},\quad s=\frac{\alpha\beta-\varepsilon\zeta}{2},\quad q=\frac{\alpha\gamma+\varepsilon\eta}{2},\quad r=\frac{\alpha\gamma-\varepsilon\eta}{2};$$
at sit $r:s=f:g$ et $q=h\beta\zeta$; erit primo
$$\alpha\gamma-\varepsilon\eta:\alpha\beta-\varepsilon\zeta=f:g;\quad f\alpha\beta-f\varepsilon\zeta=g\alpha\gamma-g\varepsilon\eta\quad\text{et}\quad\alpha(f\beta-g\gamma)=\varepsilon(f\zeta-g\eta).$$
Ponatur ergo $\alpha=f\zeta-g\eta$ et $\varepsilon=f\beta-g\gamma$; deinde habemus
$$2h\beta\zeta=\alpha\gamma+\varepsilon\eta=f\gamma\zeta-2g\gamma\eta+f\beta\eta,\quad\text{unde}\quad\beta(2h\zeta-f\eta)=\gamma(f\zeta-2g\eta).$$
Ponatur ergo $\beta=f\zeta-2g\eta$ et $\gamma=2h\zeta-f\eta$ eritque
$$\alpha=f\zeta-g\eta\quad\text{et}\quad\varepsilon=(ff-2gh)\zeta-fg\eta.$$
Hinc ergo consequimur
$$p+s=ff\zeta\zeta-3fg\zeta\eta+2gg\eta\eta,\qquad p-s=(ff-2gh)\zeta\zeta-fg\zeta\eta$$
atque
$$q+r=2fh\zeta\zeta-(ff+2gh)\zeta\eta+fg\eta\eta,\quad q-r=(ff-2gh)\zeta\eta-fg\eta\eta;$$
unde fit
$$p=(ff-gh)\zeta\zeta-2fg\zeta\eta+gg\eta\eta,\qquad s=g(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta)$$
$$q=h\zeta(f\zeta-2g\eta)\qquad r=f(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta)$$
$$pp+ss=(f^4-2ffgh+2gghh)\zeta^4-2fg(2ff-gh)\zeta^3\eta+7ffgg\zeta\zeta\eta\eta-6fg^3\zeta\eta^3+2g^4\eta^4$$
$$qq+rr=2ffhh\zeta^4-2fh(ff+2gh)\zeta^3\eta+(f^4+2ffgh+4gghh)\zeta\zeta\eta\eta-2f^3g\zeta\eta^3+ffgg\eta^4,$$
quae forma ut divisibilis fiat per $p=(ff-gh)\zeta\zeta-2fg\zeta\eta+gg\eta\eta$, hae duae conditiones requiruntur:
$$\text{Primo}\quad ff+gh=0,\quad\text{secundo}\quad -3f^4+ffgh+4gghh=0;$$
tum vero quotus erit
$$ff\eta\eta+\left(\frac{3ffh}{g}+4hh\right)\zeta\zeta.$$
At prior conditio dat $gh=-ff$, vel et altera conditio, quae est
$$(ff+gh)(4gh-3ff)=0,$$
eo ipso impletur. Ita ut habeamus $h=-\frac{ff}{g}$; tum vero quotus erit
$$ff\eta\eta+hh\zeta\zeta.$$
Deinde vero ob $gh=-ff$, formula $pp+ss$ fit

$$= 5f^4\zeta^4 - 6f^3g\zeta^3\eta + 7ffgg\zeta\zeta\eta\eta - 6fg^3\zeta\eta^3 + 2g^4\eta^4,$$

cujus factores sunt $(ff\zeta\zeta + gg\eta\eta)(5ff\zeta\zeta - 6fg\zeta\eta + 2gg\eta\eta)$. Quibus valoribus substitutis formula nostra quadratum reddenda fiet

$$\frac{\lambda(5ff\zeta\zeta - 6fg\zeta\eta + 2gg\eta\eta)(ff\zeta\zeta + gg\eta\eta)(ff\eta\eta + hh\zeta\zeta)}{hfg\eta(2h\zeta - f\eta)},$$

quae ut solubilis fiat, necesse est, ut bini superiores factores

$$ff\zeta\zeta + gg\eta\eta \quad \text{et} \quad ff\eta\eta + hh\zeta\zeta$$

coalescant, quod fit ponendo $ff : hh = gg : ff$, quod sponte evenit ob $ff = -gh$, ita ut res huc redeat

$$\frac{\lambda(5ff\zeta\zeta - 6fg\zeta\eta + 2gg\eta\eta)}{f\eta(f\eta - 2h\zeta)} \quad \text{vel} \quad \frac{\lambda(5ff\zeta\zeta - 6fg\zeta\eta + 2gg\eta\eta)}{g\eta(2f\zeta + g\eta)},$$

quae iterum a praecedente non discrepat, nisi quod hic sit $f\zeta$ et $g\eta$ quod supra erat ζ et η.

A. m. T. I. p. 17 – 21.

92.

(J. A. Euler.)

Theorema. Si formula $\alpha app + b\beta qq$ ducatur in formulam $abrr + \alpha\beta ss$, productum erit

$$aa\alpha\beta pprr + a\alpha\alpha\beta ppss + abb\beta qqrr + ab\beta\beta qqss = ab(\alpha apprr + \beta\beta qqss) + \alpha\beta(\alpha appss + bbqqrr) =$$
$$ab(\alpha pr \pm \beta qs)^2 + \alpha\beta(aps \mp bqr)^2.$$

Hujus ergo producti forma est $abxx + \alpha\beta yy$ existente

$$x = \alpha pr \pm \beta qs \quad \text{et} \quad y = aps \mp bqr.$$

A. m. T. I. p. 130.

93.

(Lexell.)

Problema. Si fuerit $x^3 = a$ et proponatur formula $fxx + gx + h$, quaerere multiplicatorem $pxx + qx + r$, ut productum fiat numerus rationalis.

Solutio. Cum productum sit

$$fpx^4 + (fq + gp)x^3 + (fr + hp + gq)xx + (gr + hq)x + hr$$

ob $x^3 = a$, hoc productum reducitur ad sequentem formam

$$(fr + hp + gq)xx + (fpa + gr + hq)x + fq + gp + hr = 0$$

unde $$r = \frac{-hp - gq}{f}; \quad r = \frac{-fpa - hq}{g}; \quad r = \frac{-fq - gp}{h}$$

atque $$hpg + g^2q = f^2pa + fhq; \quad p(hg - f^2) = q(fh - g^2); \quad \frac{p}{q} = \frac{fh - gg}{hg - ff};$$

hinc $p = fh - gg$, $q = hg - ff$, $r = gf - hh$, atque productum quaesitum erit $= 3fgh - f^3 - g^3 - h^3$.

Hujus ope radices cubicas numerorum licebit ad fractiones continuas revocare. *Exempl.* Proponatur $x^3 = 2$, ut sit $x = \sqrt[3]{2}$; notetur esse proxime $x = 1\frac{1}{4}$ et $xx = 1\frac{1}{2}$, et nunc more consueto fractio $\frac{x}{1}$ in fractionem continuam convertatur....

A. m. T. I. p. 176.

91.

(N. Fuss.)

Si fuerit $x = z^4 - 6zz + 1$ et $y = 4z^3 - 4z$, erit $xx + yy = (zz + 1)^4$. At vero

$$x + y = z^4 + 4z^3 - 6zz - 4z + 1,$$

quae formula resolvitur in hos factores

$$[zz + (2 + 2\sqrt{2})\, z - 1]\; [zz + (2 - 2\sqrt{2})\, z - 1]$$

quod si jam $x + y$ debeat esse quadratum, fiat uterque factor quadratum ponendo

$$zz + (2 + 2\sqrt{2})\, z - 1 = (z + p + q\sqrt{2})^2$$
$$zz + (2 - 2\sqrt{2})\, z - 1 = (z + p - q\sqrt{2})^2$$

tum enim erit $x + y = (zz + 2pz + pp - 2qq)^2$. Jam evolvatur alterutra harum positionum, et termini rationales inter se seorsim aequantur et irrationales:

$$2z - 1 = 2pz + pp + 2qq$$
$$2z\sqrt{2} = 2qz\sqrt{2} + 2pq\sqrt{2}.$$

Prior aequatio dat $2z - 2pz = 1 + pp + 2qq$, unde $z = \frac{1 + pp + 2qq}{2(1 - p)}$; ex altera autem aequatione per $2\sqrt{2}$ divisa fit $z = qz + pq$, hincque $z = \frac{pq}{1 - q}$; qui duo valores inter se aequati praebent $p = \frac{q \pm \sqrt{(2q^4 - 1)}}{1 + q}$.

Si hic capiatur $q = 13$, fiet $p =$ vel 18, vel $= \frac{-113}{7}$. Poni etiam posset $q = -13$, fieretque

$$p = \frac{-13 \pm 239}{-12};$$

hinc vel $p = 21$, vel $= \frac{113}{6}$. Si sumatur $q = 13$ et $p = \frac{-113}{7}$, reperietur $z = \frac{1469}{84}$.

Haec methodus ad sequentem redire videtur, quae resolutione in factores non indiget et ita se habet. Sit formula proposita quadratum efficienda in genere $z^4 + az^3 + bzz + cz + d$, cujus radix ponatur $zz + pz + r$, ita ut fieri debeat

$$\begin{array}{l} z^4 + 2pz^3 + 2rzz + 2prz + rr \\ \qquad\qquad\quad + ppzz \\ - z^4 - \;\, az^3 - \;\, bzz - \;\; cz - d = 0 \end{array}$$

ubi cum primi termini se destruant, termini secundi et tertii ad nihilum redigantur, unde per zz dividendo fiet $(2p - a)\, z + 2r + pp - b = 0$, ideoque $z = \frac{2r + pp - b}{a - 2p}$. Simili vero modo termini quarti et quinti conjunctim tollantur, unde fiet $(2pr - c)\, z + rr - d = 0$, indeque $z = \frac{rr - d}{c - 2pr}$. Hi duo valores ipsius z inter se aequati dabunt

$$r = c + bp - p^3 \pm \sqrt{(cc + a(ad - bc) + bbpp + acpp - 4dpp - 2bp^4 + p^6)}.$$

Nostro autem casu erat $a = 4$, $b = -6$, $c = -4$, $d = 1$; hinc formula radicalis evadit

$$\sqrt{(-64 + 16pp + 12p^4 + p^6)} \quad \text{sive} \quad \sqrt{(pp + 4)(p^4 + 8pp - 16)},$$

quae autem formula nullo modo tractari potest, unde patet priorem methodum non reduci ad hanc posteriorem, ideoque eo magis attentionem merere.

A. m. T. I. p. 276. 277.

95.

(N. Fuss.)

Methodus facilis hujusmodi quaestiones solvendi: Quaerantur numeri x et y tales, ut formula $mx^4 + ny^4$ divisibilis fiat per datum numerum N.

Primum observandum, hoc fieri non posse, nisi fuerit vel $N = maa + nbb$, vel $N = aa + mnbb$. Pro casu priore quaeratur quadratum $kk = \lambda N \pm ab$, quod si fieri nequeat, quaestio est impossibilis. Sin autem k inventum fuerit, erit

$$x = \pm \alpha N \pm ap, \quad \text{vel etiam} \quad x = \alpha N \pm kq$$
$$y = \beta N \pm kp \qquad\qquad\qquad y = \beta N \pm bq$$

ubi α, β, p, q pro lubitu sumuntur.

Pro altero casu quaeratur quadratum $kk = \lambda mN \pm mab$, tum vero erit ut ante $x = \alpha N \pm ap$ et $y = \beta N \pm kp$, vel etiam $x = \alpha N \pm kq$, $y = \beta N \pm bq$. Sit $m = 2$ et $n = 1$, ut formula $2x^4 + y^4$ divisibilis fiat per $N = 2aa + bb$: Sumatur $a = 4$ et $b = 1$, erit $N = 33$. Quaeratur ergo $kk = 33\lambda \pm 4$, quod fit si $\lambda = 0$, eritque $k = 2$; erit ergo $x = 33\alpha \pm 4p$ et $y = 33\beta \pm 2p$.

A. m. T. II. p. 148. 149.

96.

(N. Fuss.)

Definitio. Proposito numero quocunque integro a, denotet πa multitudinem numerorum ipso a minorum ad eumque primorum; ita erit $\pi 1 = 1$, $\pi 2 = 1$, $\pi 3 = 2$, $\pi 4 = 2$, $\pi 5 = 4$, $\pi 6 = 2$ etc. Unde patet, si a fuerit numerus primus, fore $\pi a = a - 1$. Quo magis autem numerus a fuerit compositus, eo minor erit πa. Quemadmodum autem pro quovis numero a inveniri queat valor πa, regulam quidem olim dedi, ejus vero demonstrationem multo simpliciorem hic sum traditurus.

Lemma. Proposito quocunque numero a, si formetur progressio arithmetica totidem terminorum, cujus differentia ad eum sit prima, ejusque singuli termini per a dividantur, omnia residua inter se erunt diversa, in iisque ergo occurrent omnes numeri ipso a minores, scil. $0, 1, 2, 3, 4 \ldots a - 1$.

Demonstratio. Sit p primus terminus et q differentia ad a prima, erit progressio arithmetica

$$p,\ p + q,\ p + 2q, \ldots p + (a - 1)\, q.$$

Quod si jam singuli termini per a dividantur, facile patet omnia residua inde orta inaequalia esse debere. Si enim hi termini $p + \mu q$ et $p + \nu q$, ubi μ et ν minores sunt quam a, idem praeberent residuum, eorum differentia, quae est $(\mu - \nu)\, q$, foret per a divisibilis. At quia q est numerus primus ad a, deberet $\mu - \nu$, hoc est numerus ipso a minor, per eum esse divisibilis. Cum igitur omnia residua sint diversa, eorumque numerus $= a$, in iis necessario reperientur omnes numeri $0, 1, 2, 3$ etc. $\ldots a - 1$; semper igitur unus horum numerorum per a erit divisibilis.

Praeparatio ad demonstrationem. Sint $1, \alpha, \beta, \gamma$ omnes numeri ipso a minores ad eumque primi, quorum ergo numerus per hypothesin $= \pi a$, inter quos ergo primus erit 1, et ultimus $a - 1$. Hinc constituantur sequentes series:

1	α	β	$\gamma \ldots\ldots a-1$	a
$a+1$	$a+\alpha$	$a+\beta$	$a+\gamma \ldots\ldots a-1$	$2a$
$2a+1$	$2a+\alpha$	$2a+\beta$	$2a+\gamma \ldots\ldots 3a-1$	$3a$
$3a+1$	$3a+\alpha$	$3a+\beta$	$3a+\gamma \ldots\ldots 4a-1$	$4a$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$(n-1)a+1$,	$(n-1)a+\alpha$,	$(n-1)a+\beta$,	$(n-1)a+\gamma \ldots\; na-1$	na

Quemadmodum igitur hic prima series horizontalis continet omnes numeros ad a primos ab 0 usque ad a, ita secunda series continet omnes ad a primos usque ad $2a$, tertia vero omnes numeros ad a primos ab $2a$ usque ad $3a$, hocque modo hae series continuentur usque ad ultimam $(n-1)a+1$. Omnes igitur, conjunctim praebent omnes numeros ad a primos ab 0 usque ad na, quorum ergo numerus est $n\pi a$. Singulae autem series verticales erunt arithmeticae progressiones differentia a crescentes. His praemissis sequentia problemata facillime solventur.

Problema. Proposito numero quocunque a, investigare valores formularum πa^2, πa^3, πa^4, et in genere πa^m.

Solutio. In schemate superiore sumamus $n=a$, ut quaeratur πa^2, atque manifestum est omnes terminos illarum serierum, quia sunt primi ad a, etiam primos fore ad aa. Quare cum earum serierum numerus sit $n=a$, et cujusque terminorum numerus $=\pi a$, omnino habebimus $a.\pi a$, cui ergo aequalis πaa, ita ut sit $\pi aa = a\pi a$. Deinde sumto $n=aa$, ut sit $na=a^3$, quia iterum omnes termini sunt primi ad a^3, eorum numerus erit $aa\pi a$, ideoque $\pi a^3 = aa\pi a$. Atque in genere si sumatur $n=a^{m-1}$, ut fiat $na=a^m$, multitudo omnium numerorum ad a^m primorum erit

$$a^{m-1}\pi a.$$

Coroll. Si igitur a numerus primus, ideoque $\pi a = a-1$, erit

$$\pi a^2 = a(a-1),\quad \pi a^3 = aa(a-1)\quad \text{et}\quad \ldots \pi a^m = a^{m-1}(a-1).$$

Problema. Propositis duobus numeris a et b inter se primis, pro quibus habeantur formulae πa et πb, invenire multitudinem omnium numerorum ad productum ab primorum ipsoque minorum, sive investigare valorem πab.

Solutio. In schemate superiore sumatur $n=b$, ut fiat $na=ab$; et quia series horizontales continent omnes numeros ad a primos ab 1 usque ad ab, quorum ergo numerus est $b\pi a$, jam consideretur prima series verticalis, quae est 1, $a+1$, $2a+1$, $\ldots\ldots$ $(b-1)a+1$, quae quia est arithmetica, ejusque differentia a est prima ad b, numerus terminorum ad b primorum $=\pi b$. Hoc idem valet de reliquis seriebus verticalibus, quarum quaelibet πb continet terminos ad b primos. Quamobrem numerus omnium terminorum simul ad a et b primorum, ob numerum verticalium $=\pi a$, erit $=\pi a.\pi b$, ita ut sit $\pi ab = \pi a.\pi b$.

Hinc jam tabula pro omnibus numeris condi poterit:

$\pi 1 = 1$	$\pi 5 = 4$	$\pi 9 = 6$	$\pi 13 = 12$
$\pi 2 = 1$	$\pi 6 = 2$	$\pi 10 = 4$	$\pi 14 = 6$
$\pi 3 = 2$	$\pi 7 = 6$	$\pi 11 = 10$	$\pi 15 = 8$
$\pi 4 = 2$	$\pi 8 = 4$	$\pi 12 = 4$	$\pi 16 = 7$ etc.

Hinc porro patet, si fuerint a, b, c, d numeri inter se primi, tum fore $\pi abcd = \pi a.\pi b.\pi c.\pi d$. Hinc similiter, si proponatur numerus $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = N$, erit $\pi N = a^{\alpha-1}\pi a.b^{\beta-1}\pi b.c^{\gamma-1}\pi c.d^{\delta-1}\pi d$.

A. m. T. III. p. 182 — 184.

II. Geometria.

97.

(Golovin.)

Problema. Invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare liceat, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias.

Solutio. Pro priori superficie sit (Fig. 61.) Z punctum ejus quodcunque determinatum per tres coordinatas

$$AT = t,\quad TU = u,\quad UZ = v.$$

In altera vero superficie idem punctum Z determinatum sit per ternas coordinatas $CX = x$, $XV = y$, $VZ = z$. Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarum variabilium, sint r et s hae duae variabiles a se invicem non pendentes, harumque functiones sint nostrae coordinatae. Nunc considerentur in utraque superficie duo puncta r, s, ipsi Z proxima, quorum illud r prodeat ex variatione solius r, alterum vero s oriatur ex variatione sola ipsius s, ac per conditionem problematis terna intervalla infinite parva Zr, Zs, rs utrinque debent esse aequalia. Pro puncto autem r in prima figura ternae coordinatae erunt

$$t + dr\left(\frac{dt}{dr}\right),\quad u + dr\left(\frac{du}{dr}\right),\quad v + dr\left(\frac{dv}{dr}\right).$$

Simili modo pro puncto s in prima figura ternae coordinatae erunt

$$t + ds\left(\frac{dt}{ds}\right),\quad u + ds\left(\frac{du}{ds}\right),\quad v + ds\left(\frac{dv}{ds}\right).$$

Hinc quadrata memoratorum intervallorum colliguntur

$$Zr^2 = dr^2\left(\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(\frac{du}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dr}\right)^2\right)$$

$$Zs^2 = ds^2\left(\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right)$$

$$rs^2 = \left(dr\left(\frac{dt}{dr}\right) - ds\left(\frac{dt}{ds}\right)\right)^2 + \left(dr\left(\frac{du}{dr}\right) - ds\left(\frac{du}{ds}\right)\right)^2 + \left(dr\left(\frac{dv}{dr}\right) - ds\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)^2$$

quod postremum quadratum reducitur ad hanc formam

$$rs^2 = Zr^2 + Zs^2 - 2drds\left(\left(\frac{dt}{dr}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right) + \left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{du}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right).$$

Quodsi jam loco t, u, v scribentur litterae x, y, z, habebuntur eadem intervalla pro altera figura, quae cum utrinque inter se debeant esse aequalia, habebimus has tres aequationes

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(\frac{du}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dt}{dr}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right) + \left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{du}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) = \left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{dz}{dr}\right)\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

in quibus tribus aequationibus continetur solutio nostri problematis. Quemadmodum autem per methodos cognitas iis satisfieri oporteat, neutiquam patet, opusque maxime arduum videtur.

Huc autem superior analysis sequenti modo traduci poterit: Sint litterae J, G, H, item L, M, N functiones prioris tantum variabilis r, et statuantur nostrae coordinatae

$$\text{priores}\quad \begin{aligned} t &= \int Jdr + Js \\ u &= \int Gdr + Gs \\ v &= \int Hdr + Hs \end{aligned} \qquad \text{posteriores}\quad \begin{aligned} x &= \int Ldr + Ls \\ y &= \int Mdr + Ms \\ z &= \int Ndr + Ns \end{aligned}$$

unde differentialia eliciuntur $\left(\frac{dt}{dr}\right) = J + \frac{sdJ}{dr}$ et $\left(\frac{dt}{ds}\right) = J$, sicque de reliquis. Unde tres aequationes, quibus satisfieri oportet, erunt

$$\text{I.}\quad \left(J+\frac{sdJ}{dr}\right)^2 + \left(G+\frac{sdG}{dr}\right)^2 + \left(H+\frac{sdH}{dr}\right)^2 = \left(L+\frac{sdL}{dr}\right)^2 + \left(M+\frac{sdM}{dr}\right)^2 + \left(N+\frac{sdN}{dr}\right)^2$$

$$\text{II.}\quad J^2 + G^2 + H^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

$$\text{III.}\quad J\left(J+\frac{sdJ}{dr}\right) + G\left(G+\frac{sdG}{dr}\right) + H\left(H+\frac{sdH}{dr}\right) = L\left(L+\frac{sdL}{dr}\right) + M\left(M+\frac{sdM}{dr}\right) + N\left(N+\frac{sdN}{dr}\right)$$

quae manifesto ad tres sequentes aequalitates reducuntur

$$\text{I.}\quad J^2 + G^2 + H^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

$$\text{II.}\quad JdJ + GdG + HdH = LdL + MdM + NdN$$

$$\text{III.}\quad dJ^2 + dG^2 + dH^2 = dL^2 + dM^2 + dN^2$$

quarum secunda jam in prima continetur; ita ut tantum duae conditiones adimplendae supersint.

Quo hae formulae magis evolvantur, statuamus $J^2 + G^2 + H^2 = pp$, erit quoque $L^2 + M^2 + N^2 = pp$. Quocirca ponamus

$$J = p\sin m \sin n,\qquad G = p\cos m \sin n,\qquad H = p\cos n$$
$$L = p\sin\mu\sin\nu,\qquad M = p\cos\mu\sin\nu,\qquad N = p\cos\nu.$$

Hocque modo alteri conditioni jam erit satisfactum. Pro altera autem habebimus:

$$(dp\sin m\sin n + pdm\cos m\sin n + pdn\sin m\cos n)^2 + (dp\cos m\sin n - pdm\sin m\sin n + pdn\cos m\cos n)^2 + (dp\cos n - pdn\sin n)^2 =$$
$$(dp\sin\mu\sin\nu + pd\mu\cos\mu\sin\nu + pd\nu\sin\mu\cos\nu)^2 + (dp\cos\mu\sin\nu - pd\mu\sin\mu\sin\nu + pd\nu\cos\mu\cos\nu)^2 + (dp\cos\nu - pd\nu\sin\nu)^2$$

quae reducitur ad sequentem formam multo simpliciorem

$$dp^2 + p^2dm^2\sin^2 n + p^2dn^2 = dp^2 + p^2d\mu^2\sin^2\nu + p^2d\nu^2$$

sive ad hanc $dm^2\sin^2 n + dn^2 = d\mu^2\sin^2\nu + d\nu^2$. Sumere igitur licet quatuor angulos m, n et μ, ν, utcunque a variabili r pendentes, dummodo sit

$$dm^2\sin^2 n + dn^2 = d\mu^2\sin^2\nu + d\nu^2$$

sive tribus m, n et ν pro arbitrio assumtis, quartus μ ita definiatur, ut sit $d\mu = \frac{\sqrt{(dm^2\sin^2 n + dn^2 - d\nu^2)}}{\sin\nu}$. Vel etiam introducto novo angulo θ functione ipsius r, tantum capi poterit $dm = \frac{\sqrt{(d\theta^2 - dn^2)}}{\sin n}$ et $d\mu = \frac{\sqrt{(d\theta^2 - d\nu^2)}}{\sin\nu}$. Quo facto ternae coordinatae pro utraque superficie quaesita erunt:

pro priori:
$$\begin{cases} t = \int pdr\sin m\sin n + ps\sin m\sin n; \\ u = \int pdr\cos m\sin n + ps\cos m\sin n; \\ v = \int pdr\cos n + ps\cos n, \end{cases}$$

pro posteriori:
$$\begin{cases} x = \int pdr\sin\mu\sin\nu + ps\sin\mu\sin\nu \\ y = \int pdr\cos\mu\sin\nu + ps\cos\mu\sin\nu \\ z = \int pdr\cos\nu + ps\cos\nu. \end{cases}$$

ubi denuo pro p functionem quamcunque ipsius r capere licet.

Adnotatio. Probe autem notari convenit hic alteram superficiem non pro data assumi licere, saltem non patet quomodo functiones p, m et n assumi debeant, ut prior superficies datam obtineat figuram v. g. sphaericam. Cum enim in utrisque formulis binae variabiles r et s in infinitum augeri queant, facile patet utramque superficiem necessario in infinitum protendi, neque hanc extensionem per quaeplam imaginaria tolli posse. Quamobrem figura sphaerica neque ulla alia figura in spatio finito subsistens in his formulis contenta esse potest. Quod autem ad figuras terminatas seu undique clausas attinet, judicium de iis aliter instituendum videtur. Statim enim atque figura solida undique est clausa, nullam amplius mutationem patitur; quemadmodum ex notis illis figuris corporeis, quae corpora regularia vocari solent, intelligere licet. Unde quatenus superficies sphaerica est integra, nullam mutationem admittit. Hinc patet, eatenus hujusmodi figuras mutari posse, quate-

nus non sunt integrae seu undique clausae. Interim patet hemisphaerii figuram certe esse mutabilem; cujusmodi autem mutationes recipere possit, problema videtur difficillimum.

A. m. T. I. p. 10 — 13.

98.

(Lexell.)

Problema. Ex datis aliquot applicatis aeque distantibus, aream interceptam curvae proxime definire.

(Fig. 62). I. Area $AaBb = AB\left(\frac{Aa + Bb}{2}\right)$

II. » $AaCc = AC\left(\frac{Aa + 4Bb + Cc}{6}\right)$

III. » $AaDd = AD\left(\frac{Aa + 3Bb + 3Cc + Dd}{8}\right)$

IV. » $AaEe = AE\left(\frac{7Aa + 32Bb + 12Cc + 32Dd + 7Ee}{90}\right)$

et ita porro. Sit

area $AaXx = AX(\alpha Aa + \beta Bb + \gamma Cc + \delta Dd + \ldots + \xi Xx)$

erit

I. $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= 1$

II. $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon +$ etc. $= \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2}$

III. $\beta + 2^2\gamma + 3^2\delta + 4^2\varepsilon +$ etc. $= \frac{2^4}{3}$

IV. $\beta + 2^3\gamma + 3^3\delta + 4^3\varepsilon +$ etc. $= \frac{2^6}{4}$

V. $\beta + 2^4\gamma + 3^4\delta + 4^4\varepsilon +$ etc. $= \frac{2^8}{5}$

et sic porro.

A. m. T. I. p. 128.

99.

(J. A. Euler.)

In logarithmica (Fig. 63), cujus subtangens $AD = 1$, ab applicata $AB = 1$ longitudo curvae in infinitum extensae BU superat axem AV etiam in infinitum productum quantitate $\sqrt{2} - 1 - l\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Nam sit abscissa $AP = x$ et $PM = y$, erit $y = e^{-x}$, hinc $dy = -e^{-x}dx$, et elementum arcus $= dx\sqrt{(1 + e^{-2x})}$, hinc

$$BM - AP = \int dx\,(\sqrt{(1 + e^{-2x})} - 1)$$

quod integrale ab $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extendi debet.

Ponatur $\sqrt{(1 + e^{-2x})} - 1 = z$, fiet $e^{-2x} = 2z + zz$ et $-2x = l(2z + zz)$; ubi pro $x = 0$ habemus $z = \sqrt{2} - 1$, et pro $x = \infty$ fit $z = 0$; hinc differentiando

$$-dx = \frac{dz(1+z)}{2z + zz}, \text{ et formula nostra fit } -\int\frac{dz(1+z)}{2+z}$$

quae integrari debet ab $z = \sqrt{2} - 1$ usque ad $z = 0$, vel nostra formula erit

$$-dz\left(1 - \frac{1}{2+z}\right), \text{ ergo integrando } -z + l(2+z) + \sqrt{2} - 1 - l(1+\sqrt{2}).$$

Nunc fiat $z = 0$, et quantitas quaesita erit

$$\sqrt{2} - 1 + l2 - l(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 + l\frac{2}{\sqrt{2}+1}.$$

A. m. T. I. p. 258.

100.

(J. A. Euler.)

Problema. (Fig. 64.) Pro hyperbola, cujus semiaxis $AC=a$, posito $AP=x$, $PM=y$, sit $ny=\sqrt{(2ax+xx)}$, et ex M ad asymtotam CN ducatur MN axi parallela, invenire excursum rectae CN supra curvam AM, quando punctum M in infinitum promovetur.

Posito $x=\infty$ fit $ny=x$, hinc $\operatorname{tang} ACN=\frac{1}{n}$ et $\sin ACN=\frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}=\frac{PM}{CN}=\frac{y}{CN}$, ergo $CN=y\sqrt{(1+nn)}$, Tum vero habemus $nnyy+aa=(a+x)^2$, ergo

$$x=\sqrt{(nnyy+aa)}-a, \quad \text{unde} \quad dx=\frac{nnydy}{\sqrt{(nnyy+aa)}};$$

hinc arcus $AM=\int dy\sqrt{\left(1+nn-\frac{nnaa}{nnyy+aa}\right)}$. Hinc

$$CN-AM=\int dy\left(\sqrt{(nn+1)}-\sqrt{\left(nn+1-\frac{nnaa}{nnyy+aa}\right)}\right).$$

Ponatur nunc $\nu=\sqrt{(nn+1)}-\sqrt{\left(nn+1-\frac{nnaa}{nnyy+aa}\right)}$, erit

$$\frac{-nnaa}{nnyy+aa}=-2\nu\sqrt{(nn+1)}+\nu\nu, \quad \text{sive}$$

$$\frac{1}{2\nu\sqrt{(nn+1)}-\nu\nu}=\frac{yy}{aa}+\frac{1}{nn}, \quad \text{ergo}$$

$$y=\frac{a}{n}\sqrt{\frac{nn-2\nu\sqrt{(nn+1)}+\nu\nu}{2\nu\sqrt{(nn+1)}-\nu\nu}}.$$

Per logarithmos autem erit

$$2ly-2la=l\left(nn-2\nu\sqrt{(nn+1)}+\nu\nu\right)-2ln-l\left(2\nu\sqrt{(nn+1)}-\nu\nu\right)$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{-d\nu\sqrt{(1+nn)}+\nu d\nu}{nn-2\nu\sqrt{(nn+1)}+\nu\nu}-\frac{d\nu\sqrt{(nn+1)}+\nu d\nu}{2\nu\sqrt{(nn+1)}-\nu\nu}$$

hinc autem vix quicquam concludi poterit.

Ineamus ergo aliam viam: Cum sit

$$CN-AM=\sqrt{(nn+1)}\int dy\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{nnaa}{nn+1}\cdot\frac{1}{nnyy+aa}\right)}\right),$$

sit $\frac{nnaa}{nn+1}\cdot\frac{1}{nnyy+aa}=\cos^2\varphi$, erit $nnyy+aa=\frac{nnaa}{(nn+1)\cos^2\varphi}$, hinc

$$ny=\frac{a\sqrt{(nn\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}}{\cos\varphi\sqrt{(nn+1)}},$$

ubi casu $y=0$ erit $\cos^2\varphi=\frac{nn}{nn+1}$ et $\cos\varphi=\frac{n}{\sqrt{(nn+1)}}$ et $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{(nn+1)}}$, $\operatorname{tang}\varphi=\frac{1}{n}$, hinc $\varphi=ACN$, et pro $y=\infty$ erit $\varphi=90^\circ$. Ergo integrari debet a $\varphi=ACN$, vel $\operatorname{tang}\varphi=\frac{1}{n}$, usque ad $\varphi=90^\circ$, vel $\operatorname{tang}\varphi=\infty$. Est autem $ny=\frac{a\sqrt{(nn\operatorname{tang}^2\varphi-1)}}{\sqrt{(nn+1)}}$. Ponatur $\operatorname{tang}\varphi=t$ et integrandum a $t=\frac{1}{n}$ usque ad $t=\infty$; at $\sin\varphi=\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$. Hinc $CN-AM=\sqrt{(1+nn)}.\ \frac{ann}{n\sqrt{(nn+1)}}\int\frac{tdt}{\sqrt{(nntt-1)}}\left(1-\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}\right)$, vel

$$CN-AM=\frac{a}{n}\sqrt{(nntt-1)}-\frac{a}{n}\int\frac{nnttdt}{\sqrt{(tt+1)(nntt-1)}}.$$

Est autem $$\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}=(1+tt)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{t^5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{t^7}+\text{ etc.}$$

Erit $CN-AM=na\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{(nntt-1)}}-\frac{1.3}{2.4}\int\frac{dt}{t^3\sqrt{(nntt-1)}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\int\frac{dt}{t^5\sqrt{(nntt-1)}}-\text{ etc.}\right)$. Ubi notandum si

scribatur $t=\frac{1}{u}$, fore $\int\frac{dt}{t\sqrt{(nntt-1)}}=\int\frac{-du}{\sqrt{(nn-uu)}}=Arc.\cos\frac{u}{n}=Arc.\cos\frac{1}{nt}$, et facto $t=\infty$ erit hoc integrale $=\frac{\pi}{2}$. Deinde

$$\int\frac{dt}{t^3\sqrt{(nntt-1)}}=\int\frac{-uudu}{\sqrt{(nn-uu)}},\quad \int\frac{dt}{t^5\sqrt{(nntt-1)}}=\int\frac{-u^4du}{\sqrt{(nn-uu)}},\quad \int\frac{dt}{t^7\sqrt{(nntt-1)}}=\int\frac{-u^6du}{\sqrt{(nn-uu)}}$$

etc. Fingatur $\int\frac{-u^{\lambda+2}du}{\sqrt{(nn-uu)}}=A\int\frac{-u^{\lambda}du}{\sqrt{(nn-uu)}}+Bu^{\lambda+1}\sqrt{(nn-uu)}$, ubi terminus algebraicus fit $=0$ tam si $u=n$ quam si $u=0$, ergo ob $A=\frac{(\lambda+1)nn}{\lambda+2}$ erit

$$\int\frac{-u^{\lambda+2}du}{\sqrt{(nn-uu)}}=\frac{(\lambda+1)nn}{\lambda+2}\int\frac{-u^{\lambda}du}{\sqrt{(nn-uu)}}.$$

Cum nunc esset $\int\frac{-du}{\sqrt{(nn-uu)}}=\frac{\pi}{2}$, erit

$$\int\frac{-uu\,du}{\sqrt{(nn-uu)}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot nn,\quad \int\frac{-u^4du}{\sqrt{(nn-uu)}}=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n^4,\quad \int\frac{-u^6du}{\sqrt{(nn-uu)}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n^6 \text{ etc.}$$

quamobrem habebimus

$$CN-AM=\frac{\pi}{2}\cdot na\left(\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\cdot nn+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot n^4-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot n^6+\text{ etc.}\right).$$

Unde excessus in problemate quaesitus $CN-AM$ pro infinito erit

$$\frac{\pi}{2}\cdot na\left(\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}n^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{5}{6}n^4-\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{7}{8}n^6+\text{ etc.}\right)$$

quae si n fuerit unitate minus, valde convergit.

Sequenti autem modo hoc problema elegantius solvetur. Cum sit

$$CN-AM=\sqrt{(1+nn)}\int dy\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{nnaa}{1+nn}\cdot\frac{1}{nnyy+aa}\right)}\right),$$

ponatur $\frac{nn}{nn+1}=m$ et $\frac{aa}{nnyy+aa}=uu$, erit $\frac{nnyy+aa}{aa}=\frac{1}{uu}$, hincque $y=\frac{a}{n}\cdot\frac{\sqrt{(1-uu)}}{u}$ atque

$$dy=-\frac{a}{n}\cdot\frac{du}{uu\sqrt{(1-uu)}};$$

ubi pro $y=0$ habemus $u=1$, et pro $y=\infty$, $u=0$. Unde fit

$$CN-AM=\frac{-a}{\sqrt{m}}\int\frac{du(1-\sqrt{(1-muu)})}{uu\sqrt{(1-uu)}}$$

ubi $\int\frac{du}{uu\sqrt{(1-uu)}}=\frac{-\sqrt{(1-uu)}}{u}$. Pro altero membro $\frac{-du}{uu\sqrt{(1-uu)}}\cdot\sqrt{(1-muu)}=\sqrt{(1-muu)}\,.\,d\,.\frac{\sqrt{(1-uu)}}{u}$ habebimus

$$\int\frac{-du}{uu\sqrt{(1-uu)}}\cdot\sqrt{(1-muu)}=\frac{\sqrt{(1-uu)(1-muu)}}{u}+\int\frac{mdu\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-muu)}}$$

hincque
$$CN-AM=-\frac{a}{\sqrt{m}}\left(-\frac{\sqrt{(1-uu)}}{u}+\frac{\sqrt{(1-uu)(1-muu)}}{u}+\int\frac{mdu\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-muu)}}\right).$$

At si u evanescit, fit $\sqrt{(1-muu)}=1-\frac{1}{2}\cdot muu$, et pars integrata sponte evanescit, ita ut jam sit

$$CN-AM=-a\sqrt{m}\int\frac{du\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-muu)}},$$

quod integrari debet a termino $u=1$ usque ad $u=0$; sin autem integremus ab $u=0$ usque ad $u=1$, habebimus

$$CN-AM=a\sqrt{m}\int\frac{du\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-muu)}},$$

cujus valor per rectificationem sectionis conicae assignari potest, uti constat. Quemadmodum revera est differentia inter asymtotam et arcum hyperbolae vide Nov. Comm. T. VIII pag. 134 cas. II.

(N. Fuss.)

Erit enim $CN - AM = aC\sqrt{m} - \frac{am}{m-1}(1 - u\sqrt{m})\,\Pi$, ubi Π est arcus a vertice sumtus sectionis conicae, cujus semiparameter $= 1$ et semiaxis transversus $= a$, pro terminis integrationis supra stabilitis.

(J. A. Euler.)

Haec formula
$$\int \frac{du\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-muu)}}$$
duplici modo in seriem evolvi potest.

I. Modus. Cum sit $(1-muu)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}muu + \frac{1.3}{2.4}m^2u^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}m^3u^6 + \text{etc.}$ et

$$\int u^{\lambda+2}du\sqrt{(1-uu)} = \frac{\lambda+1}{\lambda+4}\int u^\lambda du\sqrt{(1-uu)} - \frac{1}{\lambda+4}u^{\lambda+1}(1-uu)^{\frac{3}{2}},$$

ubi postremum membrum ab $u=0$ usque ad $u=1$ sumtum evanescit; quare cum sit $\int du\sqrt{(1-uu)} = \frac{\pi}{4}$, erit

$$\int uudu\sqrt{(1-uu)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$\int u^4du\sqrt{(1-uu)} = \frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$\int u^6du\sqrt{(1-uu)} = \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{\pi}{4}$$
etc.

consequenter fit $CN - AM = \frac{\pi a\sqrt{m}}{4}\left(1 + \frac{1.1}{2.4}m + \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3.3}{4.6}m^2 + \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3.3}{4.6}\cdot\frac{5.5}{6.8}m^3 + \text{etc.}\right)$. Hic notandum si fuerit $m=1$, fore $CN - AM = a\sqrt{m}\int du$, ut fieri debeat $CN - AM = a$, unde sequitur fore

$$1 = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3.3}{4.6} + \text{etc.}\right)$$

ideoque haec series $= \frac{4}{\pi}$. Alter casus, quo $n=0$ et $m=0$, manifesto prodit $CN - AM = 0$.

II. Modus. Ponatur $u = \sin\varphi$, ita ut integrari oporteat a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et habebimus

$$CN - AM = a\sqrt{m}\int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{(1-m\sin^2\varphi)}} = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{(4-2m)}}\int\frac{d\varphi\,(1+\cos 2\varphi)}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{2-m}\cos 2\varphi\right)}}.$$

Sit nunc brevitatis gratia $\frac{m}{2-m} = k = \frac{nn}{2+nn}$ et

$$CN - AM = a\sqrt{\frac{1}{2}k}\int d\varphi\,(1+\cos 2\varphi)(1+k\cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Jam vero est $(1+k\cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}k\cos 2\varphi + \frac{1.3}{2.4}kk\cos^2 2\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\cos^3 2\varphi + \text{etc.}$ Porro notetur esse

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi$$
$$\cos^3 2\varphi = \frac{3}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 6\varphi$$
$$\cos^4 2\varphi = \frac{1.3}{2.4} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi + \frac{1}{8}\cos 8\varphi$$
$$\cos^5 2\varphi = \frac{5}{8}\cos 2\varphi + \frac{5}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{16}\cos 10\varphi$$

$$\cos^6 2\varphi = \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{ etc.}$$

$$\cos^7 2\varphi = 2 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cos 2\varphi + \text{ etc.}$$

$$\cos^8 2\varphi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \text{ etc.}$$

Deinde notetur esse $\int d\varphi \cos 2\lambda\varphi = \frac{1}{2\lambda} \sin 2\lambda\varphi$, quod casu $\varphi = 90^0$ fit $= 0$; unde patet in evolutione omnes terminos $\sin 2\lambda\varphi$ continentes omitti posse, unde nostra formula summatoria erit

$$\int d\varphi (1 + k \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \int d\varphi \left(1 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2} kk + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.3}{2.4} k^4 + \text{ etc.}\right)$$

$$\int d\varphi \cos 2\varphi (1 + k \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \int d\varphi \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} k - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1.3}{2.4} k^3 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} k^5 - \text{ etc.}\right)$$

consequenter $CN - AM =$

$$\frac{1}{2} a\pi \sqrt{\frac{1}{2} k} \left(1 - \frac{1}{4} k + \frac{1.3}{4.4} kk - \frac{1.3.5}{4.4.8} k^3 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} k^4 - \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12} k^5 + \text{ etc.}\right)$$

casu ergo, quo $n = \infty$, fit $k = 1$, hic vero valor fieri debet $= a$, unde sequitur

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.4} - \frac{1.3.5}{4.4.8} + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} - \text{ etc.}\right).$$

Proposita autem vicissim hac serie, ejus valor ita investigari potest. Fiat $k = zz$ et ponatur

$$s = 1 + \frac{1.3}{4.4} z^4 + \frac{1.3}{4.4} \cdot \frac{5.7}{8.8} z^8 + \text{ etc. et}$$

$$t = \frac{1}{4} z^2 + \frac{1.3.5}{4.4.8} z^6 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12} z^{10} + \text{ etc.}$$

ita ut $s - t$ praebeat nostram seriem. Hinc erit

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1.3}{4} z^3 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8} z^7 + \text{ etc.}$$

$$\frac{d.tz}{dz} = \frac{1.3}{4} z^2 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8} \cdot z^6 + \text{ etc. } = \frac{ds}{zdz}$$

hinc $zdt + tdz = \frac{ds}{z}$. Porro

$$\frac{d.sz}{dz} = 1 + \frac{1.3.5}{4.4} z^4 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8} z^8 + \text{ etc.}$$

$$\frac{d.tzz}{dz} = 1 \,.\, z^3 + \frac{1.3.5}{4.4} z^7 + \text{ etc. } = \frac{z^3.d.sz}{dz}$$

hinc $zzdt + 2tzdz = z^4 ds + sz^3 dz$. En ergo has duas aequationes, ex quibus eliminando ds reperitur

$$s = \frac{(1 - z^4)\, dt}{zdz} + \frac{(2 - z^4)\, t}{zz}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} ds = \frac{ddt (1 - z^4)}{zdz} - dt \left(\frac{1}{zz} + 3zz\right) + t \left(-\frac{4}{z^3} - 2z\right) dz \\ + dt \left(\frac{2}{zz} - zz\right) \end{aligned}\right\} = zzdt + tzdz;$$

unde resultat haec aequatio

$$0 = zzddt(1-z^4) + zdzdt(1-5z^4) - tdz^2(4+3z^4),$$

unde si inventum fuerit t, tunc erit $s = \frac{(1-z^4)\,dt}{zdz} + \frac{(2-z^4)\,t}{zz}$.

Illa autem aequatio ad differentialem primi gradus reducitur ponendo $t = e^{\int v dz}$, dum erit $dt = e^{\int v dz}\, v dz$ et $ddt = e^{\int v dz}(dvdz + vvdz^2)$, quibus substitutis reperitur

$$zzdv(1-z^4) + zzvvdz(1-z^4) + vzdz(1-5z^4) - dz(4+3z^4) = 0.$$

Statuatur $v = \frac{q}{z(1-z^4)}$, erit $dv = \frac{dq}{z(1-z^4)} - \frac{qdz(1-5z^4)}{zz(1-z^4)^2}$; quibus substitutis nanciscimur

$$dq + \frac{qqdz}{z(1-z^4)} - \frac{dz(4+3z^4)}{z} = 0.$$

Lemma. Notetur haec reductio $\int z^{m+n-1}dz(1-z^n)^{k-1} = \frac{m}{m+kn}\int z^{m-1}dz(1-z^n)^{k-1}$, si integretur a $z=0$ usque $z=1$.

Alia methodus eandem seriem investigandi. Quaeratur separatim series

$$s = 1 + \frac{1.3}{4.4}kk + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}k^4 + \text{ etc.}$$

$$\text{et } t = \frac{1}{4}k + \frac{1.3.5}{4.4.8}k^3 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12}k^5 + \text{ etc.}$$

Pro priore consideretur formula

$$(1-kkz^4)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}kkz^4 + \frac{1.5}{4.8}k^4z^8 + \frac{1.5.9}{4.8.12}k^6z^{12} + \text{ etc.}$$

hinc erit

$$\int dp(1-kkz^4)^{-\frac{1}{4}} = \int dp + \frac{1}{4}kk\int z^4dp + \frac{1.5}{4.8}k^4\int z^8dp + \text{ etc.}$$

Nunc fiat $\int z^4dp = \frac{3}{4}\int dp$, et $\int z^8dp = \frac{7}{8}\int z^4dp$, et $\int z^{12}dp = \frac{11}{12}\int z^8dp$, erit

$$s = \frac{\int dp(1-kkz^4)^{-\frac{1}{4}}}{\int dp} = 1 + \frac{1.3}{4.4}kk + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}k^4 + \text{ etc.}$$

Ex superiore lemmate habemus $\int\frac{z^{m+3}dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{m}{m+1}\int\frac{z^{m-1}dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$, unde fit

$$\int\frac{z^6dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}, \text{ deinde } \int\frac{z^{10}dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{7}{8}\int\frac{z^6dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}.$$

Unde patet sumi debere $dp = \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$, consequenter erit

$$s = \int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}(1-kkz^4)^{\frac{1}{4}}} : \int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$$

Pro altera serie $t = \frac{1}{4}k + \frac{1.3.5}{4.4.8}k^3 + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12}k^5 + \text{ etc.}$ Consideretur

$$\frac{(1-kkz^4)^{-\frac{1}{4}} - 1}{kzz} = \frac{1}{4}kz^2 + \frac{1.5}{4.8}k^3z^6 + \frac{1.5.9}{4.8.12}k^5z^{10} + \text{ etc.}$$

Fiat $\int z^6dp = \frac{3}{4}\int z^2dp$, $\int z^{10}dp = \frac{7}{8}\int z^6dp$ etc. Hinc $dp = \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$, unde sequitur

$$t = \int \frac{dz\left((1-kkz^4)^{-\frac{1}{4}}-1\right)}{kzz(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} : \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}.$$

Hinc autem neutiquam patet quomodo haec series commodius exprimi possit.

A. m. T. I. p. 258 — 266.

101.

(N. Fuss.)

Si trianguli latera fuerint

$$a = rs(qq+tt), \qquad b = qt(rr+ss), \qquad c = (qr+st)(rt-qs)$$

erit area $= qrst(qr+st)(rt-qs)$.

At si quadrilateri circulo inscripti latera fuerint

$$a = f - pqr, \qquad b = f - pst, \qquad c = f - qsu, \qquad d = f - rtu$$

existente $f = \frac{1}{2}p(qr+st) + \frac{1}{2}u(qs+rt)$, hic scilicet est f semisumma laterum; tum vero area quadrilateri erit

$$= pqrstu.$$

A. m. T. I. p. 326.

102.

(N. Fuss.)

Theorema geometricum. (Fig. 65.) Si quatuor puncta A, B, C, D utcunque fuerint sita, eorumque bina jungantur sex lineis rectis AB, AC, AD, BC, BD, CD, inter has sex lineas talis est relatio, ut sequens aequatio locum obtineat:

$$\begin{aligned} & AB^2 . CD^2(AB^2+CD^2) - AB^2 . CD^2(BC^2+BD^2+AC^2+AD^2) + BC^2 . BD^2 . CD^2 \\ & + AC^2 . BD^2(AC^2+BD^2) - AC^2 . BD^2(AB^2+AD^2+BC^2+CD^2) + AC^2 . AD^2 . CD^2 \\ & + BC^2 . AD^2(BC^2+AD^2) - BC^2 . AD^2(AB^2+AC^2+BD^2+CD^2) + AB^2 . AD^2 . BD^2 \\ & \qquad\qquad + AB^2 . AC^2 . BC^2 = 0 \end{aligned}$$

ubi in tertiae columnae quovis termino tres rectae triangulum constituentes conjunguntur, in prioribus autem columnis ratio compositionis est manifesta.

Demonstratio. Sint latera $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ et diagonales $AC = p$ et $BD = q$. Considerentur anguli x et y, et ex triangulo ABC erit $\cos y = \frac{aa+pp-bb}{2ap} = \alpha$, et ex triangulo ACD erit

$$\cos x = \frac{dd+pp-cc}{2dp} = \beta.$$

At vero ex triangulo ABD erit $\qquad \cos(x+y) = \frac{aa+dd-qq}{2ad} = \gamma;$

hinc ergo erit

$$\sin\frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}$$

unde fiet
$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\alpha)}{4}}+\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}}$$
et
$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}}-\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}}$$
At vero ex tertia aequatione $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$ et $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$, unde nascuntur hae duae aequationes

$$\sqrt{(1-\beta)(1+\alpha)}+\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}=\sqrt{2(1-\gamma)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}-\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}=\sqrt{2(1+\gamma)}.$$

Sumatur prioris quadratum et reperietur $\sqrt{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)}=\alpha\beta-\gamma$, hincque denuo sumtis quadratis: $1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma=0$. Hic igitur tantum opus est, ut pro α, β, γ valores substituantur, scilicet
$$\alpha=\frac{aa+pp-bb}{2ap}, \quad \beta=\frac{dd+pp-cc}{2dp}, \quad \gamma=\frac{aa+dd-qq}{2ad};$$
quo facto et per denominatorem $4aaddpp$ multiplicando, si termini in ordinem redigantur, erit
$$\begin{aligned} &aacc\,(aa+cc)-aacc\,(bb+dd+pp+qq)+aabbpp\\ &+bbdd\,(bb+dd)-bbdd\,(aa+cc+pp+qq)+ccddpp\\ &+ppqq\,(pp+qq)-ppqq\,(aa+bb+cc+dd)+aaddqq\\ &\qquad\qquad+bbccqq=0.\end{aligned}$$

Multo brevius autem hoc negotium fieri potest, posito $x+y=z$; erit $\cos z=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, ergo $\sin x\sin y=\cos x\cos y-\cos z$ et sumtis quadratis $\sin^2x\sin^2y=\cos^2x\cos^2y-2\cos x\cos y\cos z+\cos^2z$ at est
$$\sin^2x\sin^2y=1-\cos^2x-\cos^2y+\cos^2x\cos^2y,$$
ideoque $1-\cos^2x-\cos^2y+2\cos x\cos y\cos z-\cos^2z=0$, hoc est
$$1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma=0;$$
reliqua manent, ut ante. Cum igitur sit
$$\cos x=\frac{dd+pp-cc}{2dp}=\frac{X}{2dp}, \quad \cos y=\frac{aa+pp-bb}{2ap}=\frac{Y}{2ap} \quad \text{et} \quad \cos z=\frac{aa+dd-qq}{2ad}=\frac{Z}{2ad},$$
hincque fiet $1-\frac{XX}{4ddpp}-\frac{YY}{4aapp}-\frac{ZZ}{4aadd}+\frac{XYZ}{4aaddpp}=0$ et per $4aaddpp$ multiplicando
$$4aaddpp-aaXX-ddYY-ppZZ+XYZ=0.$$

Sumto nunc (Fig. 66) in triangulo puncto quocunque, ex quo ad singulos trianguli angulos ducantur rectae x, y, z, erit
$$\begin{aligned} &aaxx\,(aa+xx)-aaxx\,(bb+cc+yy+zz)+aabbcc\\ &+bbyy\,(bb+yy)-bbyy\,(aa+cc+xx+zz)+aayyzz\\ &+cczz\,(cc+zz)-cczz\,(aa+bb+xx+yy)+bbxxzz\\ &\qquad\qquad+ccxxyy=0\end{aligned}$$
quae ita disponi potest
$$\begin{aligned} &aax^4-xxyy\,(aa+bb-cc)-aaxx\,(bb+cc-aa)+aabbcc\\ &+bby^4-xxzz\,(aa+cc-bb)-bbyy\,(aa+cc-bb)\\ &+ccz^4-yyzz\,(bb+cc-aa)-cczz\,(aa+bb-cc)=0.\end{aligned}$$

A. m. T. I. p. 345. 346.

103.

(N. Fuss.)

* **Problema.** (Fig. 67.) Angulum ACB, sive arcum AB in n partes aequales proxime dividere.

Solutio. In AC producta capiatur $Ca = \frac{n-2}{2n-1} AC$; deinde in radio CB capiatur $Cb = \frac{n-2}{n+1} CB$; tum per puncta a, b agatur recta arcum secans in O, eritque BO proxime $\frac{1}{n} AB$. Ita si angulus debeat trisecari, ob $n=3$, erit $Ca = \frac{1}{5} AC$ et $Cb = \frac{1}{4} CB$.

A. m. T. II. p. 26.

104.

(N. Fuss.)

* **Theorema.** (Fig. 68.) Si arcus circuli quincunque ab in duobus punctis p et q utcunque secetur, semper erit

$$\sin n \,.\, aq \,.\, \sin n \,.\, bp = \sin n \,.\, ap \,.\, \sin n \,.\, bq + \sin n \,.\, ab \,.\, \sin n \,.\, pq$$

ubi pro n numerum quemcunque accipere licet.

Hinc si fuerit n numerus valde parvus, erit

$$aq \,.\, bp = ap \,.\, bq + ab \,.\, pq.$$

A. m. T. II. p. 132.

III. Analysis.

105.

(Lexell.)

Criterium pro dignoscendis radicibus rationalibus aequationum cubicarum.

Quum aequationis cubicae ternae radices ita exprimantur:

$$I.\, x = p + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}, \quad II.\, x = p - \frac{(1+\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{q} - \frac{(1-\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{r}, \quad III.\, x = p - \frac{(1-\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{q} - \frac{(1+\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{r}$$

hae tres formae rationales esse nequeunt, nisi $\sqrt[3]{q}$ et $\sqrt[3]{r}$ sequenti modo exhibere liceat: $\sqrt[3]{q} = s + t\sqrt{-3}$ et $\sqrt[3]{r} = s - t\sqrt{-3}$; tum enim fiet

$$I.\, x = p + 2s, \quad II.\, x = p - s - 3t, \quad III.\, x = p - s + 3t;$$

tum autem ipsae litterae q et r similes formas habebunt; erit scilicet $q = u + v\sqrt{-3}$ et $r = u - v\sqrt{-3}$. His praenotatis, consideremus aequationem cubicam: $x^3 = 3fx + 2g$, cujus radicem constat esse

$$x = \sqrt[3]{(g + \sqrt{(gg - f^3)})} + \sqrt[3]{(g - \sqrt{(gg - f^3)})}.$$

Ut ergo omnes tres radices sint rationales, ob $g \pm \sqrt{(gg - f^3)} = u \pm v\sqrt{-3}$, evidens est esse debere $\sqrt{(gg - f^3)} = v\sqrt{-3}$, ideoque $v = \sqrt{\frac{-gg + f^3}{3}}$ et $f^3 - gg = 3vv$, sive $\frac{f^3 - gg}{3} = \square$; unde concludimus, quoties $\frac{f^3 - gg}{3}$ fuerit quadratum, etiam omnes tres radices fore rationales.

Exemplum. Sint radices $I.\, x = 3$, $II.\, x = 7$ et $III.\, x = 10$, unde aequatio resultat $x^3 - 79x + 210 = 0$, sive $x^3 = 79x - 210$, ubi $f = \frac{79}{3}$ et $g = -105$, hinc $f^3 = \frac{493039}{27}$ et $gg = 11025$, ergo $f^3 - gg = \frac{195364}{27}$, consequenter $\frac{f^3 - gg}{3} = \frac{195364}{81}$ et $\sqrt{\frac{f^3 - gg}{3}} = \frac{442}{9}$, unde fit $v = \frac{442}{9}$ et $u = -105$.

Hoc idem autem in genere ita ostenditur: Sint ternae radices $x=a$, $x=b$, $x=-a-b$, ita ut aequatio sit $x^3=(a^2+ab+b^2)x-ab(a+b)$. Hinc fit

$$f=\frac{a^2+ab+b^2}{3} \text{ et } g=\frac{-ab(a+b)}{2}, \quad f^3=\frac{a^6+3a^5b+6a^4b^2+7a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+b^6}{27}$$

et
$$gg=\frac{a^4b^2+2a^3b^3+a^2b^4}{4}, \text{ ergo } \frac{f^3-g^2}{3}=\frac{4a^6+12a^5b-3a^4b^2-26a^3b^3-3a^2b^4+12ab^5+4b^6}{81.4}$$

hinc
$$\sqrt{\frac{f^3-g^2}{3}}=\frac{2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3}{9.2}=\frac{(a-b)(2a+b)(a+2b)}{18}.$$

Observatio I. Quum f^3-g^2 debeat esse triplum quadratum scilicet $3\nu\nu$, sive $f^3=gg+3\nu\nu$, certum est hoc fieri non posse, nisi ipse numerus f jam habeat formam similem $mm+3nn$, unde sequitur, si numerus f in suos factores primos resolvatur, unumquemque fore formae $6\alpha+1$, cujusmodi numeri primi sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97; unde statim ac numerus f factores involverit vel 5, vel 11, vel 17 etc. certum est aequationis omnes radices non esse rationales.

Observatio II. Sit igitur f numerus hujus formae $\alpha\alpha+3\beta\beta$, et quum sit

$$(\alpha\alpha+3\beta\beta)(pp+3qq)=(\alpha p\pm 3\beta q)^2+3(\alpha q\mp\beta p)^2,$$

erit
$$(\alpha\alpha+3\beta\beta)^2=(\alpha\alpha\pm 3\beta\beta)^2+3(\alpha\beta\mp\beta\alpha)^2=(\alpha\alpha-3\beta\beta)^2+3(2\alpha\beta)^2$$

porro
$$(\alpha\alpha+3\beta\beta)^3=(\alpha^3-3\alpha\beta\beta\pm 6\alpha\beta\beta)^2+3(2\alpha\alpha\beta\mp\alpha\alpha\beta\pm 3\beta^3)^2$$

ideoque vel
$$(\alpha\alpha+3\beta\beta)^3=(\alpha^3+3\alpha\beta\beta)^2+3(\alpha\alpha\beta+3\beta^3)^2$$

vel
$$(\alpha\alpha+3\beta\beta)^3=(\alpha^3-9\alpha\beta\beta)^2+3(3\alpha\alpha\beta-3\beta^3)^2.$$

Hinc quum sit $f^3=gg+3\nu\nu$, erit $g=\pm(\alpha^3-9\alpha\beta\beta)$ et $\nu=\pm(3\alpha\alpha\beta-3\beta^3)$; quare si in aequatione $x^3=3fx+2g$ fuerit $f=\alpha\alpha+3\beta\beta$ atque insuper $g=\pm(\alpha^3-9\alpha\beta\beta)$, tum omnes tres radices erunt rationales, et nisi simul fuerit $f=\alpha\alpha+3\beta\beta$ atque $g=\pm(\alpha^3-9\alpha\beta\beta)$, omnes tres radices rationales esse non possunt.

Observatio III. Sin autem f et g tales habuerint formas, ut sit $x^3=3(\alpha\alpha+3\beta\beta)x+2\alpha(\alpha\alpha-9\beta\beta)$, radices certe erunt rationales, quippe quae erunt $x=2\alpha$, $x=-\alpha+3\beta$, et $x=-\alpha-3\beta$. Hinc igitur veritas nostri criterii ita est stabilita, ut non solum praesentia criterii tres radices rationales indicet, sed etiam rationalitas radicum ipsum hoc criterium involvat.

Observatio IV. Videamus autem quoque, quomodo hoc criterium ad formam generalem aequationum cubicarum applicari debeat. Proposita igitur sit forma generalis $z^3+Pz^2+Qz+R=0$; primo ergo ad formam praecedentem revocetur ponendo $z=x-\frac{1}{3}P$, et aequatio resultans erit

$$x^3+(Q-\tfrac{1}{3}P^2)x+\tfrac{2}{27}P^3-\tfrac{1}{3}PQ+R=0,$$

sive
$$x^3=\left(\tfrac{1}{3}P^2-Q\right)x-\tfrac{2}{27}P^3+\tfrac{1}{3}PQ-R,$$

unde pro criterio nostro habebimus $f=\frac{1}{9}P^2-\frac{1}{3}Q$ et $g=-\frac{1}{27}P^3+\frac{1}{6}PQ-\frac{1}{2}R$, unde fit

$$\frac{f^3-gg}{3}=\frac{1}{9.36}PPQQ-\frac{1}{81}Q^3-\frac{1}{81}P^3R+\frac{1}{18}PQR-\frac{1}{12}RR$$

ergo per 324 multiplicando, criterium nostrum postulat, ut sit quadratum sequens forma

$$P^2Q^2-4Q^3-4P^3R+18PQR-27R^2=\square.$$

A. m. T. I. p. 109. 110.

Continuatio.

Sit cubica aequatio $x^3 = fx + g$ omnes radices habens rationales, quae sint α, β, γ; quia earum summa $= 0$, erit $\gamma = -\alpha - \beta$. Jam sint α, β radices hujus aequationis $zz - pz + q = 0$, ubi propterea erit $pp - 4q$ quadratum, haec ergo per $z + p$, hoc est $z + \alpha + \beta$ multiplicata, ipsam propositam producere debet, quae ergo fit $z^3 + (q - pp)z + pq = 0$ sive $z^3 = (pp - q)z - pq$; quocirca erit $f = pp - q$ et $g = -pq$. Quum igitur sit $pp - 4q = \square$, quaeritur quomodo eadem haec conditio per f et g exprimatur, quae est quaestio peculiaris naturae. Multiplicetur $pp - 4q$ per quadratum $p^4 + 2\alpha ppq + \alpha\alpha qq$, ita ut etiam productum

$$p^6 + (2\alpha - 4)p^4q + (\alpha\alpha - 8\alpha)ppqq - 4\alpha\alpha q^3 = \square \quad \text{esse debeat;}$$

manifestum autem est similem formam nasci ex formula $f^3 + \beta gg$; prodit enim $p^6 - 3p^4q + (3 + \beta)ppqq - q^3 = \square$; pro identitate igitur litterae α, β sequenti modo definiuntur: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{-27}{4}$, qui valores etiam postrema membra identica reddunt, ex quo pro rationalitate trium radicum hoc criterium requiritur, ut sit $f^3 - \frac{27}{4}gg = \square$. De hoc autem criterio duo sunt notanda: 1° $f^3 - \frac{27}{4}gg$ debet esse quadratum integrum; 2° hujusmodi aequationes $v^3 = 4fv + 8g$ ad formam simpliciorem ponendo $v = 2x$ debent reduci $x^3 = fx + g$.

A. m. T. I. p. 113. 115.

106.

(Krafft.)

Problema. Si habeatur haec series

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \text{ etc.}$$

ejus quadratum s^2 commode per seriem exprimere. Erit autem

$$\begin{aligned} s^2 = 1 &+ \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{ etc.} \\ &- \frac{2}{1.(1+a)} - \frac{2}{(1+a)(1+2a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+3a)} - \text{ etc.} \ldots (= -2A) \\ &+ \frac{2}{1.(1+2a)} + \frac{2}{(1+a)(1+3a)} + \frac{2}{(1+2a)(1+4a)} + \text{ etc.} \ldots (= +2B) \\ &- \frac{2}{1.(1+3a)} - \frac{2}{(1+a)(1+4a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+5a)} - \text{ etc.} \ldots (= -2C) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Erit vero $$A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)(1+2a)} + \frac{1}{(1+2a)(1+3a)} + \text{ etc.}$$

sive $$A = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \text{ etc.}\right)$$

ergo $A = \frac{1}{a} \cdot 1$. Similiter

$$B = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+3a} - \text{ etc.}\right)$$

ergo $B = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right)$. Eodem modo

$$C = \frac{1}{3a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+5a} + \frac{1}{1+3a} - \frac{1}{1+6a} + \text{ etc.}\right)$$

ergo $C = \frac{1}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right)$ et ita porro. Quocirca fiet

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{ etc.}$$
$$- \frac{2}{a}\cdot 1 + \frac{2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{ etc.}$$

cujus partis posterioris valor ita investigetur: Ponatur

$$z = -\frac{2x}{a}\cdot 1 + \frac{2x^2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^3}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{ etc.}$$

erit
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{a}\cdot 1 + \frac{2x}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{ etc.}$$
$$\frac{xdz}{dx} = \quad -\frac{2x}{a}\cdot 1 \quad + \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) \quad - \text{ etc.}$$

adeoque
$$\frac{(1+x)\,dz}{dx} = -\frac{2}{a} + \frac{2x}{a(1+a)} - \frac{2x^2}{a(1+2a)} + \text{ etc.}$$

Ponatur $x = y^a$, ut habeatur

$$\frac{(1+y^a)\,dz}{ay^{a-1}\,dy} = -\frac{2}{a} + \frac{2y^a}{a(1+a)} - \frac{2y^{2a}}{a(1+2a)} + \text{ etc.}$$

seu
$$\frac{(1+y^a)\,dz}{y^{a-2}dy} = -\frac{2y}{1} + \frac{2y^{a+1}}{1+a} - \frac{2y^{2a+1}}{1+2a} + \text{ etc.}$$
$$\frac{d\,.\,\frac{(1+y^a)\,dz}{y^{a-2}dy}}{dy} = -2 + 2y^a - 2y^{2a} + 2y^{3a} - \text{ etc.} = \frac{-2}{1+y^a}$$

ergo
$$\frac{(1+y^a)\,dz}{y^{a-2}dy} = -2\int\frac{dy}{1+y^a} \quad \text{et} \quad dz = \frac{-2y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a}, \text{ consequenter}$$
$$z = -2\int\frac{y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a}$$

Posito ergo $y = 1$ erit quadratum quaesitum

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \text{ etc. } + z.$$

Hic vero occurrit casus memorabilis, quando $a = 2$, ideoque

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ etc. } = \frac{\pi}{4}$$

tum autem fit
$$z = -2\int\frac{dy}{1+y^2}\cdot\int\frac{dy}{1+y^2} = -(\text{Arc. tang}\,y)^2 = -\frac{\pi^2}{16},$$

unde tandem oritur
$$s^2 = \frac{\pi^2}{16} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ etc. } - \frac{\pi^2}{16}$$

adeoque
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ etc. } = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sin autem fuerit $a = 1$, ideoque

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{ etc. } = \log.2$$

tum
$$z = -2\int\frac{dy}{y(1+y)}\int\frac{dy}{1+y} = -2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}$$

et ponendum erit post integrationem $y = 1$, eritque

$$s^2 = (\log.2)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc. } - 2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}.$$

A. m. T. I. p. 162 — 164.

107.

(N. Fuss.)

Theorema. Proposita serie potestatum quacunque

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \text{ etc.}$$

ejusque sumatur potestas exponentis λ, nempe P^λ, in qua evoluta occurrat terminus $[n]\,x^n$, ejus coëfficiens $[n]$ ita pendebit ab aliquibus praecedentium, ut sit

$$n\,[n] = \begin{smallmatrix} +\lambda\alpha \\ -(n-\alpha) \end{smallmatrix}[n-\alpha] \begin{smallmatrix} +\lambda\beta \\ -(n-\beta) \end{smallmatrix}[n-\beta] \begin{smallmatrix} +\lambda\gamma \\ -(n-\gamma) \end{smallmatrix}[n-\gamma] \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{smallmatrix}$$

quae expressio eousque est continuanda, quamdiu numeri $n-\alpha$, $n-\beta$, $n-\gamma$, etc. non fiunt negativi.

Demonstratio. Ponatur $P^\lambda = S$, erit $lS = \lambda lP$ et $\frac{dS}{S} = \frac{\lambda dP}{P}$, hincque $PdS = \lambda SdP$, quae aequalitas ita repraesentetur $P \cdot \frac{xdS}{dx} = \lambda S \cdot \frac{xdP}{dx}$. Cum igitur sit $P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \text{ etc.}$ erit

$$\frac{xdP}{dx} = \alpha x^\alpha + \beta x^\beta + \gamma x^\gamma + \delta x^\delta + \text{ etc.}$$

Jam in serie S occurrat terminus $[n]\,x^n$, praeter quem considerentur eae potestates, quae per $\frac{xdP}{dx}$ multiplicatae producere possunt potestatem x^n, qui termini ita repraesententur

$$S = \ldots\ldots[n]\,x^n\,[n-\alpha]\,x^{n-\alpha}\,[n-\beta]\,x^{n-\beta} \text{ etc.}$$

Hinc ergo erit

$$\lambda S \frac{xdP}{dx} = \lambda\alpha\,[n-\alpha]\,x^n + \lambda\beta\,[n-\beta]\,x^n + \lambda\gamma\,[n-\gamma]\,x^n + \text{ etc.}$$

Deinde cum ex iisdem terminis sit

$$\frac{xdS}{dx} = n\,[n]\,x^n + (n-\alpha)\,[n-\alpha]\,x^{n-\alpha} + (n-\beta)\,[n-\beta]\,x^{n-\beta} + \text{ etc.}$$

quae in P ducta, pro potestate x^n praebet sequentes terminos

$$n\,[n]\,x^n + (n-\alpha)\,[n-\alpha]\,x^n + (n-\beta)\,[n-\beta]\,x^n + (n-\gamma)\,[n-\gamma]\,x^n + \text{ etc.}$$

Hi igitur termini x^n utrinque debent poni aequales, unde erit

$$n\,[n] + (n-\alpha)\,[n-\alpha] + (n-\beta)\,[n-\beta] + (n-\gamma)\,[n-\gamma] + \text{ etc.} =$$
$$\lambda\alpha\,[n-\alpha] + \lambda\beta\,[n-\beta] + \lambda\gamma\,[n-\gamma] + \lambda\delta\,[n-\delta] + \text{ etc.}$$

unde conficitur

$$n\,[n] = \begin{smallmatrix} \lambda\alpha \\ -(n-\alpha) \end{smallmatrix}[n-\alpha] \begin{smallmatrix} +\lambda\beta \\ -(n-\beta) \end{smallmatrix}[n-\beta] \begin{smallmatrix} +\lambda\gamma \\ -(n-\gamma) \end{smallmatrix}[n-\gamma] \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{smallmatrix} \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium. Cum in serie P exponentes ipsius x sint $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., in serie $S = P^\lambda$ aliae potestates non occurrunt, nisi quarum exponentes sunt summa λ terminorum hujus seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. unde si in hac serie S omnes plane potestates ipsius x occurrant, id erit indicio omnes plane numeros reduci posse ad summam λ terminorum istius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. At si quaepiam potestas x^n non occurrat, tum ejus coëfficiens $[n]$ aequabitur nihilo. Manifestum autem est, nullum coëfficientem fieri posse negativum.

A. m. T. I. p. 335. 336.

Euler uses l for log. y.f.w.

108.

(N. Fuss.)

Theorema. Summa hujus seriei $S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$ etc. est $S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2$.

Demonstratio. Colligantur primo ultimi termini cujusque membri, qui erunt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ etc. } = \frac{\pi\pi}{6}.$$

Deinde his terminis exclusis, colligantur denuo termini extremi cujusque membri:

$$-\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} - \text{ etc. } = -1.$$

His deletis colligantur denuo ultimi termini, qui sunt

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \text{ etc. } = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Simili modo ultimi sequentes erunt

$$-\frac{1}{1.4} - \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.6} - \frac{1}{4.7} - \text{ etc. } = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

Eodem modo sequentium summa erit $+\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ sicque porro. Quare si statuamus

$$t = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{ etc.}$$

erit $S = \frac{\pi\pi}{6} - t$. Jam istam seriem postremam ita repraesentemus:

$$t = x - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{ etc.}$$

unde sumto $x = 1$ nostra series t prodit. Nunc autem fiet

$$\frac{dt}{dx} = 1 - x\left(1 + \frac{1}{2}\right) + x^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - x^3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{ etc.}$$

unde termini primi singulorum terminorum juncti dant

$$1 - x + xx - x^3 + \text{ etc. } = \frac{1}{1+x}.$$

Colligantur porro secundi $\quad -\frac{1}{2}(x - xx + x^3 - x^4 + \text{ etc.}) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1+x}.$

Tertii dabunt $\quad +\frac{1}{3}(xx - x^3 + x^4 - x^5 + \text{ etc.}) = \frac{\frac{1}{3}xx}{1+x}.$

Sequentes erunt $\frac{-\frac{1}{4}x^3}{1+x}$, $\frac{+\frac{1}{5}x^4}{1+x}$, etc. Quamobrem erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx - \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

fractio, cujus numerator $= \frac{1}{x}\,l(1+x)$, sicque $\frac{dt}{dx} = \frac{l(1+x)}{x(1+x)}$. Cum igitur sit $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$, per partes erit

$$dt = \frac{dx}{x} l(1+x) - \frac{dx}{1+x} l(1+x),$$

cujus posterioris membri integrale est $-\frac{1}{2}(l(1+x))^2 = -\frac{1}{2}(l2)^2$.

Pro primo membro $\int \frac{dx}{x} l(1+x)$, id erit

$$\int \frac{dx}{x}\left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}\right)$$
$$= x - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{ etc.}$$

Unde facto $x = 1$, erit haec pars

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12}.$$

Consequenter habebimus $t = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2$, ergo summa seriei propositae.

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2.$$

Theorema. Sequentis seriei

$$S = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \text{ etc.}$$

summa erit $S = \frac{3\pi\pi}{32}$.

Demonstratio. Colligantur hic iterum termini postremi singulorum membrorum:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ etc. } = \frac{\pi\pi}{8}.$$

His deletis reliquorum ultimi termini colligantur, qui sunt

$$-\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \text{ etc. } = -\frac{1}{2}.1.$$

Sequentium ultimi dant $+\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$; sequentes erunt

$$-\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.9} - \frac{1}{5.11} - \text{ etc. } = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

et ita porro. Hinc erit $S = \frac{\pi\pi}{8} - t$, existente $t = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$ Statuatur $t = \frac{xx}{2}\cdot 1 - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$ fietque

$$\frac{dt}{dx} = x - x^3\left(1 + \frac{1}{3}\right) + x^5\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

cujus seriei primi termini collecti dant $x - x^3 + x^5 - x^7 + \text{etc.} = \frac{x}{1+xx}$. Secundi termini:

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{3} + \text{ etc. } = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1+xx};$$

sequentes dabunt $+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1+xx}$, sicque erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{ etc.}}{1+xx} = \frac{\text{Arc. tang } x}{1+xx}$$

consequenter $t = \int \frac{dx}{1+xx}\cdot\int\frac{dx}{1+xx}$, cujus integrale $t = \frac{1}{2}(\text{Arc. tang } x)^2$. Hinc sumto $x = 1$, erit

$$t = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{32}, \quad \text{consequenter} \quad S = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{\pi\pi}{32} = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

Corollarium. Inventa hac summa si ipsam seriem propositam ita tractemus:

$$S = x - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{ etc.}$$

ut fiat

$$\frac{dS}{dx} = 1 - xx\left(1 - \frac{1}{3}\right) + x^4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{ etc.}$$

termini primi dant

$$1 - xx + x^4 - x^6 + \text{ etc. } = \frac{1}{1+xx}$$

$$\text{secundi: } \frac{1}{3}\cdot\frac{xx}{1+xx}, \text{ tertii: } \frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{1+xx}, \text{ ideoque } \frac{dS}{dx} = \frac{1}{x(1+xx)}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Est vero $\frac{1}{x(1+xx)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+xx}$, ergo

$$S = \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx} - \int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Cum igitur sit

$$\int\frac{dx}{1-xx} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{ etc.}$$

erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx} = x + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} + \text{ etc.}$$

Posito ergo $x = 1$, erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ etc. } = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Quare cum $S = \frac{3\pi\pi}{32}$, erit $\frac{3\pi\pi}{32} = \frac{\pi\pi}{8} - \int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}$; unde sequitur

$$\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx} = \frac{\pi\pi}{32},$$

quem valorem non video quomodo directe erui posset.

Problema. Hanc seriem, secundum numeros primos progredientem,

$$s = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \text{ etc.}$$

ubi numeri primi formae $4n - 1$ habent signum $+$, reliqui formae $4n + 1$ signum $-$, in seriem convergentem convertere.

Solutio. Hoc duplici modo fieri potest. Cum enim primo sit productum

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13} \text{ etc. } = 1,$$

ubi denominatores sunt numeri primi, numeratores vero pariter pares, unitate vel majores vel minores, sequitur fore

$$s = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{11}\left(1 - \frac{4.4.8}{3.5.7}\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \text{ etc.}$$

Deinde cum sit $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}$ etc. $= 1$, hinc sequitur fore

$$s = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{2.6}{3.5}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{11}\left(\frac{2.6.6}{3.5.7}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right)$$
$$- \frac{1}{13}\left(1 - \frac{2.6.6.10}{3.5.7.11}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \text{ etc.}$$

quae ambae series manifesto valde convergunt.

Theorema. Posito $\frac{\pi}{4} = q$, si summae sequentium serierum ponantur:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{ etc. }=Aq.$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\text{ etc. }=2Bqq.$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{ etc. }=4Cq^3$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\text{ etc. }=8Dq^4$$

etc.

coefficientes ita a se invicem pendent, ut sit

$$A=1,\quad B=1,\quad C=\frac{2AB}{4},\quad D=\frac{2AC+BB}{6},\quad E=\frac{2AD+2BC}{8},\quad F=\frac{2AE+2BD+CC}{10},\quad \text{etc.}$$

unde colliguntur isti valores

$$A=1,\quad B=1,\quad C=\frac{1}{2},\quad D=\frac{1}{3},\quad E=\frac{5}{24},\quad F=\frac{2}{15},\quad G=\frac{61}{720},\quad H=\frac{17}{315}\quad \text{etc.,}$$

ubi insuper litterae seorsim per 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. multiplicari debent. Hinc istos numeros ulterius continuavi, quos ergo cum potestatibus ipsius q sequenti modo repraesento. Prior columna valet pro potestatibus imparibus, posterior vero pro paribus:

$Aq\ =1.q$	$Bq^2=1.2q^2$
$Cq^3=\frac{1}{2}\cdot 4q^3$	$Dq^4=\frac{1}{3}\cdot 8q^4$
$Eq^5=\frac{5}{8.3}\cdot 16q^5$	$Fq^6=\frac{2}{3.5}\cdot 32q^6$
$Gq^7=\frac{61}{16.9.5}\cdot 64q^7$	$Hq^8=\frac{17}{9.5.7}\cdot 128q^8$
$Jq^9=\frac{277}{128.9.7}\cdot 256q^9$	$Kq^{10}=\frac{2.31}{81.5.7}\cdot 512q^{10}$
$Lq^{11}=\frac{19.2659}{256\ 81.25.7}\cdot 1024q^{11}$	$Mq^{12}=\frac{2.691}{81.25.7.11}\cdot 2048q^{12}$
etc.	etc.

Quodsi litterae posterioris columnae ordine dividantur per hos numeros 2.3, 2.15, 2.63, etc. prodeunt meae fractiones $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{945}$, $\frac{1}{9450}$, etc.

Supra habuimus haec duo producta

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\text{ etc. }=1\quad\text{et}\quad\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\text{ etc. }=1;$$

horum prius per posterius divisum dat: $1\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{20}{22}\cdot$ etc. $=1$. Hae fractiones invertantur et sumantur logarithmi, eritque

$$l\frac{6}{4}+l\frac{6}{8}+l\frac{10}{12}+l\frac{14}{12}+\text{ etc. }=0.$$

Cum igitur sit $l\frac{6}{4}=l\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$, $l\frac{6}{8}=l\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}$, etc. evolutis logarithmis semissis dabit hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}\\ -\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^7}\\ -\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{11^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11^7}\\ +\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13^7}\end{array}\right\}\text{ etc. }=0.$$

Hinc ergo erit

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\text{ etc.}\\ +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\text{ etc.}\right)\\ +\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}+\frac{1}{17^5}-\text{ etc.}\right)\\ \text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Hinc porro

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\text{ etc. }=S=\frac{1}{3}$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\text{ etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}+\frac{1}{17^5}-\text{ etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}-\frac{1}{11^7}+\frac{1}{13^7}+\frac{1}{17^7}-\text{ etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Unde sequitur nostram seriem S aliquantillo majorem esse quam $\frac{1}{3}$.

Observatio. Per similes rationes inveni, si omnes numeri primi in duas partes dividantur unitate differentes, ac pro numeris primis formae $8n+1$ vel $8n+3$ partes majores pro numeratoribus, minores vero pro denominatoribus sumantur; pro his autem numeris $8n-1$ vel $8n-3$ minores pro numeratoribus et majores pro denominatoribus sumantur, productum omnium harum fractionum erit $=1$, hoc est

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\text{ etc. }=1.$$

Corollarium. Transformatio seriei $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+$ etc. etiam hoc modo referri potest:

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)\left(\text{etc. }-1+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}-\text{ etc.}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(Q\left(1+\frac{1}{3^5}\right)\left(1-\frac{1}{5^5}\right)\left(1+\frac{1}{7^5}\right)\left(\text{etc. }-1+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}-\text{ etc.}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(R\left(1+\frac{1}{3^7}\right)\left(1-\frac{1}{5^7}\right)\left(1+\frac{1}{7^7}\right)\left(\text{etc. }-1+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{11^7}-\text{ etc.}\right)\right)$$
$$\text{etc.}$$

ubi $P=4Cq^3$, $Q=16Eq^5$, $R=64Gq^7$, etc.

A. m. T. III. p. 104 — 107.

IV. Calculus integralis.

109.

(J. A. Euler.)

Si ponatur $y = \frac{bp + aq}{ap + bq}$, erit $1 - yy = \frac{(aa - bb)(pp - qq)}{(ap + bq)^2}$, ideoque

$$\frac{\sqrt{(aa - bb)(pp - qq)}}{ap + bq} = \sqrt{(1 - yy)} \quad \text{et} \quad dy = \frac{(aa - bb)(pdq - qdp)}{(ap + bq)^2}.$$

Hinc fit $\frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{(pdq - qdp)\sqrt{(aa - bb)}}{(ap + bq)\sqrt{(pp - qq)}}$, ergo

$$\int \frac{(pdq - qdp)\sqrt{(aa - bb)}}{(ap + bq)\sqrt{(pp - qq)}} = \text{Arc. sin} \frac{bp + aq}{ap + bq}.$$

I. Sit $p = 1$ et $q = x$, erit $\int \frac{dx \sqrt{(aa - bb)}}{(a + bx)\sqrt{(1 - xx)}} = \text{Arc. sin} \frac{b + ax}{a + bx}$.

II. Sit $p = 1 + xx$ et $q = x\sqrt{2}$, erit $pdq - qdp = (1 - xx)\, dx\sqrt{2}$ et $pp - qq = 1 + x^4$, unde fiet

$$\int \frac{dx\,(1 - xx)\sqrt{2}\,(aa - bb)}{(a(1 + xx) + bx\sqrt{2})\sqrt{(1 + x^4)}} = \text{Arc. sin} \frac{b(1 + xx) + ax\sqrt{2}}{a(1 + xx) + bx\sqrt{2}}.$$

A. m. T. I. p. 238.

110.

(J. A. Euler.)

Specimen methodi facilis Analysin infinitorum indeterminatam tractandi.

1. Sit propositum problema de inveniendis curvis algebraicis, quae sint rectificabiles.

Sint coordinatae hujusmodi curvarum x et y, quae ergo quantitates algebraicae esse debent, eritque arcus curvae $= \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, qui etiam quantitas algebraica esse debet, quae sit $= s$, atque habebitur

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds \quad \text{sive} \quad dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

2. Ponatur ergo $dx = ds \cos\varphi$ et $dy = ds \sin\varphi$, ubi $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ algebraice exprimi debent. Ponatur $x = s\cos\varphi + p$ et $y = s\sin\varphi + q$, atque ut hinc fiat $dx = ds\cos\varphi$ et $dy = ds\sin\varphi$, non obstante variabilitate quantitatum p, q et φ, necesse est ut sit $-sd\varphi\sin\varphi + dp = 0$ et $sd\varphi\cos\varphi + dq = 0$; unde patebit, quomodo hae quantitates a se invicem pendere debent. Habebimus ergo $s = \frac{dp}{d\varphi \sin\varphi} = \frac{-dq}{d\varphi\cos\varphi}$, quae posterior aequalitas praebet $dp\cos\varphi = -dq\sin\varphi$, hincque $\tang\varphi = -\frac{dp}{dq}$.

3. Sumta ergo inter quantitates p et q relatione quacunque algebraica, ita ut sit vel q functio ipsius p, vel p functio ipsius q, erit etiam $\frac{dp}{dq}$ quantitas algebraica: capi ergo debet $\tang\varphi = -\frac{dp}{dq}$, unde tam $\sin\varphi$ quam $\cos\varphi$ definitur, tum vero accipi debet $s = \frac{dp}{d\varphi\sin\varphi} = \frac{-dp}{d.\cos\varphi}$, ideoque etiam s erit quantitas algebraica, uti requiritur.

4. Invento autem s habebimus pro curva quaesita: $x = s\cos\varphi + p$ et $y = s\sin\varphi + q$. Sicque ex aequatione algebraica quacunque inter p et q pro lubitu assumta semper curva algebraica rectificabilis deduci potest.

(Lexell.)

5. At si curva desideretur algebraica, cujus rectificatio a data quadratura pendeat, solutio ita institui poterit:

Ponatur $dx^2 + dy^2 = ds^2$, ita ut jam s non debeat esse quantitas algebraica, ac statuatur $dy = ndx$, eritque $ds = dx\sqrt{(1+nn)}$, integralia vero statuantur $y = nx + p$ et $s = x\sqrt{(1+nn)} + q$, atque habebimus $xdn + dp = 0$ et $\frac{nxdn}{\sqrt{(1+nn)}} + dq = 0$, unde fit $x = -\frac{dp}{dn} = -\frac{dq\sqrt{(1+nn)}}{ndn}$, hincque porro $\frac{\sqrt{(1+nn)}}{n} = \frac{dp}{dq}$, ergo obtinebimus $n = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 - dq^2)}}$ et $\sqrt{(1+nn)} = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 - dq^2)}}$. Quo valore ipsius n invento pro curva quaesita colligimus

$$x = -\frac{dp}{dn},\quad y = nx + p = -\frac{ndp}{dn} + p = \frac{pdn - ndp}{dn} \quad \text{et} \quad s = -\frac{dp\sqrt{(1+nn)}}{dn} + q.$$

6. Hic ergo q non debet esse quantitas algebraica, sed tamen ejusmodi, ut quantitas $\frac{dp}{dq}$ fiat quantitas algebraica. Ad hoc praestandum sit $\int Pdp$ quadratura illa, a qua rectificatio pendere debet, ita ut summa Pdp non sit quantitas algebraica, ac ponatur $q = \int Pdp$, unde tamen fiet $\frac{dq}{dp} = P$, hinc autem fit $n = \frac{P}{\sqrt{(1-PP)}}$ et $\sqrt{(1+nn)} = \frac{1}{\sqrt{(1-PP)}}$; et nunc curva quaesita his formulis definitur

$$x = -\frac{dp\,(1-PP)^{\frac{3}{2}}}{dP},\quad y = -\frac{Pdp\,(1-PP)}{dP} + p$$

quae sunt quantitates algebraicae; at vero arcus curvae prodit

$$s = -\frac{dp\,(1-PP)}{dP} + \int Pdp.$$

7. Haec solutio adhuc generalior reddi potest; sumta enim pro T functione quacunque algebraica ipsius p, si capiatur $q = T + \int Pdp$, tum $\frac{dq}{dp}$ ac propterea etiam n fiet quantitas algebraica, ac proinde etiam x et y, at vero pro arcu habebitur $s = -\frac{dp\sqrt{(1+nn)}}{dn} + T + \int Pdp$.

8. At solutio adhuc generalior reddi potest, si pro v accipiatur functio quaecunque algebraica ipsius p; tum vero V ejusmodi functionem algebraicam ipsius v denotet, ut $\int Vdv$ quadraturam praescriptam involvat; problemati enim satisfiet ponendo $q = T + \int Vdv$.

9. Si insuper haec conditio adjiciatur, ut non obstante, quod curva non sit rectificabilis, tamen unum, vel duos, vel tres, vel quotcunque volueris habeat arcus absolute rectificabiles. Hic scilicet totum negotium huc redit, ut in postrema solutione $\int Vdv$ certis casibus evanescat, seu exhiberi debet ejusmodi curva algebraica, cujus area in genere sit $\int Vdv$, quae tamen certis casibus evanescat.

10. Quadratura proposita est area certae abscissae respondens, ac pro abscissa $= z$ designetur area per $\Pi : z$, ita ut sit $\Pi : z = \int Zdz$ siquidem Z applicatam denotet. Aream autem ita definiri ponamus, ut sit $\Pi : 0 = 0$. Quodsi jam area desideretur, quae casibus $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$ evanescat, tantum capiatur $Z = (p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)$, quocirca in solutione superiori postrema sumatur $v = (p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)$ etc. vel generalius

$$v = (p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma) \text{ etc. } P;$$

tum enim sumta pro V tali functione ipsius v, ut proposita quadratura obtineatur, tum curva ibi descripta absolute erit rectificabilis casibus $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$, etc.

His expositis aggrediamur simili ratione problema nostrum principale, quo debet esse $dx^2\sin^2 y + dy^2 = dr^2$, ubi litterae x, y et r sunt arcus circulares, quorum sinus cosinusve demum fiunt quantitates algebraicae. Nunc autem analysis nostra ordinem retrogradum teneat. Incipiamus igitur a positione $dx \sin y = dr \sin \omega$ et $dy = dr \cos \omega$; quia autem non y, sed $\sin y$ vel $\cos y$ debet esse quantitas algebraica, posteriorem aequationem ita referamus: $dy \sin y = dr \cos \omega \sin y$, et integrale debet esse algebraicum. Quod ut fieri possit statuamus

$$\cos \omega \sin y = p \cos r + q \sin r,$$

ut sit

$$dy \sin y = pdr \cos r + qdr \sin r$$

cujus integrale ponamus $p \sin r - q \cos r = -\cos y$, aut $\cos y = q \cos r - p \sin r$, esseque debeat

$$\sin r \,.\, dp - \cos r \,.\, dq = 0 \quad \text{seu} \quad \operatorname{tang} r = \frac{dq}{dp}.$$

Deinde ob $\cos y$ inventum etiam $\sin y$ innotescit, unde ex facta hypothesi $\cos \omega \sin y = p \cos r + q \sin r$ obtinemus $\cos \omega = \frac{p \cos r + q \sin r}{\sin y}$. (Si haec cum superioribus comparentur, videmus esse $q = \cos \theta$, $p = -\sin \theta \cos \psi$, unde pulchre sequitur

$$\cos \omega = \frac{\cos \theta \sin r - \sin \theta \cos r \cos \psi}{\sin y}$$

deinde etiam eleganter consentit valor

$$\operatorname{tang} r = \frac{dq}{dp} = \frac{d\theta \sin \theta}{d(\sin \theta \cos \psi)}$$

prorsus etiam ut supra.)

Videamus nunc etiam quomodo pro altera parte dx ratiocinium prosequi debeat: Erat autem

$$dx \sin y = dr \sin \omega, \quad \text{unde fit} \quad dx = \frac{dr \sin \omega}{\sin y},$$

at jam invenimus

$$\cos y = q \cos r - p \sin r \quad \text{et} \quad \sin y = \sqrt{(1 + 2pq \sin r \cos r - qq \cos^2 r - pp \sin^2 r)} \quad \text{et} \quad \cos \omega = \frac{p \cos r + q \sin r}{\sin y},$$

unde $\sin \omega = \frac{\sqrt{(1 - pp - qq)}}{\sin y}$ atque $dx = \frac{dr}{\sqrt{(1 - pp - qq)}}$. (Consulamus iterum primam solutionem, ubi erat $dx = d\xi + d\varphi$ eritque $d\varphi = \frac{d\theta}{\operatorname{tang} \psi \sin \theta}$; jam autem invenimus:

$$p = -\sin \theta \cos \psi, \; q = \cos \theta, \; \sin \theta = \sqrt{(1 - qq)}, \; d\theta = -\frac{dq}{\sqrt{(1 - qq)}},$$

$$\cos \psi = -\frac{p}{\sqrt{(1 - qq)}}, \; \sin \psi = \frac{\sqrt{(1 - pp - qq)}}{\sqrt{(1 - qq)}}, \; \operatorname{tang} \psi = -\frac{\sqrt{(1 - pp - qq)}}{p},$$

consequenter

$$d\varphi = \frac{pdq}{(1 - qq)\sqrt{(1 - pp - qq)}},$$

quo valore substituto colligitur

$$d\xi = dx - d\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - pp - qq)}} \left(\frac{pdq}{1 - qq} - \frac{dqddp}{dq^2 + dp^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - pp - qq)}} \left(\frac{pdq^3 + pdp^2 dq - dqddp + qqdq \,.\, ddp}{(1 - qq)(dq^2 + dp^2)} \right)$$

quod novimus esse differentiale arcus ξ cujus cotangens est

$$= \frac{\frac{dp}{dq}(1 - qq) + pq}{\sqrt{(1 - pp - qq)}}.$$

Quarum formularum evolutio nimis est difficilis.)

Aliud tentamen. Quum esse debeat $dx = \frac{dr \sin \omega}{\sin y}$, ponamus $dx = d\xi + d\varphi$, eritque

$$d\xi = dx - d\varphi = \frac{dr \sin \omega}{\sin y} - d\varphi,$$

ubi ξ et φ sunt etiam arcus, quare dividatur per $\sin^2 \xi$, ut habeatur

$$\frac{d\xi}{\sin^2 \xi} = \frac{dr \sin \omega}{\sin y \sin^2 \xi} - \frac{d\varphi}{\sin^2 \xi},$$

quod ergo integrabile esse debet. In hunc finem statuatur

$$\frac{\sin\omega}{\sin y \sin^2\xi} = \frac{u}{\sin^2 r},$$

ubi u non involvat r, simulque integrale fingatur $-\cot\xi = -u\cot r + t$; unde differentiando fit

$$\frac{d\xi}{\sin^2\xi} = \frac{udr}{\sin^2 r} - du\cot r + dt = \frac{udr}{\sin^2 r} - \frac{d\varphi}{\sin^2\xi},$$

sicque erit $du\cot r - dt = \frac{d\varphi}{\sin^2\xi}$. Ex quo colligitur $d\varphi = (du\cot r - dt)\sin^2\xi$, quia $\cot\xi = \frac{u\cos r - t\sin r}{\sin r}$, hinc

$$\sin\xi = \frac{\sin r}{\sqrt{(\sin^2 r + (u\cos r - t\sin r)^2)}}, \quad \cos\xi = \frac{u\cos r - t\sin r}{\sqrt{(\sin^2 r + (u\cos r - t\sin r)^2)}}.$$

Jam vero posueramus $\frac{\sin\omega}{\sin y\sin^2\xi} = \frac{u}{\sin^2 r}$, ubi loco $\sin\xi$ valorem substituendo

$$\sin\omega\,(uu\cos^2 r - 2tu\sin r\cos r + (1+tt)\sin^2 r) = u\sin y$$

at vero praecedens operatio praebuerat $\sin\omega = \frac{\sqrt{(1-pp-qq)}}{\sin y}$, qui valor substitutus dat

$$(uu\cos^2 r - 2tu\sin r\cos r + (1+tt)\sin^2 r)(1-pp-qq) = u\sin^2 y = u\,(1 + 2pq\sin r\cos r - pp\sin^2 r - qq\cos^2 r)$$

ex qua aequatione relatio inter p, q et t, u debet definiri, ubi imprimis notasse juvabit, has quantitates p, q, t, u angulum r non involvere debere; unde sequitur aequationem illam aeque subsistere, sive ponatur $r = 0$, sive $r = 90^0$. At positio $r = 0$ dat $uu\sqrt{(1-pp-qq)} = u(1-qq)$ et $u = \frac{1-qq}{\sqrt{(1-pp-qq)}}$; altera positio $r = 90^0$ praebet $(1+tt)\sqrt{(1-pp-qq)} = u(1-pp)$, quae in illam ducta dat

$$(1+tt)(1-pp-qq) = (1-pp)(1-qq)$$

unde

$$t = -\frac{pq}{\sqrt{(1-pp-qq)}}.$$

Sicque t et u definimus per p et q, atque jam omnibus conditionibus problematis est satisfactum, praeterquam quod adhuc valor anguli φ debet determinari. Verum supra invenimus

$$d\varphi = (du\cot r - dt)\sin^2\xi.$$

At cum sit

$$\cot\xi = \frac{u\cos r - t\sin r}{\sin r} = \frac{(1-qq)\cos r - pq\sin r}{\sin r\sqrt{(1-pp-qq)}}$$

$$du = \frac{pdp(1-qq) + qdq(-1+2pp+qq)}{(1-pp-qq)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dt = \frac{-qdp(1-qq) - pdq(1-pp)}{(1-pp-qq)^{\frac{3}{2}}}$$

praeterea est $\sin r = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2+dq^2)}}$ et $\cot r = \frac{dp}{dq}$, erit ergo

$$du\cot r - dt = \frac{pdp^2(1-qq) - 2qdpdq(1-pp-qq) + pdq^2(1-pp)}{dq(1-pp-qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

In superiori tentamine omnia manent usque ad valorem ipsius t, qui cum inventus sit ex aequatione quadratica, sumi debet $t = -\frac{pq}{\sqrt{(1-pp-qq)}}$, unde statim prodit

$$du\cot r - dt = dq\,.\frac{(p\cot^2 r(1-qq) - q\cot r(1-2pp-qq) + q\cot r(1-qq) + p(1-pp))}{(1-pp-qq)^{\frac{3}{2}}}$$

quae posito $dp = dq\cot r$ abit in

$$du\cot r - dt = pdq\left(\frac{p\cot^2 r(1-qq) + 2pq\cot r + p(1-pp)}{(1-pp-qq)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Cum vero $\cot\xi = u\cot r - t = \frac{(1-qq)\cot r + pq}{\sqrt{(1-pp-qq)}}$, erit

$$\sin^2\xi = \frac{1-pp-qq}{(1-qq)(1-pp+2pq\cot r+(1-qq)\cot^2 r)}$$

unde denique fit

$$d\varphi = \frac{pdq}{(1-qq)\sqrt{(1-pp-qq)}}.$$

Ubi commode usu venit, ut solum differentiale dq hic insit, alterum vero dp una cum tangente r ex calculo excesserit; hanc ob rem non p per q ita definiamus, ut haec formula ad arcum circuli reducatur, sed potius relationem inter quantitates q et $\sin\varphi$ tanquam cognitam spectemus, quam adeo pro lubitu assumere licebit; tum igitur $\frac{d\varphi}{dq}$ erit quantitas algebraica et vocetur $\frac{d\varphi}{dq} = s$, atque ex aequatione $s = \frac{p}{(1-qq)\sqrt{(1-pp-qq)}}$ determinemus quantitatem p; quia enim $\sqrt{(1-pp-qq)} = \frac{p}{s(1-qq)}$ erit $1-pp-qq = \frac{pp}{ss(1-qq)^2}$, unde reperiri potest p et sequens solutio completa concluditur:

1. Constituta relatione quacunque algebraica inter $\sin\varphi$ et q, positoque $\frac{d\varphi}{dq} = s$, quaeratur quantitas p ex hac aequatione $\sqrt{(1-pp-qq)} = \frac{p}{s(1-qq)}$.
2. Inventa hac quantitate p sumatur $\operatorname{tang} r = \frac{dq}{dp}$, atque hinc porro
$$u = \frac{1-qq}{\sqrt{(1-pp-qq)}},\quad t = -\frac{pq}{\sqrt{(1-pp-qq)}} = -sq(1-qq).$$
3. Deinde quaeratur arcus y, ut sit $\cos y = q\cos r - p\sin r$.
4. Hinc porro angulus ξ, ut sit $\cot\xi = u\cot r - t$, quo angulo invento habebimus $x = \xi + \varphi$, sicque problema expedite est solutum.

NB. Hic autem etiamnunc desideratur criterium, ex quo pateat in formula $d\varphi = (du\cot r - dt)\sin^2\xi$ quantitatem $\cot r$ ex calculo tolli; in hoc ipso enim vis methodi consistit, ut r ex calculo excedat, propterea quod $\operatorname{tang} r$ per dp et dq determinatur. Ad hoc ergo criterium, ob

$$\sin^2\xi = \frac{1}{1+tt-2tu\cot r+uu\cot^2 r}$$

requiritur, ut ostendatur ex expressione

$$d\varphi = \frac{du\cot r - dt}{uu\cot^2 r - 2tu\cot r + 1 + tt}$$

omnino tolli $\cot r$, propterea quod sit $\operatorname{tang} r = \frac{dq}{dp}$; hinc enim etiam ratio differentialium dt et du quantitatem $\cot r$ involvet, sed quomodo? Supra invenimus $u\sqrt{(1-pp-qq)} = 1-qq$, $(1+tt)(1-pp-qq) = (1-pp)(1-qq)$, $(1+tt)\sqrt{(1-pp-qq)} = u(1-pp)$, $\frac{1+tt}{u} = \frac{u(1-pp)}{1-qq}$, $\frac{(1+tt)(1-qq)}{uu} = 1-pp$, $pp = 1 - \frac{(1+tt)(1-qq)}{uu}$, $1-pp-qq = \frac{1+tt-qq(1+tt+uu)}{uu}$, $1+tt-qq(1+tt+uu) = 1-2qq+q^4$, unde pro determinando q haberetur haec aequatio

$$q^4 - qq(1-tt-uu) = tt$$

Unde patet praestare loco t et u valores per p et q introducere, uti fecimus, ubi ob $dp = dq\cot r$ statim se prodidit criterium quaesitum.

Notatu etiam dignum est, quod prodeat $d\varphi = -\frac{tdq}{q(1-qq)}$, ubi jam neque p neque u inest, ita ut ex relatione $\frac{d\varphi}{dq} = s$ habeatur $t = -sq(1-qq)$.

A. m. T. I. p. 37 — 41.

XXIV.

Supplementum editi A. MDCCCXLIII Commercii epistolici

(Correspondance mathém. et phys. St.-Pétersb. 1843. 8°. T. I. II),

varias ipsius Ill. Euleri litteras, postea detectas, ac hucusque ineditas, continens.

A. Sex litterae ad Nicolaum Bernoullium II, Basileensem, J. U. D.*) datae 1742 ad 1745.

1.

Viro Consultissimo atque Amplissimo Nicolao Bernoulli S. P. D. Leonhardus Euler.

Cum acutissimum ingenium Tuum semper plurimum sum veneratus, tum me Tibi, Vir Celeberrime, maxime obligatum agnosco, quod non solum olim insigni me benevolentia sis complexus, sed etiam mea qualiacunque inventa mathematica digna judicaveris, quae examini Tuo exquisitissimo subjiceres. Ne igitur graveris gratiarum actionem debitam, etsi sero, tamen ex animo officii plenissimo profectam benevole accipere, vehementer etiam atque etiam rogo. Ad hoc peropportunam occasionem mihi praebuit Vir Clarissimus Hagnauer J. U. D. qui hinc in Patriam reversus a me litteras commendatorias petiit ad universitatis nostrae proceres, praecipue Jureconsultos: quem itaque Virum Tibi, Vir Consultissime, tantum commendo, quantum mea commendatio valere potest.

Profundissima Tua investigatio summae seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. quam sextanti quadrati ipsius π, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, aequalem invenerunt, non solum me maximo affecit gaudio, sed etiam universa Academia Petropolitana auctoritatem Commentariorum plurimum amplificari est arbitrata, si illud schediasma Tuum insereretur: id itaque Tomo IX esse insertum aegre haud feres, cujus Classis Mathematica, cum Petropoli abirem, jam typis erat expressa. Sine dubio jam inspexisti methodum meam, qua summas hujusmodi serierum altioris cujusque potestatis paris definivi, quamque ex divisoribus aequationis infiniti gradus derivavi. Interim tamen fateri cogor, nisi consensum summarum illarum cum veritate aliunde essem expertus, me non ausum fuisse eas pro veris venditare. Cum enim aequationis illius infinitae

$$x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

inter arcum circuli s ejusque sinum x, a posteriori infinitas radices ipsius s cognoscerem, dubius tamen haerebam, an ista aequatio non alias radices imaginarias, praeter assignatas, involveret, quod si usu veniret, summae inventae cum veritate consistere non possent. Quamquam autem nunc quidem demonstrare possum, hanc expressionem

*) Filium Nicolai, summorum geometrarum Jacobi et Johannis fratris, auctorem tractatus *De Arte conjectandi in jure*, natum d. 10 Octobr. 1687, mortuum d. 29 Novembr. 1759.

$$s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\frac{s^7}{5040}+\text{ etc.}$$

(quoniam ad hoc binomium

$$\frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

reducitur, existente n numero infinito, atque hujusmodi binomiorum omnes divisores assignari possunt), esse productum ex his factoribus

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{16\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

unde in genere hujus seriei

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{ etc.}$$

summa, si m fuerit numerus par, exhiberi potest. Tamen huic methodo aliam magis genuinam, a me nuper detectam, praefero, quam sublimi judicio Tuo, Vir Amplissime, omni observantia submitto.

Quaesivi per solitas integrationis regulas integrale hoc

$$\int\frac{x^{p-1}dx}{1+x^q},$$

idque partim a logarithmis partim a quadratura circuli ita pendere deprehendi, ut si addatur

$$\int\frac{x^{q-p-1}dx}{1+x^q},$$

in integrali summae partes a logarithmis pendentes se mutuo destruant, eae vero, quae quadraturam circuli postulant, duplicentur. Investigavi igitur integrale hujus formulae

$$\int\frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1-x^q}\cdot dx$$

ita sumtum, ut evanescat posito $x=0$; quo facto, posui $x=1$, atque inveni integrale hoc casu ad hunc valorem

$$\frac{\pi}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}$$

reduci, ubi π denotat circumferentiam circuli cujus radius $=1$, in quo eodem circulo sinum arcus $\frac{p\pi}{q}$ accipi oportet. Simili modo demonstravi integrale hujus formae

$$\int\frac{x^{p-1}-x^{q-p-1}}{1-x^q}\cdot dx$$

eodem casu, quo post integrationem ponitur $x=1$, abire in

$$\frac{\pi\cos A\frac{p\pi}{q}}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}.$$

Quodsi ergo illae formulae per series integrentur, atque tum ponatur $x=1$, prodibunt duarum harum serierum summae:

$$\frac{\pi}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}+\frac{1}{3q-p}-\frac{1}{3q+p}-\frac{1}{4q-p}+\text{ etc.}:$$

$$\frac{\pi\cos A\frac{p\pi}{q}}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q-p}+\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}-\frac{1}{3q-p}+\frac{1}{3q+p}-\frac{1}{4q-p}+\text{ etc.}$$

Si igitur ponam $\frac{p}{q}=z$, quicunque valor tribuatur ipsi z, semper hae summae erunt veritati consentaneae:

$$\frac{\pi}{\sin A\pi z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{2+z}+\frac{1}{3-z}-\text{ etc. et}$$

$$\frac{\pi\cos A\pi z}{\sin A\pi z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{2+z}-\frac{1}{3-z}+\text{ etc.}$$

Cum veritate ergo consensus manebit, si differentientur quoties libuerit. Quare cum sit

$$d.\sin A\pi z=\pi dz\cos A\pi z,\quad\text{et}\quad d.\cos A\pi z=-\pi dz\sin A\pi z,$$

prodibunt, divisione per dz utrinque facta, sequentes series

$$\frac{\pi\pi\cos A\pi z}{(\sin A\pi z)^2}=\frac{1}{zz}-\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(2-z)^2}+\frac{1}{(2+z)^2}-\frac{1}{(3-z)^2}-\text{ etc. et}$$

$$\frac{\pi\pi}{(\sin A\pi z)^2}=\frac{1}{zz}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(2-z)^2}+\frac{1}{(2+z)^2}+\frac{1}{(3-z)^2}+\text{ etc.}$$

Inventis hoc modo summis serierum reciprocorum quadratorum, secunda differentiatio ad summas cuborum deducet, atque reperietur

$$\frac{\pi^3}{2\sin A\pi z}+\frac{\pi^3(\cos A\pi z)^2}{(\sin A\pi z)^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{(1-z)^3}-\frac{1}{(1+z)^3}-\frac{1}{(2-z)^3}+\frac{1}{(2+z)^3}+\text{ etc. et}$$

$$\frac{2\pi^3\cos A\pi z}{(\sin A\pi z)^3}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}-\frac{1}{(2-z)^3}+\frac{1}{(2+z)^3}-\text{ etc.}$$

sicque ulterius pergendo ad summas quarumvis altiorum potestatum progredi licet.

Si haec, Vir Celeberrime, examine Tuo digna judices, id Te maxime rogo, ut me responsione dignari velis, quam vel Magnificus Vir Patruus Tuus, vel Filius ejus Celeb. ad me expedire haud gravabitur. Sin autem mihi sperare liceret, Tuo commercio directe frui, me Tibi devinctissimum agnoscerem. Unicum adhuc Te, Vir Celeberrime, rogatum velim, quoniam novi Claris. Wenzium Tibi familiarem esse, ut ex ipso sciscitaris, utrum meam professionem Petropolitanam vacantem accipere non dubitaret: equidem jam de hoc nil certi polliceri audeo, quia nondum mihi constat, quantum praesentes perturbationes Academiam affecerint. De cetero, si maluerit in aliqua Universitate Regia provinciam Juris vel Matheseos obire, mihi persuasum habeo, me ejus commendatione apud nostros Academiarum Protectores magnam gratiam esse initurum. Me autem potissimum Tuo favori ac patrocinio plurimum commendo. Vale, Vir Amplissime, mihique fave. Dabam Berolini d. 16 Januarii A. 1742.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 681.)

2.

Viro Consultissimo atque Celeberrimo N. B S. P. D. L. E.

Nihil gratius mihi esse poterat, quam litteras meas per D^{rem} Hagenauer ad Te datas tam benevole a Te esse acceptas, mihique tam luculentum insignis Tui erga me favoris testimonium comparasse. Quamvis autem profundissimae Tuae meditationes de summatione seriei

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ etc.}$$

pariter ac de integratione formulae differentialis

$$\frac{x^{p-1}\pm x^{q-p-1}}{1\pm x^q}\cdot dx$$

summo me gaudio affecerint, tamen vehementer doleo Te, aliis negotiis tantopere obrutum, tam parum temporis ad res in mathesi absconditissimas excolendas impendere posse, neque nisi rogatum, cum otium fueris nactus, quicquam suscipere solere. Quod si autem rogationes tantum apud Te, Vir Amplissime, valent, equidem de scientiae amplificatione maxime mereri videar, si Te frequenter rogarem, id quod lubentissime facerem, nisi Tibi rogator importunus videri vererer. Ego vero Te rogare non cessabo, quoniam tanta praemia in scientiae augmentum redundant, et ob hanc causam confido Te institutum hoc meum non aegre laturum, tantumque rogationi meae tribues, quantum voles et quantum otium permittet: ego certe quicquid a Te impetravero, lautissimi muneris loco habebo.

Quod igitur primum ad methodum Tuam summandi seriem

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\text{ etc.}$$

attinet, quam Petropoli sum nactus, atque ob summum acumen communi Academiae suffragio Commentariis inserendam curavi, equidem nihil omnino invenire potui, quod contra eam objici posset, neque adeo causa erat nobis dubitandi num publicationem aegre sis laturus? Majoris autem erat momenti objectio, quae mihi facta est contra meam methodum ex serie

$$0=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}$$

petitam, quam etsi statim praevideram, tamen aliter initio tueri non potui, nisi monstrando, summas hac via inventas cum summis, quas varii approximandi modi suppeditant, apprime convenire. Omnino autem cunctae objectiones tolli mihi videbantur, si demonstrari posset, aequationem infinitam

$$0=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}$$

alias radices in se non complecti, nisi quas natura circuli indicaret. Quodsi enim fuerit

$$s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}=s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.},$$

seu

$$1-\frac{ss}{6}+\frac{s^4}{120}-\text{ etc.}=\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

certe coëfficiens secundi termini $-\frac{1}{6}$ aequalis esse debet summae coëfficientium ipsius ss in singulis factoribus, seu

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{4\pi\pi}+\frac{1}{9\pi\pi}+\text{ etc.}$$

atque coëfficiens tertii termini $+\frac{1}{120}$ aequalis erit summae factorum ex binis terminis seriei

$$\frac{1}{\pi\pi},\ \frac{1}{4\pi\pi},\ \frac{1}{9\pi\pi},\ \text{etc.};$$

hincque si hujus seriei duplum subtrahatur a quadrato seriei

$$\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{4\pi\pi}+\text{ etc.}$$

remanebit series quadratorum singulorum terminorum

$$\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{4^2\pi^4}+\frac{1}{9^2\pi^4}+\text{ etc.}=\frac{1}{36}-\frac{2}{120}=\frac{1}{90},\quad\text{seu}\quad\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ etc.}$$

Sin autem expressio

$$1-\frac{ss}{6}+\frac{s^4}{120}-\text{ etc.}$$

praeter hos factores indicatos, alios factores in se complecteretur, id quod in serie pro ellipsi mihi usu venire videtur, tum hoc ratiocinio nullae verae summationes obtineri possent. Quamobrem nulli dubio locus superesse mihi videbatur, si demonstraretur expressionem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

esse productum ex his factoribus

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

Demonstrationem autem hanc tandem ita sum adeptus, ut ostenderim hanc expressionem

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.}$$

qua cosinus arcus s exhiberi solet, esse productum ex his factoribus

$$\left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

natum. Cum enim sit

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n, \text{ si } n = \infty:$$

atque generatim hujus binomii: $a^n + b^n$ omnes factores sint contenti in

$$aa - 2ab \cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi + bb$$

siquidem pro k omnes numeri integri substituantur: fiat

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n} \text{ et } b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}, \text{ erit } aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \text{ et } 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn},$$

hincque factor generalis formae

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc. erit } 1 - \frac{ss}{nn} - \left(1 + \frac{ss}{nn}\right)\cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi,$$

seu ad formam $1 - pss$, cujusmodi omnes factores esse debent, reducto, erit

$$1 - \frac{ss}{nn}\left(\frac{1 + \cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi}{1 - \cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi}\right)$$

factor generalis illius expressionis, posito $n = \infty$. Quia vero est $n = \infty$, erit arcus $\frac{2k-1}{n}\pi$ infinite parvus, et idcirco

$$1 - \cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi = \frac{(2k-1)^2\pi\pi}{2nn} \text{ et } 1 + \cos A\, \frac{2k-1}{n}\pi = 2;$$

unde factor ille generalis fiet $1 - \frac{4ss}{(2k-1)^2\pi\pi}$. Quamobrem loco k substituendo successive omnes numeros integros fiet

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.} = \left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

ideoque $\frac{1}{2}$ = summae terminorum

$$\frac{4}{\pi\pi}, \frac{4}{9\pi\pi}, \frac{4}{25\pi\pi}, \text{ etc.,}$$

$\frac{1}{24}$ = summae factorum ex binis his terminis; $\frac{1}{720}$ = summae factorum ex ternis, etc. unde summae potestatum cujusvis exponentis integri eorundem terminorum, seu seriei

$$1+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{25^m}+\frac{1}{49^m}+ \text{ etc.}$$

poterunt exhiberi. Possum itaque summas harum omnium serierum

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+ \text{ etc.}$$

ac proinde etiam harum

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+ \text{ etc.}$$

invenire, si quidem n sit numerus par. Sin autem n fuerit numerus impar, nunquam affirmavi me series has ad summas revocasse, quod ideo moneo, quoniam vidi Te, Vir Amplissime, in ea versari opinione, quasi etiam summas hujus seriei, si n sit numerus impar, assignare me posse putem. Hocque ipso dubium, quod circa alteram meam methodum attulisti, sponte evanescet. Praebet enim haec methodus utique pro omnibus potestatibus summas, at si exponentes fuerint impares, tum numeri tantum impares in denominatores ingrediuntur, atque signa alternatim sunt affirmativa et negativa. Scilicet omnes series, quas hoc modo summavi, in hac forma generali:

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(+\frac{1}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(+\frac{1}{9}\right)^n+\left(-\frac{1}{11}\right)^n+ \text{ etc.}$$

continentur. Seriem ergo

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+ \text{ etc.}$$

adhuc ad summam revocare non potui, etiamsi jam pridem in hoc negotio elaboraverim; tantum quidem mihi constat ejus summam per π^3 exhiberi non posse, et suspicor fere $l2$ ejusve potestatem insuper ingredi. Multum quoque in hoc sum versatus, an summam seriei

$$x+\frac{xx}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{25}+ \text{ etc.}$$

aliis casibus praeter $x=\pm 1$ eruere possem: unicum vero quo $x=\frac{1}{2}$ adhuc sum nactus, invenique esse

$$1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{32}+ \text{ etc.} =\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2.$$

Maxime autem sum admiratus operationes Tuas, per quas integrale formulae

$$\frac{x^{p-1}\pm x^{q-p-1}}{1\pm x^q}\,dx$$

cum in genere tum casu $x=1$, invenisti, quas sane difficillime comprehendere potuissem, nisi ipse tantopere in hac investigatione elaborassem. Si integranda sit formula differentialis $\frac{M}{N}dx$, in qua M et N functiones quaecunque ipsius x rationales denotent, praecipuum quaestionis caput in eo versatur, ut fractio $\frac{M}{N}$ in ejusmodi simpliciores resolvatur, quarum denominatores sint binomiales formae $\alpha+\beta x$, numeratores vero constantes. Quam resolutionem ita instituo: Sit $p+qx$ factor denominatoris N, nempe $N=(p+qx)S$; sitque pars fractionis $\frac{M}{N}$ ex hoc factore orta $=\frac{A}{p+qx}$, et pars altera reliqua $=\frac{P}{S}$,

$$\text{erit } \frac{P}{S}=\frac{M}{N}-\frac{A}{p+qx}=\frac{M(p+qx)-AN}{N(p+qx)}=\frac{M-AS}{S(p+qx)}, \quad \text{ideoque } P=\frac{M-AS}{p+qx}.$$

Quare cum P sit quantitas integra, erit $M-AS$ divisibilis per $p+qx$. Posito ergo

$$p+qx=0 \quad \text{seu} \quad x=-\frac{p}{q}, \quad \text{fiet } M-AS=0, \quad \text{ideoque } A=\frac{M}{S}=\frac{M(p+qx)}{N}.$$

Hujus autem fractionis, facto $x=-\frac{p}{q}$, tam numerator quam denominator evanescet, ex quo erit

$$A = \frac{(p + qx)\,dM + qMdx}{dN}.$$

Sit igitur

$$\frac{M}{N} = \frac{x^{p-1} \pm x^{q-p-1}}{1 \pm x^q};$$

et denominator habeat factorem $1 + \alpha x$, qui praebeat fractionem integrantem $\frac{A}{1+\alpha x}$, erit

$$A = \frac{(1 + \alpha x)\,dM + \alpha M dx}{dN},$$

posito $x = -\frac{1}{\alpha}$; ideoque erit

$$A = \frac{\alpha M dx}{dN} = \frac{\alpha(x^{p-1} \pm x^{q-p-1})}{\pm q x^{q-1}} = \frac{\alpha}{q}\left(\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{p-q} \pm \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{-p}\right).$$

Hoc igitur modo inventis pro singulis fractionibus integrantibus numeratoribus, integralis partes elicui, quae cum essent imaginariae, binis colligendis ad quadraturam circuli sum deductus. Videtur autem mihi omnis aequatio algebraica non solum radicum imaginariarum numerum parem habere, sed etiam has ipsas radices ita comparatas, ut binae in se multiplicatae productum reale praebeant, quae proprietas mihi quidem verissima videtur, etiamsi eam generaliter demonstrare non valeam. Theorema nempe ita se habet: Ut omnis expressio algebraica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. quotcunque fuerit dimensionum, si non in factores simplices $p + qx$ omnes reales resolvi queat, ea saltem in factores trinomiales $p + qx + rxx$, qui omnes sint reales, semper resolubilis existat.

Probe autem agnosco, si aliunde demonstrari posset, esse

$$\sin A.\pi z = \pi z(1 - zz)\left(1 - \frac{1}{4}zz\right)\left(1 - \frac{1}{9}zz\right) \text{ etc.}$$

tum tanto apparatu integrationum non esse opus ad serierum memoratarum summas investigandas, sed eas immediate ex hac formula deduci posse. Inveni quidem jam pridem hanc ipsam expressionem pro $\sin A.\pi z$; at hoc ipsum ex summis illarum serierum jam cognitis concluseram: averem igitur methodum videre, qua ista pro sinu expressio independenter a seriebus his possit inveniri, quam ut mecum benevole communicare velis etiam atque etiam rogo. Usus autem sum his expressionibus

$$\sin A.\pi z = \pi z(1 - zz)\left(1 - \frac{1}{4}zz\right)\left(1 - \frac{1}{9}zz\right) \text{ etc.}$$

et

$$\cos A.\pi z = \left(1 - \frac{4}{1}zz\right)\left(1 - \frac{4}{9}zz\right)\left(1 - \frac{4}{25}zz\right) \text{ etc.}$$

ad logarithmos sinuum et cosinuum commode exhibendos, ipsis sinibus etiam incognitis. Dum autem haec scribo, video totum negotium huc reduci, ut demonstretur esse

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\sin A.n\pi}$$

si post integrationem ponatur $x = 1$, id quod mihi demonstratu facilius videtur. Inveni enim complures non inelegantes formularum differentialium, quae alias inter se comparari non possunt, relationes casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Sic productum harum duarum formularum

$$\int \frac{x^{2f-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{2f+g-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$$

si in utraque ponatur $x = 1$, erit $= \frac{\pi}{4fg}$: hinc pro curva elastica erit productum

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

Simili modo hoc theorema latius patens

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}} \cdot \int \frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} = \int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$$

semper locum habet, si post integrationem ponatur $x=1$, quicunque numeri loco a, b, m, n, substituantur.

Cum ante aliquot annos considerassem modum ex secantibus arcum circuli vero proxime investigandi, incidi forte in expressionem, quae circumferentiam circuli π, cujus diameter $=1$, proxime praebeat, neque tamen, id quod magnopere mirum videbatur, absolute erat vera. Denotet a numerum pro arbitrio assumtum integrum, ac ponatur

$$s = \frac{2a}{aa} + \frac{4a}{aa+1} + \frac{4a}{aa+4} + \frac{4a}{aa+9} + \ldots\ldots + \frac{4a}{aa+(a-1)^2} + \frac{2a}{aa+aa},$$

dico fore proxime

$$\pi = s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3a^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^2\,3.7\cdot a^6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^4.5.11.a^{10}} - \frac{35}{2}\cdot\frac{1}{2^6.7.15.a^{14}} + \frac{43867}{42}\cdot\frac{1}{2^8.9.19.a^{18}}$$
$$- \frac{854513}{6}\cdot\frac{1}{2^{10}.11\,23.a^{22}} + \frac{76977927}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}.13.27.a^{26}} - \text{etc.}$$

neque enim, etiamsi haec series in infinitum continuetur, ad veritatem pervenitur; sed tamen, quo major accipitur numerus a, eo propius valor ipsius π reperitur. Caeterum fractiones illae, quae irregulares videntur: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$, est. sunt alternae ex hac fractionum serie

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}, \frac{691}{210}, \frac{35}{2}, \frac{3617}{30}, \frac{43867}{42}, \frac{1222277}{110}, \frac{854513}{6}, \frac{1181820455}{546}, \frac{76977927}{2}, \text{ etc.},$$

cujus seriei usum multifariam sum expertus in summatione serierum.

Ex his autem fractionibus formari possunt summae seriei

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ etc.},$$

si n fuerit numerus par quicunque. Hae namque summae ita progrediuntur

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^1\pi^2}{1.2\,3}, \qquad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ etc.} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4.5},$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ etc.} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^5\pi^6}{1\,2\ldots.7}, \qquad 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{ etc.} = \frac{3}{10}\cdot\frac{2^7\pi^8}{1.2\ldots.9}.$$

Ope harum ergo fractionum summae istae ad potestatem 26 continuari possunt, atque ulterius continuari possent, si haec fractionum series magis produceretur. Legem autem progressionis harum fractionum non nimis difficilem inveni.

Deinde etiam hae fractiones occurrunt in expressione generali, qua summam cujusque seriei ex termino generali assignari docui. Sit enim series quaecunque proposita

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X} = S$$

seriei scilicet, cujus terminus indici x respondens est $= X$, summa erit

$$S = \int X dx + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1.2.3.dx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3X}{1.2.3.4.5dx^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^5X}{1.2\ldots7dx^5} - \frac{3}{10}\cdot\frac{d^7X}{1.2\ldots.9dx^7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{d^9X}{1.2\ldots11dx^9} - \text{etc.}$$

Dum autem hic de lege progressionum sermo est, non possum quin Te, Vir Excellentissime, consulam super serie quadam, quae in natura concinnam progressionis legem observare videtur, interim tamen ab aliis seriebus adhuc tractatis plurimum abhorret:

$$1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + 15n^7 + 22n^8 + 30n^9 + 42n^{10} + 56n^{11} + \text{ etc.}$$

cujus quilibet coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipsius n per additionem produci possit. Sic coëfficiens ipsius n^5 est 7, quia 5 septem diversis modis per additionem resultare potest, nempe

$$5 = \overset{1}{5} = 4 \overset{2}{+} 1 = 3 \overset{3}{+} 2 = 3 + \overset{4}{1} + 1 = 2 + \overset{5}{2} + 1 = 2 + 1 \overset{6}{+} 1 + 1 = 1 + 1 + \overset{7}{1} + 1 + 1.$$

Oritur autem haec series per divisionem, si unitas dividatur per

$$(1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)(1 - n^4)(1 - n^5) \text{ etc.}$$

quod productum, si actu evolvatur, dat hanc expressionem

$$1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - \text{ etc.}$$

in quam quemadmodum exponentes progrediuntur ex natura seriei perspicere non potui, per inductionem autem conclusi alios exponentes non occurrere, nisi qui in formula $\frac{3xx \pm x}{2}$ contineantur; hocque ita, ut potestas ipsius n habeat signum $+$, si ejus exponens ex numero pari pro x substituto nascatur.

Deinde etiam nuper ad hoc theorema sum deductus: Si fuerit

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \frac{a^4}{4n+1} + \frac{a^5}{5n+1} + \text{ etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{aa}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{a^3}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{ etc.}$$

cujus veritas quidem per probationem, sed tamen difficulter elucet. Demonstrationem vero nonnisi per differentiationem et integrationem adornare possum. Posito enim $a = x^n$, quia est

$$s = 1 + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \frac{x^{3n}}{3n+1} + \text{ etc.}$$

sit
$$z = \frac{1}{2} + \frac{x^n}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{ etc.}$$

erit
$$xxz = \frac{xx}{2} + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{ etc.}$$

ergo
$$\frac{d.xxz}{dx} = x + x^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + x^{3n+1}(1 + \text{etc.}) \text{ etc.} =$$

$$\frac{x + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} + \text{ etc.}}{1 - x^n} = \frac{sx}{1 - x^n}.$$

At ob
$$sx = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{ etc.},$$

erit
$$\frac{d.sx}{dx} = 1 + x^n + x^{2n} + \text{ etc.} = \frac{1}{1 - x^n}, \quad \text{seu} \quad \frac{dx}{1 - x^n} = d.sx.$$

Ergo
$$d.xxz = \frac{sxdx}{1 + x^n} = sxd.sx,$$

et integrando
$$xxz = \frac{1}{2}(sx)^2 = \frac{ssxx}{2}, \quad \text{ergo} \quad z = \frac{ss}{2}.$$

De Clar. Wenzio ab Academia Petropolitana nihil etiamnum accepi, neque enim Imperatrix adhuc restaurationem Academiae confecit; et Curatores Regiarum Academiarum, qui me rogarunt ut ipsis viros in mathesi versatos indicarem, ex hoc tempore nihil amplius requisiverunt: dabo autem operam ut Ipsi mea commendatione utilis esse possim. Vale, Vir Amplissime, mihique favere perge. Berolini die 1 Septembr. 1742.

(V. respons. *Corresp. T. II. p.* 690.)

3.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quantopere me non solum delectent, sed etiam erudiant litterae Tuae acutissimis meditationibus refertae, verbis Tibi, Vir Celeberrime, vix exprimere possum; quamobrem quo majores Tibi debeo gratias, eo magis Te oro atque obsecro, ut ne graveris litteras meas frequentiores benigne accipere, meque profundissimis Tuis responsionibus exhilarere. Qua quidem petitione id tantum vereor, ne Tibi importunus videar, hincque rogationem meam repeto, ut plus mihi non tribuas, quam otium concesserit, Tibique persuadeas, etiam ea, quae Tibi levissima videantur, apud me plurimum ponderis habere.

Ac primo quidem non satis capio rationem, cur neges seriem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

aequalam aestimari posse sinui arcus s, vel producto

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

nisi simul *ejus convergentia demonstretur.* Cum enim haec series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

per legitimam integrationem inventa sit $= \sin s$, haec certe ejus erit summa, sive sit convergens sive divergens: sicque altera illa series $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. mihi quidem recte videtur sinum arcus elliptici s denotare, etiamsi sit divergens. Longe alia autem est quaestio, si quaeratur an series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc. aequivaleat producto } s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.,}$$

hic enim non sufficit monstrasse

$$1 - \frac{ss}{\pi\pi},\ 1 - \frac{ss}{4\pi\pi}, \text{ etc. esse divisores expressionis } s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.,}$$

sed simul doceatur necesse est, eam alios divisores seu factores praeter hos assignatos non continere. Ita alterius expressionis ex ellipsi natae

$$s - \frac{s^3}{6c^4} + \text{ etc. concedo factores esse } s,\ 1 - \frac{ss}{\pi\pi},\ 1 - \frac{ss}{4\pi\pi}, \text{ etc.,}$$

sed nego in his formulis omnes omnino illius expressionis factores contineri; scilicet meo judicio praeter hos factores alii inerunt, ut $1 + \alpha ss$, $1 + \beta ss$, etc., ita ut sit

$$s - \frac{s^3}{6c^4} + \text{ etc.} = s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc. } \ldots\ldots (1 + \alpha ss)(1 + \beta ss) \text{ etc.,}$$

atque ob hos factores incognitos perperam inde concluderetur

$$\frac{1}{6c^4} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \text{ etc.,}$$

cum ex natura aequationum revera sit

$$\frac{1}{6c^4} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{ etc. } \ldots - \alpha - \beta - \gamma - \text{ etc.,}$$

neque hic, si α, β, γ, etc. essent cognitae, absurdum sequeretur ullum. Atque hoc modo non divergentia seriei $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc., sed ignoratio plurium, ac fortasse infinitorum factorum in causa est, cur non similia consectaria circa summationem serierum inde deduci queant. Quod caeterum haec series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

aequalis sit producto

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

jamdudum mihi constitit, ejusque demonstrationem habui cum innixam theoremati Cotesiano, tum secus; sed ita tamen, ut ipsa demonstratio mea hujus theorematis veritatem evinceret.[1] Rogare itaque Te volui, Vir Celeberrime, annon magis popularem atque ex solis calculi integralis principiis petitam habeas demonstrationem? video autem Te simili modo hanc transformationem ex factoribus binomii

$$\left(\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right) : 2\sqrt{-1}$$

elicere, sine subsidio theorematis Cotesiani, quo ego sum usus idem subsidium vitans. Habeo enim methodum universalem factores trinomiales, seu duarum dimensionum ex qualibet expressione proposita eliciendi, quae simili fere negotio absolvitur, quo vulgo aequationes algebraicae tractari solent. Sit quantitas

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ etc.}$$

cujus quaeritur divisor trinomialis, quem quia potissimum ad ejusmodi divisores respicio, qui divisores simplices imaginarios involvant, pono $f - 2x\sqrt{fg}\,.\cos\varphi + gxx$, quo nihilo aequali posito, si brevitatis ergo fiat $\alpha = \sqrt{\frac{f}{g}}$, fit $x = \alpha\cos\varphi \pm \frac{\alpha}{\sqrt{-1}}\sin\varphi$, $x^2 = \alpha^2\cos 2\varphi \pm \frac{\alpha^2}{\sqrt{-1}}\sin 2\varphi$, $x^3 = \alpha^3\cos 3\varphi \pm \frac{\alpha^3}{\sqrt{-1}}\sin 3\varphi$, et generaliter

$$x^n = \alpha^n\cos n\varphi \pm \frac{\alpha^n}{\sqrt{-1}}\sin n\varphi.$$

Quodsi ergo hi valores ambigui in quantitate proposita substituantur, ea evanescere debebit: fiet ergo ob signorum ambiguitatem tam $0 = A + B\alpha\cos\varphi + C\alpha^2\cos 2\varphi +$ etc., quam $0 = B\alpha\sin\varphi + C\alpha^2\sin 2\varphi +$ etc., ex quibus duabus aequationibus saepe satis expedite coëfficiens α et angulus φ definiri possunt, ita ut omnes divisores trinomiales innotescant. Sit v. g. proposita haec quantitas $a^n + x^n$, cujus factor trinomialis assumatur $f - 2x\sqrt{fg}\,.\cos\varphi + gxx$, seu $\alpha\alpha - 2\alpha x\cos\varphi + xx$. Habebuntur ergo hae duae aequationes $0 = a^n + \alpha^n\cos n\varphi$ et $0 = \alpha^n\sin n\varphi$, seu $\sin n\varphi = 0$, unde erit $n\varphi = 2i\pi$ vel $n\varphi = (2i-1)\pi$, denotante π arcum 180°. Priori casu fit $\cos n\varphi = +1$, posteriori $\cos n\varphi = -1$; ex quo prior aequatio fit $0 = a^n - \alpha^n$,

$$\text{ideoque} \quad \alpha = a \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{(2i-1)\pi}{n};$$

quamobrem formulae $a^n + x^n$ divisor erit

$$aa - 2ax\cos\frac{(2i-1)\pi}{n} + xx,$$

sumendo pro i numerum integrum quemcunque. Cum Tibi ante scripsissem, Vir Celeberrime, omnem expressionem algebraicam quotcunque dimensionum, si in factores simplices reales resolvi nequeat, eam saltem semper in factores trinomiales $\alpha + \beta x + \gamma xx$ reales resolubilem esse, expresse addidi me perfecte demonstrationis compotem non esse, sed tamen de hac propositione tam certum esse, ut de ejus veritate non dubitem. Demonstrationem tamen habeo rigorosam, si summa potestas quaternarium non excedat, quare cum exemplum quantitatis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ huc pertineat, a priori certus eram, eam in duos factores quadraticos esse resolubilem, quos etiam ex radicibus aequationis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4 = 0$, quae sunt

$$I.\ x = 1 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})},\quad II.\ x = 1 - \sqrt{(2 + \sqrt{-3})},\quad III.\ x = 1 + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})},$$
$$IV.\ x = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$$

elicui. Sunt enim I et III, itemque II et IV ita comparatae, ut earum tam summa quam productum fiat reale. Nam est

$$I+III=2+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}=2+\sqrt{(4+2\sqrt{7})},$$
$$\text{et}\quad I.III=1+\sqrt{(4+2\sqrt{7})}+\sqrt{7};$$

sicque expressio $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ hos habet factores reales

$$xx-(2+\sqrt{(4+2\sqrt{7})})x+1+\sqrt{7}+\sqrt{(4+2\sqrt{7})}$$
$$\text{et}\quad xx-(2-\sqrt{(4+2\sqrt{7})})x+1+\sqrt{7}-\sqrt{(4+2\sqrt{7})}.$$

Si ergo similis resolutio perpetuo succedat, certum quoque foret, quod affirmavi, omnem formulam differentialem rationalem $\frac{Mdx}{N}$ concessa circuli et hyperbolae quadratura integrari posse. Cum igitur illud theorema, quod circa resolutionem cujusque expressionis algebraicae rationalis in factores trinomiales reales proposueram, tanti sit momenti, magnopere Te rogo, ut nonnihil temporis in id impendere velis, vel ejus veritatem evicturus, vel falsitatem ostensurus. A Mathematicis Gallis ante aliquot annos celebratum est theorema analyticum, quod ab auctore mox Bouguerianum mox Fontanianum appellabatur. Declarabatur autem in eo singularis proprietas formularum differentialium duas variabiles continentium, quae quidem sint ortae per differentiationem alicujus quantitatis finitae, at theorema quidem variis modis proponi potest; sic autem enunciabo: Si ex differentiatione quantitatis finitae, seu functionis ipsarum x et y, prodierit $Pdx+Qdy$, erit semper differentiale ipsius Pdx, posita sola y variabili, aequale differentiali ipsius Qdy, posita sola x variabili. Cum igitur de inventione hujus theorematis utilissimi inter se certarent, meque de eo certiorem facerent, statim quidem respondebam, hoc theorema jam pridem mihi notum fuisse, cum id jam in Tomo Comment. VII inter alia inseruissem, gloriam inventionis tamen non mihi, sed Tibi, Vir Amplissime, deberi. Memineram enim, Te olim, cum de trajectoriis orthogonalibus disceptaretur, verum hujus theorematis fundamentum exhibuisse. Cum enim quaestio esset de differentiali ipsius $\int Pdx$, si praeter x etiam a (tanquam parameter) variabilis ponatur, Tu demonstrasti differentiale quaesitum fore $Pdx+da\int Rdx$, existente Rda differentiali ipsius P sumto x constanti, quod jam est id ipsum theorema, de cujus inventione Domini Bouguer et La Fontaine inter se certabant, aliis tantum verbis expressum. Posito enim $\int Rdx=Q$; ut differentiale quaesitum sit $Pdx+Qda$, erit differentiale ipsius Pdx (posito a variabili tantum) $=Rdadx$, et differentiale ipsius Qda (posito x variabili tantum) erit $=Rdadx$, quoque ob $Q=\int Rdx$. Consequuntur autem ex hoc theoremate, quod Tibi acceptum est referendum, plurima insignia subsidia in calculo integrali, quae Ipse vel jam nosti vel facile prospicies.

Plurimum autem me delectarunt, quae de partitione numerorum (sic enim appellabat hoc problema Clar. Naudaeus, qui id mihi primum jam Petropoli proposuerat) mecum communicare voluisti. Per solutionem enim hujus problematis deductus sum ad seriem $1+1n+2n^2+3n^3+5n^4+$ etc., cujus occasione mihi tam praeclara et profunda perscribis. Problema autem mihi geminum proponebatur: I. Invenire quot variis modis datus numerus N in n partes inter se inaequales dispertiri possit; vel quot variis modis datus numerus N possit esse summa n numerorum inaequalium inter se. Sic numerus 50 dispertiri potest in 7 partes inaequales inter se 522 modis diversis. Alterum problema ita se habebat: II. Invenire quot variis modis datus numerus N dispertiri possit in n partes, non exclusis partibus aequalibus. Sic numerus 50 in septem partes sive aequales inter se, sive inaequales distribui potest 8946 modis. Ad solutionem prioris problematis formo expressionem

$$(1+mz)(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)\quad\text{etc.}$$

quae per multiplicationem actualem explicata dabit sequentes series

$$\begin{array}{l} +1+mz+m^2z+m^3z+m^4z+m^5z+\text{etc.} \\ \quad +m^3z^2+m^4z^2+2m^5z^2+2m^6z^2+3m^7z^2+\text{etc.} \\ \quad +m^6z^3+m^7z^3+2m^8z^3+3m^9z^3+4m^{10}z^3+\text{etc.} \\ \quad +m^{10}z^4+m^{11}z^4+2m^{12}z^4+3m^{13}z^4+5m^{14}z^4+\text{etc.} \\ \qquad \text{etc.} \end{array}$$

hic ex natura genesis coëfficiens numericus cujusque termini indicat, quot variis modis exponens ipsius m in tot partes inaequales dispertiri possit, quot exponens ipsius z contineat unitates. Est vero

$$(1+mz)(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)\ \text{etc.} = 1+\frac{mz}{1-m}+\frac{m^3z^2}{(1-m)(1-m^2)}+\frac{m^6z^3}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)}+\ \text{etc.}$$

quod ita ostendo. Sit $(1+mz)(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)$ etc. $=1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+$ etc. Jam loco z scribatur mz eritque $(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)$ etc. $=1+\alpha mz+\beta m^2z^2+\gamma m^3z^3+\delta m^4z^4+$ etc. quae ergo per $1+mz$ multiplicata priorem seriem $1+\alpha z+\beta z^2+$ etc. reproducere debet, unde valores coëfficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. determinantur. Cum igitur hoc pacto diversi exponentes ipsius z segregentur, problema prius pro quovis partium numero solvetur. Scilicet $\frac{m}{1-m}$ si evolvatur in $1m+1m^2+1m^3+1m^4+$ etc. quilibet coëfficiens 1 ostendit exponentem ipsius m unico modo ex una parte oriri, quod manifestum est. Simul vero indicat quemlibet numerum unicò modo ex unitatibus meris produci posse. Expressio

$$\frac{m^3}{(1-m)(1-m^2)} = 1m^3+1m^4+2m^5+2m^6+3m^7+3m^8+\ \text{etc.}$$

hujus quilibet coëfficiens ostendit, quot variis modis exponens ipsius m in duas partes inaequales dispertiri possit; simul vero indicat, quot variis modis idem numerus ternario multatus ex his binis numeris 1 et 2 formari possit. Atque factore ipsius z^3, qui est

$$\frac{m^6}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)},$$

evoluto in $1m^6+1m^7+2m^8+3m^9+4m^{10}+$ etc. coëfficiens cujuslibet termini ostendit, quot variis modis exponens ipsius m dispertiri possit in tres partes inaequales, seu quot variis modis idem ipsius m exponens senario multatus ex numeris 1, 2, 3, componi queat. Generatim ergo problema de numero N in n partes inaequales partiendo resolvetur per explicationem formae

$$\frac{m^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-m)(1-m^2)\ldots(1-m^n)}$$

donec ad terminum νm^N perveniatur, cujus coëfficiens ν quaesitum partitionum numerum monstrabit. Hinc plura sequuntur compendia hos partitionum numeros expedite inveniendi, et ex jam cognitis simplicioribus componendi. Sic si haec scriptio $(N)^{(n)}$ sumatur ad numerum partitionum indicandum, quem numerus N in n partes inaequales admittit, erit $(N)^{(n)} = (N-n)^{(n)} + (N-n)^{(n-1)}$, unde quilibet numerus ex additione duorum jam cognitorum oritur. Est autem $(N)^{(1)} = 1$, et si sit

$$N < \frac{n(n+1)}{2}, \ \text{erit}\ (N)^{(n)} = 0, \quad \text{sin autem}\ N = \frac{n(n+1)}{2}, \ \text{erit}\ (N)^{(n)} = 1.$$

Soluto hoc problemate priori solvitur et posterius, quo partitionum numerus in partes sive aequales sive inaequales postulatur. Evolvatur expressio

$$\frac{1}{(1-mz)(1-m^2z)(1-m^3z)(1-m^4z)\ \text{etc.}}$$

et prodibit

$$\begin{array}{l} 1 + mz + m^2z + m^3z + m^4z + m^5z + m^6z + \text{etc.} \\ \quad + m^2z^2 + m^3z^2 + 2m^4z^2 + 2m^5z^2 + 3m^6z^2 + 3m^7z^2 + \text{etc.} \\ \quad + m^3z^3 + m^4z^3 + 2m^5z^3 + 3m^6z^3 + 4m^7z^3 + 5m^8z^3 + \text{etc.} \\ \quad + m^4z^4 + m^5z^4 + 2m^6z^4 + 3m^7z^4 + 5m^8z^4 + 6m^9z^4 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

ubi coëfficiens cujusque termini indicat, quot variis modis exponens ipsius m dispertiri possit in tot partes, quot exponens ipsius z continet unitates. Singulae autem series horizontales seorsim inveniuntur ex eo, quod

$$\frac{1}{(1-mz)(1-m^2z)(1-m^3z)\ \text{etc.}} = 1 + \frac{mz}{1-m} + \frac{m^2z^2}{(1-m)(1-m^2)} + \frac{m^3z^3}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)} + \text{etc}$$

quae aequalitas eodem quo ante modo ostenditur. Hinc si quaeratur, quot variis modis numerus N in n partes distribui possit, evolvatur expressio

$$\frac{m^n}{(1-m)(1-m^2)\ldots\ldots(1-m^n)}$$

donec perveniatur ad terminum νm^N, cujus coëfficiens ν quaesitum partitionum numerum indicabit. Cum igitur haec expressio eosdem praebeat coëfficientes numericos, quos praecedens, sequitur numerum N tot modis in n partes sive aequales sive inaequales distribui posse, quot modis numerus $N + \frac{n(n-1)}{2}$ in n partes inaequales distribui queat. Atque si per hanc scriptionem $(N)^{(n)}$ indicetur modorum numerus, quibus numerus N in n partes sive aequales sive inaequales dispertiri possit, erit $(N)^{(n)} = (N-n)^{(n)} + (N-1)^{(n-1)}$, unde tabula, qua hi partitionum numeri continentur, expedite quousque lubuerit continuari potest. Utrumque ergo problema reducitur ad inventionem harum serierum

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1.	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1
2.	1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5
3.	1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12
4.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18
5.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23
6.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26
7.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	28
8.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	29
9.	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30

etc.

Harum serierum plurimae leges progressionis dantur, uti attente eas inspicienti mox patebit. Continuavi autem eas facili negotio eousque, ut affirmare possim numerum 125 in 12 partes inter se inaequales distribui posse 64707 modis. Series autem $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + 42 +$ etc. et inter horizontales est infinitesima et oritur terminis diagonaliter addendis. Observavi autem aliam proprietatem, cujus ope singulae series horizontales sine superiorum ope formari possunt ex seriebus quarum terminus generalis est

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{array}{rl} \text{nempe ex serie} & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \text{etc.} \\ \text{oritur} & 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + \text{etc.} \end{array}$$

ubi bini termini inferioris seriei additi dant terminum superioris. Et ex

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \text{ etc.}$$

oriuntur I. $1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + \text{ etc.}$

II. $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + \text{ etc.}$

ubi bini termini seriei I additi dant terminum superioris, et terni termini seriei II additi dant terminum seriei I. Ex serie

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + \text{ etc.}$$

oriuntur I. $1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + \text{ etc.}$

II. $1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + \text{ etc.}$

III. $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + \text{ etc.}$

ubi bini termini seriei I additi dant terminum superioris, et terni termini seriei II additi dant terminum seriei I, et quaterni termini seriei III dant terminum seriei II.

Quod expressio $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$ etc. evoluta det seriem $1 - n - n^2 + n^5 + n^7 -$ etc., in qua alii exponentes non occurrunt nisi qui continentur in $\frac{3xx \pm x}{2}$, per legitimam inductionem mihi equidem conclusisse videor; interim tamen demonstrationem nullo pacto invenire potui, etiamsi non parum temporis in id impenderem. Inveni autem expressionem $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$ etc. quoque in hanc seriem transmutari posse

$$1 - \frac{n}{1-n} + \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)} - \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} + \text{ etc.}$$

cujus adeo valor aequatur summae seriei $1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} +$ etc. Quare cum lex progressionis hujus seriei sit cognita, hinc alterius seriei $1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 +$ etc. indoles ita describi poterit, ut sit recurrens, habens scalam relationis hanc

$$1 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 - 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + \text{ etc.}$$

cujus ope facile continuatur. Quae mihi scripsisti, Vir Amplissime, de investigatione potestatum seriei

$$1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{ etc.}$$

satis declarant, quantopere methodus Tua a priori procedens praestet alteri illi a posteriori, qua usus sum. Ex serie enim, quam pro cubo hujus seriei exhibuisti, difficillimum foret a posteriori ejus summam invenire; eo majores igitur Tibi habeo gratias, quo majorem fructum me ex ea methodo capturum spero. Caeterum occasione illius seriei $1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} +$ etc. mihi in mentem venit, quot veritates in mathesi soli inductioni acceptas referamus, praecipue circa proprietates numerorum. Cujusmodi sunt: omnem numerum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; item, omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum; item, summam duorum cuborum non posse esse cubum. Simile theorema quoque nuper occasionem praebente Cel. Goldbachio detexi: hanc expressionem $4nab - a - b$ quadratum esseopsse nunquam, siquidem litterae a, b, et n numeros integros affirmativos designent.

Quae in superioribus litteris de investigatione factorum scripsi, non solum insignem habent usum in integratione formularum differentialium rationalium, sed etiam integrari possunt infinitae aequationes differentiales cujuscunque gradus, quae quidem continentur in hac forma

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{ etc.}$$

posito dx constante. Ad valorem enim ipsius y in quantitatibus finitis expressum inveniendum resolvatur haec aequatio algebraica $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. in factores, et quilibet factor dabit partem valoris ipsius y quaesiti, hoc modo

si factor fuerit	erit integralis pars
$(f \pm z)$	$\alpha e^{\mp fx}$, ubi e est numerus, cujus logarithmus $= 1$
$(f \pm z)^2$	$(\alpha + \beta x)\, e^{\mp fx}$
$(f \pm z)^3$	$(\alpha + \beta x + \gamma xx)\, e^{\mp fx}$
etc.	etc.
$ff - 2fz \cos\varphi + zz$	$\alpha e^{fx \cos\varphi} \sin A\,.\, fx \sin\varphi + \mathfrak{A} e^{fx \cos\varphi} \cos A\,.\, fx \sin\varphi$
$(ff - 2fz \cos\varphi + zz)^2$	$(\alpha + \beta x)\, e^{fx \cos\varphi} \sin A\,.\, fx \sin\varphi + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)\, e^{fx \cos\varphi} \cos A\,.\, fx \sin\varphi$

hujusmodi enim valores ex singulis factoribus orti conjiciantur in unam summam, sicque prodibit valor ipsius y quaesitus, qui tot quantitates arbitrarias constantes complectetur, quoti gradus fuerit aequatio differentialis, uti integrationis natura postulat. Hinc expedite integrari potest aequatio differentialis quarti gradus $y dx^4 = a^4 d^4 y$, qua exprimitur natura curvae, quam lamina elastica inter oscillandum (si fuerit muro infixa et ad motum vibratorium incitetur) induit. Cum enim sit

$$0 = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4},$$

oritur haec aequatio resolvenda $0 = 1 - a^4 z^4$, cujus factores sunt $1 - az$, $1 + az$, $1 + a^2 z^2$, ex quibus obtinetur

$$y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}} + \gamma \sin A\,.\,\frac{x}{a} + \delta \cos A\,.\,\frac{x}{a}$$

ob $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = 1$, unde sequitur tempora singularum vibrationum esse in ratione duplicata longitudinis laminarum, caeteris paribus.

His, cum spatium supersit, adjungam methodum facilem resolvendi omnia generis problemata, quae ad problema Isoperimetricum referri solent. Quaeratur scilicet inter omnes curvas ea, in qua expressio quaepiam integralis $\int MdN$ sit maxima vel minima, ubi M et N non solum ipsas coordinatas x, y, sed etiam earum differentialia quaecunque involvant. Ponatur $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, etc. atque formula integralis proposita abibit in ejusmodi expressionem $\int Zdx$, in qua Z erit functio ipsarum x, y et p, q, r, etc. Differentietur Z, atque sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. et sumto dx constante formetur hic valor

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{ etc.}$$

quem voco valorem differentialem formulae propositae integralis $\int Zdx$. Atque hic valor differentialis V nihilo aequalis positus praebebit aequationem pro curva quaesita, in qua $\int Zdx$ erit maximum minimumve. Sic cum nuper mihi Celeb. Patruelis Tuus significasset in curvis elasticis $\int \frac{ds}{rr}$ minimum esse oportere, ubi ds elementum curvae et r radium osculi significabat, statim per hanc methodum problema resolvi. Sumtis enim x et y pro coordinatis curvae quaesitae, positoque $dy = pdx$ et $dp = qdx$, erit

$$ds = dx\sqrt{(1 + pp)} \quad \text{et} \quad r = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{q}, \quad \text{unde fit } Z = \frac{qq}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}},$$

hincque differentiando

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{-5qqp}{(1 + pp)^{\frac{7}{2}}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2q}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}};$$

ita ut sit $dZ = Pdp + Qdq$. Erit ergo valor differentialis

$$V = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

et pro curva quaesita aequatio $0 = dPdx - ddQ$, quae integrata dat $Pdx - dQ = Adx$. Multiplicetur per q, ob $dp = qdx$, erit $Pdp - qdQ = Adp$; at ex aequatione $dZ = Pdp + Qdq$ est $Pdp = dZ - Qdq$, quo valore substituto habebitur $dZ - Qdq - qdQ = Adp$, quae denuo integrata dat

$$Z - Qq = Ap + B = \frac{qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}.$$

Erit ergo mutato constantium signo

$$q = (Ap+B)^{\frac{1}{2}}(1+pp)^{\frac{5}{4}} = \frac{dp}{dx},$$

ergo

$$dx = \frac{dp}{(Ap+B)^{\frac{1}{2}}(1+pp)^{\frac{5}{4}}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{pdp}{(Ap+B)^{\frac{1}{2}}(1+pp)^{\frac{5}{4}}}$$

unde cognita jam aequatio pro curva elastica elicitur.

Si non absolute inter omnes curvas, sed tantum inter isoperimetras, vel eas, in quas certa quaedam expressio integralis $\int Z'dx$ aequaliter competit, quaeratur ea, in qua sit $\int Zdx$ maximum minimumve, tum eadem methodo quaerantur valores differentiales formularum $\int Z'dx$ et $\int Zdx$, qui sint V' et V, erit $\alpha V' + \beta V = 0$ aequatio pro curva quaesita. Sic non impeditur haec mea methodus, etiamsi in formula integrali $\int Zdx$ praeter differentialia coordinatarum x et y, quoque earum differentialia secundi, tertii, aliusve altioris ordinis insint, cujusmodi casus dubito an per solitas methodos resolvi possint. At vero si in Z praeter quantitates x, y, p, q, r, etc. etiam formula quaepiam integralis, puta $\int \mathfrak{Z}dx$, insit, tum neque consueta methodus, neque haec, quam modo exposui, solutioni inservit, sed sequenti modo erit procedendum. Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, g, r, etc. et insuper quantitatis $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$, sit $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ etc. atque

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \text{ etc.}$$

Tum sumatur $\int Ldx$, cujus valor posito $x = a$ fiat H, sitque $H - \int Ldx = T$, erit differentialis valor quaesitus

$$= N - \mathfrak{N}T - \frac{d(P + \mathfrak{P}T)}{dx} + \frac{dd(Q + \mathfrak{Q}T)}{dx^2} - \text{ etc.}$$

De problematis autem huc pertinentibus notandum est, ea non instar priorum absolute resolvi posse, ut curvae portio quaecunque praescripta maximi minimive indole sit praedita; sed longitudo abscissae simul debet assignari, cui haec conditio satisfaciat. Sic si iste modo inventus valor differentialis ponatur $= 0$, aequatio prodibit non pro curva, quae inter omnes alias absolute habeat $\int Zdx$ maximum minimumve, sed quae inter alias omnes pro dato abscissae valore $x = a$ (cujus ratio jam est habita in T) maximum minimumve ipsius $\int Zdx$ valorem exhibeat. Quare si haec abscissae magnitudo a immutetur, alia curva problemati satisfaciens reperitur; qua cautela in problematis prioris generis non erat opus. Ulterius processi, et casus evolvi, cum etiam $\mathfrak{Z}$ denuo formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{Z}dx$ implicet. Proposita enim formula $\int Zdx$, si sit

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.}$$

existente $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$, et $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq +$ etc. existente

$$\pi = \int \mathfrak{Z}dx \quad \text{et} \quad d\mathfrak{Z} = \mathfrak{m}dx + \mathfrak{n}dy + \mathfrak{p}dp + \mathfrak{q}dq + \text{ etc.}$$

Sumatur integrale $\int Ldx$, quod sit $= H$ casu quo $x = a$ (ubi a est magnitudo abscissae x illa determinata, cui maximus valor illius $\int Zdx$ respondere debet) sitque $H - \int Ldx = T$. Tum sumatur integrale $\int \mathfrak{L}Tdx$, quod fiat $= \mathfrak{H}$ posito $x = a$, sitque $\mathfrak{H} - \int \mathfrak{L}Tdx = \mathfrak{T}$. His praeparatis erit valor differentialis formae $\int Zdx$ hic

$$N + \mathfrak{N}T + \mathfrak{n}\mathfrak{T} - \frac{d(P + \mathfrak{P}T + \mathfrak{p}\mathfrak{T})}{dx} + \frac{dd(Q + \mathfrak{Q}T + \mathfrak{q}\mathfrak{T})}{dx^2} - \text{ etc.}$$

Ex his autem quousque libuerit ultra progredi, atque abstrusissima problemata resolvere licebit. Qua de methodo quid sentias, Vir Amplissime, etiam atque etiam rogo ut mihi indicare velis. Vale, Vir Celeberrime, mihique favere perge. Dabam Berolini d. 10 Novembr. 1742.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 701.)

4.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quoniam ex litteris Tuis maximum semper fructum percipio, eo majores Tibi me debere gratias agnosco, quo minus Tibi suppetit otium ad litteras meas respondendi. Quamobrem Te, Vir Amplissime, etiam atque etiam rogo, ut frequentiores meas interpellationes benevole excusare velis.

Quod primum de seriebus divergentibus scribis, earum summas dari omnino non posse, quoniam licet in infinitum continuentur, tamen exhauriri nequeant, non mediocriter jam pridem dubitavi, atque etiamnum ambigo. Interim tamen hoc dubium mihi quidem eximi posse videtur, si ad distinctionem inter numerum infinitum determinatum, atque infinitum absolutum attendatur. Quamvis enim statui non possit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{\infty},$$

quia hic numerus terminorum etsi infinitus, tamen tamquam definitus spectatur, atque adeo series revera terminari censetur; tamen sine errore mihi quidem statui posse videtur

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ etc.}$$

in infinitum, hoc est seriei nusquam ullo termino constituto. Sic falsum foret

$$0 = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots \pm (2\infty + 1),$$

at omni finitionis idea etiam cogitatione sublata, sine errore affirmari potest esse $0 = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 -$ in infinitum. In hac autem opinione eo magis confirmor, quod nullus mihi adhuc obtigerit casus, in quo ejusmodi serierum summatio me in errorem deduxisset.

Quod nunc assertum meum circa radicum imaginariarum proprietatem non solum probas, sed etiam demonstrationem mecum communicare voluisti, maximas Tibi ago gratias. Concedo enim lubentissime, quod postulas, omnem radicem imaginariam aequationis quotcunque dimensionum, etiamsi forma ejus penitus sit incognita, tamen considerari posse tanquam functionem hujusmodi expressionum $a \pm \sqrt{-b}$. Interim tamen si quis de hac veritate dubitaret, fateor me nondum videre, quomodo hoc Tuum assumtum demonstrarem. Me quidem in hoc asserto non parum confirmavit singularis modus resolutionem aequationum altiorum graduum absolvendi, similis fere Cartesiano. Sit proposita aequatio $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, quam resolvi pono in has

$$xx + \alpha x + \beta = 0 \quad \text{et} \quad xx + \gamma x + \delta = 0.$$

Sint autem α et γ radices hujus aequationis $zz + pz + u = 0$, et β cum δ radices hujus $zz + tz + s = 0$, est enim $\alpha + \gamma = p$ et $\beta\delta = s$. Per has aequationes erit $\alpha\gamma = u$, $\beta + \delta = t$. Comparata vero aequatione proposita cum factoribus assumtis erit: $p = \alpha + \gamma$, $q = \beta + \delta + \alpha\gamma$, $r = \alpha\delta + \beta\gamma$ et $s = \beta\delta$, seu $q = t + u$; deinde ob $r = \alpha\delta + \beta\gamma$ erit eliminando $rr - prt + ppt + ttu - 4su = 0$. Sunt autem incognitae t et u, quarum altera u sublata dat $t^3 - qtt - (pp - pr + 4s)t - rr + 4sq = 0$. Definitur ergo incognita t vel u per aequationem cubicam, ideoque semper unus datur valor realis pro t et pro u Praevidere autem licebat has incognitas t et u

per aequationem cubicam definiri debere, quia aequatio biquadrata tres tantum diversas resolutiones admittit. Sint enim a, b, c, d radices quatuor, erunt tres ipsius t valores hi: $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$. Simili modo si proponatur aequatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 +$ etc. $= 0$ ejusque factores ponantur

$$xx + \alpha x + \beta,\ xx + \gamma x + \delta,\ xx + \varepsilon x + \zeta,$$

atque ut ante $\alpha, \gamma, \varepsilon$ ponantur radices aequationis $z^3 + Azz + Bz + C = 0$, et patebit ex varia sex radicum combinatione quantitatem C quindecim diversos valores induere posse, unde resolutio pendet ab aequatione 15^{ti} gradus. Generaliter vero resolutio aequationis $2n$ dimensionum pendebit ab aequatione $1.3.5\ldots\ldots(2n-1)^{\text{mi}}$ gradus, qui gradus cum sit impar, una semper dabitur resolutio realis. Neque vero hoc ratiocinium adhuc veritatem evincit; interim tamen viam ad demonstrationem apodicticam fortasse parare potest.

Plurimum autem Tibi, Vir Celeberrime, me obstrictum agnosco pro demonstratione elegantissimae Tuae constructionis trajectoriarum orthogonalium, quam in Actis Lips. 1719 publicaveras. Equidem jam pridem in illius demonstratione eruenda desudaveram, neque tamen alium casum elicui, praeter eum, quo

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ fit functio ipsius parametri } a \text{ tantum.}$$

Quanquam enim quaesivi quantitatem n, per quam aequatio

$$0 = \frac{dy\,(1+pp)}{p} + qda$$

divisa integrabilis reddatur, tamen in mentem mihi non venit, in investigatione ipsius n ipsam aequationem propositam in subsidium vocari posse. Hac igitur methodo Tua plurimae aequationes differentiales expedite integrari possunt. Sit enim proposita aequatio $0 = Pdx + Qdy$, in qua sint P et Q functiones quaecunque ipsarum x et y, ita ut sit $dP = Rdx + Ldy$ et $dQ = Mdx + Ndy$. Quaeratur functio R, quae illam aequationem multiplicans reddat integrabilem, ita ut $0 = PRdx + QRdy$ integrationem admittat. Debebit ergo diff. $PRdx$, posito x constante, aequari diff. $QRdy$, posito y constanti. Sit $dR = Tdx + Vdy$, erit

$$PVdxdy + LRdxdy = QTdxdy + MRdxdy = -PTdx^2 + MRdxdy, \quad \text{ob} \quad Qdy = -Pdx.$$

Ergo erit $Pdx\,(Tdx + Vdy) = Rdxdy\,(M - L) = PdxdR$, ideoque

$$\frac{dR}{R} = \frac{Mdy - Ldy}{P} = \frac{Mdy}{P} + \frac{Ldx}{Q} = -\frac{Mdx}{Q} - \frac{Ldy}{P} = -\frac{dQ}{Q} - \frac{dP}{P} + \frac{Ndy}{Q} + \frac{Kdx}{P}.$$

Quoties ergo ex his formulis functio R definiri potest, aequatio proposita integrari poterit. Sit porposita aequatio $dy + yXdx + y^nVdx = 0$; in qua X et V sint functiones quaecunque ipsius x, erit $Q = 1$, $P = yX + y^nV$, ideoque

$$M = 0,\ N = 0,\ K = \frac{ydX}{dx} + \frac{y^n dV}{dx},\ L = X + nVy^{n-1}.$$

Quare erit

$$\frac{dR}{R} = \frac{Mdy}{P} + \frac{Ldx}{Q} = Xdx + nVy^{n-1}dx = Xdx - \frac{ndy}{y} - nXdx \quad \text{et} \quad lR = (1-n)\int Xdx - nly$$

$$\text{et} \quad R = \frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{y^n}.$$

Integrabilis ergo erit aequatio

$$\frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{y^n}dy + \frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{y^{n-1}}Xdx + e^{(1-n)\int Xdx}\,Vdx = 0$$

integrale enim est

$$+\frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{(1-n)\,y^{n-1}} + \int e^{(1-n)\int Xdx}\,Vdx = \text{Const.}$$

Quae integratio etsi jam satis est cognita, tamen summam regulae Tuae utilitatem luculenter declarat. Vale, Vir Amplissime, mihique favere perge. Dabam Berolini d. 14 Maii 1743.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 708.)

5.

Viro Consultissimo et Excellentissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quanquam desiderium meum a Te, Vir Excellentissime, proficiendi summum est, tamen tanta erga Te est veneratio mea, ut nisi otium Tibi suppetat, nullas a Te litteras exigam, quoties autem lubuerit mihi respondere, pro hoc insigni munere Tibi gratias maximas habeam. Exquisitissima sunt monita Tua, quae circa summas serierum divergentium affers, Tibique nunc prorsus assentior, eo modo, quo serierum convergentium summa sit quantitas quasi asymtota, ad quam, quo plures seriei termini actu colligantur, eo propius accedatur, ita ut tandem discrepantia omni assignabili quantitate minor evadat. Scilicet si habeatur series convergens quaecunque $a + b + c + d +$ etc., concipi potest Fig. 69. linea curva *abcde* etc. super axe *AS* ita descripta, ut ejus applicatae ad aequalia intervalla axis constitutae sint

$$Aa = a$$
$$Bb = a + b$$
$$Cc = a + b + c$$
$$Dd = a + b + c + d$$
etc.

quo facto manifestum est hanc curvam habituram esse asymtotam *TV* axi *AS* parallelam, cujus ab axe distantia veram seriei in infinitum continuatae summam repraesentabit. Sin autem series proposita fuerit divergens, quoniam hoc casu nulla datur asymtota axi parallela, nequidem hujusmodi serierum summas concipere licet, atque adeo ipsi ideae summae contradiceret, qui quantitatem finitam tanquam summam assignare vellet. Cum autem omnis expressio sive fracta, sive irrationalis, sive etiam transcendens in seriem infinitam evolvi queat, etiam vicissim concedendum est, proposita quacunque serie sive convergente sive divergente, dari expressionem quampiam finitam, ex cujus evolutione illa ipsa series oriatur. Quare si a naturali vocis *summae* significatione ita recedere velimus, ut cujusvis seriei summam appellemus non aggregatum omnium terminorum, sed valorem illius quantitatis finitae, ex cujus evolutione illa series resultet, non solum consuetum summandi modum, qui alias contradictionem involveret, tueri, sed etiam, quemadmodum summatio serierum divergentium in errorem non inducat, explicare poterimus. Quoniam igitur definitiones vocabulorum sunt arbitrariae (saltem nisi sibi ipsae pugnent), si hac definitione utar, ut dicam seriei cujusque summam esse valorem ejus expressionis finitae, ex cujus evolutione illa ipsa series oriatur, omnis dubitatio atque repugnantia funditus tolletur. Hocque adeo sensu sine ulla contradictione affirmare licebit esse $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 +$ etc. $= 0$, quia haec series oritur ex evolutione expressionis $\frac{1-1}{(1+1)^3} = 0$; similique modo erit $1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$ etc. $= -1$. Ceterum vero notandum est, quoties series fuerit convergens, tum novam istam summae notionem cum consueta congruere, ex quo nulla confusio ex introductione hujus novae ideae erit metuenda. Hoc posito, quaestio non erit absurda, si quaeram summam hujus seriei maxime divergentis $1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 +$ etc.; desidero enim valorem quantitatis finitae, ex cujus evolutione ista series oriatur, et cum ista quantitas sit transcendens, sufficiet ejus valorem tantum proxime assignasse. Inveni autem hunc valorem seu summam fore $= 0{,}40478$, sicque minorem quam semissem unitatis. Contra hunc concipiendi modum nihil aliud mihi quidem objici posse

videtur, nisi quod ante demonstrari debeat, eandem seriem ex pluribus diversis expressionibus finctis oriri non posse, at vero hoc mihi extra dubium positum videtur.

Si concedatur, radices imaginarias aequationum considerari posse tanquam functiones binomiorum hujusmodi $a + \sqrt{-b}$, tum utique necessario sequitur, aequationes imparium dimensionum semper unam ad minimum habere radicem realem, ac proinde numerum radicum imaginariarum perpetuo esse parem. Verumtamen nondum perspicui quomodo, si posterius concedatur, vicissim et prius consequatur: posterius enim mihi demonstrari posse videtur, nullo habito respectu ad formas radicum imaginariarum. Sit enim proposita aequatio imparium dimensionum quaecunque $x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} +$ etc. $= 0$, ponoque

$$x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} + \text{ etc. } = z,$$

atque manifestum est, si statuatur $x = \infty$ fore $z = \infty$, sin autem ponatur $x = -\infty$, fore $z = -\infty$. Tribuendo igitur ipsi x successive omnes possibiles valores inter limites $+\infty$ et $-\infty$ contentos, littera z induet pariter omnes possibiles valores inter limites $+\infty$ et $-\infty$ contentos. Dabitur ergo valor loco x substituendus, qui litterae z valorem inducat $= 0$, isque propterea erit radix ipsius x pro aequatione proposita. Cum igitur hoc summo rigore demonstrari possit, optarem, ut simili modo forma functionalis radicum imaginariarum, quam statuis, demonstrari vel ex hoc ipso fonte derivari posset.

Pro emendatione errorum, quos per festinationem in resolutione aequationis $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ commiseram, gratias ago. Ceterum, uti probe mones, realitas factorum trinomialium multo commodius methodo Cartesii, tollendo secundum terminum, docetur, atque adeo meo judicio hanc demonstrationem perfectissime absolvisti. Quanquam enim aequationes altiorum dimensionum, ad quas pervenitur, actu resolvi nequeant, tamen ad institutum sufficiebat ostendisse, illas aequationes semper habituras esse unam ejusmodi radicem realem, ex qua prodeant factores trinomiales reales, etiamsi hi rarissime assignari queant. Aequatio enim

$$x^{m.2^n} + px^{m.2^n-1} + qx^{m.2^n-2} + \text{ etc. } = 0$$

uti egregie mones, pro divisore habebit aequationem

$$x^{2^n} + \alpha x^{2^n-1} + \beta x^{2^n-2} + \text{ etc. } = 0,$$

ad quem inveniendum coëfficiens α determinabitur per aequationem tot dimensionum, quot hoc productum continet unitates

$$\frac{2^n.m}{2^n} \cdot \frac{2^n.m-1}{2^n-1} \cdot \frac{2^n.m-2}{2^n-2} \cdots \frac{2^n(m-1)+1}{1}.$$

Primum autem patet hoc productum semper exhibere numerum integrum; tum vero quaelibet fractio, siquidem m est numerus impar, reducitur ad ejusmodi formam, ut tam numerator quam denominator fiat numerus impar, ex quo tota expressio evadet numerus impar, atque adeo valor α, cum definiatur per aequationem imparium dimensionum, poterit esse realis: reliqua vero, quae hinc deducis, Vir Celeberrime, negotium, quod agitabam, prorsus conficiunt. Tota enim res perducitur ad resolutionem aequationis

$$x^{2^n} + qx^{2^n-2} + rx^{2^n-3} + \text{ etc. } = 0$$

in qua secundum terminum jam deesse pono. Quodsi ergo hujus bini factores ponantur

$$x^{2^{n-1}} + \alpha x^{2^{n-1}-1} + \text{ etc. et } x^{2^{n-1}} - \alpha x^{2^{n-1}-1} + \text{ etc. } = 0$$

quia est α aggregatum 2^{n-1} radicum prioris aequationis, definietur α per aequationem tot dimensionum, quot sunt unitates in hoc numero

$$2 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^n-2}{2^{n-1}-2} \cdot \text{ etc.}$$

donec ultimus denominator sit $=1$. Patet autem hunc numerum fore impariter parem, totidemque α habebit radices, quot unitates in isto numero continentur. Quia autem inter has radices quaelibet habet sui negativam, omnes potestates impares ipsius α in aequatione deerunt; ultimus vero terminus absolutus, propterea quod est factum ex omnibus valoribus ipsius α, inter quos bini inter se sunt aequales et alter alterius negativus, erit quadratum negativum, cujus radix assignabilis erit per coëfficientes q, r, s, etc. Definietur ergo α per hujusmodi aequationem

$$\alpha^{2m} + f\alpha^{2m-2} + \ldots - uu = 0$$

quae semper unam saltem radicem habebit realem; quod sic ostendo: Ponatur $\alpha = \infty$, fietque illa expressio $\alpha^{2m} + f\alpha^{2m-2} + \ldots - uu = \infty$. Tum ponatur $\alpha = 0$, fietque eadem expressio $= -uu$. Tribuendis ergo ipsi α valoribus mediis inter 0 et ∞, expressio ipsa induet omnes valores possibiles medios inter ∞ et $-uu$; dabitur ergo valor loco α substituendus, qui reddet expressionis valorem $=0$, isque erit radix ipsius α. Casus tantum excipi debet, quo $m=1$, sed non dubito, quin ista demonstratio ita adornari possit, ut nihil contra excipi queat.

Non perspicio, quam ob causam dubites, an hujus differentialis $PRdx + QRdy$ integrale exhiberi queat, etiamsi sit diff. $PRdx =$ diff. $QRdy$, illa scilicet differentiatione ponendo x, in hac vero y constantem. Quodsi enim hoc criterium locum habuerit, integrale non solum mihi videtur assignari posse, sed etiam revera id saltem ope quadraturarum exhibere valeo. Integretur enim differentiale $PRdx$ spectando y tanquam constantem, ita ut integrale evanescat ponendo $x=0$, quod integrale sit $=Z$. Tum in differentiali $QRdy$ ponatur $x=0$, atque id integretur, ponaturque integrale $=Y$; quo facto formulae differentialis $PRdx + QRdy$ integrale erit $= Z + Y$. Demonstratio per ea, quae Tu, Vir Excellentissime, docuisti, est facilis, namque differentiando $Z + Y$ Tua methodo, iterum prodit differentiale propositum. Jam dudum autem perspexi hanc speculationem penitus incidere in solutionem problematis: Data aequatione differentiali $dx = pdy$ incompleta, invenire ejus completam $dx = pdy + qda$, quod a Te primum fuisse solutum admonui D^num^ Clairaut aliosque Geometras Gallos, qui hanc inventionem sibi vindicare voluerunt. Interim tamen non dubito, quin hic adhuc insignes proprietates lateant, quae si essent cognitae, ingens lumen in analysi accenderent, cujus rei, ut nullus dubitandi locus relinquatur, communicabo Tecum solutionem problematis cujusdam mechanici, cujus evolutio universa ad hoc genus pertinet; neque, antequam natura hujusmodi formularum differentialium completarum uberius examinetur, ad finem optatum perduci potest.

Problema hoc est: Catenae uniformis ac perfecte flexilis, si super plano horizontali politissimo jacens utcunque projiciatur, assignare situm, figuram et motum ad quodvis temporis momentum. *Solutio.* Fig. 70. Sumto in plano horizontali recta quacunque OZ pro axe, pervenerit elapso tempore t catena in situm AMB. Sit longitudo catenae $AMB = a$, positaque ejus portione quacunque $AM = s$, ducatur ad axem applicata MP, voceturque $OP = x$, $PM = y$. Perspicuum jam est x et y esse oportere functiones binarum variabilium s et t, pariter ac angulum AMP qui vocetur $= \varphi$. Sit igitur differentiando $dx = ds \sin\varphi + Mdt$ et $dy = ds\cos\varphi + Ndt$, quia posito t constante esse debet $dx^2 + dy^2 = ds^2$. His positis erit primo, ponendo t constans,

$$Oa = \alpha t + \beta - \int \frac{(a-s)\,ds\sin\varphi}{a}, \quad Aa = \gamma t + \delta - \int \frac{(a-s)\,ds\cos\varphi}{a}, \quad Ob = \alpha t + \beta + \int \frac{sds\sin\varphi}{a}$$

$$\text{et}\quad Bb = \gamma t + \delta + \int \frac{sds\cos\varphi}{a},$$

posito post singulas has integrationes $s = a$. Porro, si fuerit posito s constante $dM = Pdt$ et $dN = Qdt$, erit

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\int Pds}{\int Qds},$$

spectando in his integrationibus tantum s tanquam variabilem. Aequationes has suppeditaverunt praecepta dynamica, iisque problema perfecte resolvitur, ita ut natura curvae *AMB* in aequatione

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\int Pds}{\int Qds}$$

contineatur. Interim tamen hanc solutionem ad usum accommodare non possum, ita ut hinc motum catenae, si initio figuram quamcunque datam habuerit, ipsique datus motus impressus fuerit, reipsa determinare mihi liceret. Pendent autem M et N ac propterea quoque P et Q ab angulo φ, quia differentialia illa dx et dy exprimentia sunt completa. Deinde si t constans sumatur atque elementum ds invariabile statuatur, ultima aequatio evolvitur in hanc differentialem secundi gradus

$$Pdd\varphi\cos\varphi+2Pd\varphi^2\sin\varphi-Qdd\varphi\sin\varphi+2Qd\varphi^2\cos\varphi-dPd\varphi\cos\varphi+dQd\varphi\sin\varphi=0.$$

Hac igitur de re ut mihi sententiam Tuam aperire velis, etiam atque etiam rogo. Ceterum solutionem problematis huic affinis, quod mihi Celeb. Patruelis proposuit, quia spatium superest, judicio Tuo subjiciam. In locum catenae superioris problematis, substituit filum inertiae expers tribus aequalibus corpusculis ad aequalia intervalla positis onusti, cujus motus requiritur. Sint Fig. 71. intervalla corpusculorum $AB=BC=a$, atque tempore elapso $=t$ pervenerit filum propositum in situm ABC, unde ad rectam OZ pro axe assumtam demittantur perpendicula Aa, Bb, Cc. Ponatur angulus $ABb=\zeta$ et angulus $BCc=\eta$, sitque $r=\zeta+\eta$ et $s=\zeta-\eta$, quibus positis ex theoria motus elicui has aequationes

$$dt=ds\sqrt{\frac{4-\cos^2s}{2\alpha-\beta+\alpha\cos s}}\quad\text{et}\quad dr=\beta ds\sqrt{\frac{2-\cos s}{(2+\cos s)\ldots\text{*})}}.$$

Ope quadraturarum ergo ex tempore t definiuntur quantitates r et s, ex quibus porro erit

$$\zeta=\frac{r+s}{2}\quad\text{et}\quad\eta=\frac{r-s}{2}.$$

Denique vero

$$Oa=At+B-\frac{2}{3}a\sin\zeta-\frac{1}{3}a\sin\eta;\qquad Aa=Ct+D-\frac{2}{3}a\cos\zeta-\frac{1}{3}a\cos\eta;$$

$$Ob=At+B+\frac{1}{3}a\sin\zeta-\frac{1}{3}a\sin\eta;\qquad Bb=Ct+D+\frac{1}{3}a\cos\zeta-\frac{1}{3}a\cos\eta;$$

$$Oc=At+B+\frac{1}{3}a\sin\zeta+\frac{2}{3}a\sin\eta;\qquad Cc=Ct+D+\frac{1}{3}a\cos\zeta+\frac{2}{3}a\cos\eta.$$

Hoc idem problema resolvi quoque, si plura corpora filo fuerint alligata; tum autem separatio variabilium et constructio, uti hic, mihi nondum successit. Ceterum has qualescunque meditationes, ut benevole accipias etiam atque etiam rogo, mihique favere pergas. Vale. Dabam Berolini d. 4 Febr. 1744.

Litterae, quibus Bernoullius ad Euleri epistolam supra datam respondit, cum in nostra collectione non reperiantur, etiam in Commercio (Correspondance) a nobis editio desunt. Sed ipsarum primum autographum, idque curiose scriptum, inter hasce exstat Euleri epistolas, quas Bibliotheca Basileensis ex hereditate Bernoullii acceptas conservat et nobiscum liberalissime communicare voluit. Ut jam nexus mutui hujus epistolarum commercii elucescat, pro argumenti gravitate, gratum lectoribus id fore confidimus, quod et responsionem Bernoullianam hoc loco damus, adjecto etiam postscripto, quod a Bernoullio serius Eulero missum est, in epistola Danielis Bernoullii inclusum. *Editores.*

*) Vide infra responsionem Cel. Bernoullii.

Viro Celeberrimo Leonhardo Eulero S. P. D. N. B.

Ignosce quaeso quod nondum respondi ad ultimas Tuas litteras ante annum et quod excurrit scriptas. Repeto excusationem jam aliquoties a me allatam, cui et hoc addere debeo, quod per longam desuetudinem ita hebes factus sim, ut vix quicquam proficiam, quando Te in profundis Tuis meditationibus sequi volo. Ne autem diutius in mora sim, postulat donum, quod mihi nuper D. Bousquet jussu Tuo misit, consistens in egregio tractatu Tuo de Isoperimetris, pro quo Tibi maximas ago gratias. Hunc librum avide sed obiter inspexi in plagulis adhuc solutis, attente autem perlegam postquam illum a compactore ligatum recepi. Tantum jam perspexi, ut non possim non Tibi impense gratulari et applaudere de inventa elegantissima et genuina methodo hoc problema in latissimo sensu acceptum tractandi. Ego quoque olim observaveram, methodos ab aliis usurpatas in hoc deficere, quod restrictae sint ad eam hypothesin, quae supponit, minimam curvae particulam eadem qua integer arcus maximi vel minimi proprietate gaudere, quem defectum Tu optime supplevisti. Hac occasione Te rogare audeo (quod tacitum apud me servabo) quid sentias de priori solutione directa Patrui mei, quae extat in Commentariis Academiae Regiae A. 1706. Sane ea mihi videtur esse paralogistica, imo nulla. Casu incidit in solutionem veram problematis 1^{mi}, dum posuit dt constantem, quemadmodum etiam casu inventurus fuisset veram solutionem problematis 2^{di}, si ibi non dt sed dx posuisset constantem. Analogiae, ad quas problemata 1 et 2 reduxit, non sunt verae proprietates curvae quaesitae, sed quibusvis curvis competunt, prout alia atque alia differentialis pro constanti adhibetur; vel potius nulli curvae competunt, quia hae analogiae dant aequationem ex terminis heterogeneis constantem. Deinde Taylorus recte objecit, inepte sumi angulos $OF\varphi$ et $O\varphi F$ pro dimidio angulo curvedinis in punctis F et φ. Praeterea ipsa hypothesis, per quam duo elementa $FO + O\varphi$, et duo elementa $F\omega + \omega\varphi$ ponuntur isoperimetra, deducere videtur ad absurditates, ita ut non possit consistere cum inaequalitate seu variabilitate angulorum OFJ et ωFJ; mihi enim ex conditione Isoperimetri sequi videtur rationem FJ ad OJ sive angulum OFJ fore constantem, contra hypothesin, quae supponit angulum OFJ mutari posse in angulum ωFJ. Altera Patrui solutio, ut et Hermanniana, quae ambae extant in Actis Lips. A. 1718, quoad fundamentum et methodum conveniunt cum Fratris Jacobi solutione, nec ab ea differunt, nisi quod in illis prolixus Jacobi calculus eleganti compendio concinnior redditus fuerit. Caeterum doleo Jacobum a Fratre nimis inique notatum fuisse, quod plures absurditates et contradictiones in solutione sua admiserit, cum tamen omnia quae Jacobus dixit sano sensu explicari, et apparentes contradictiones conciliari queant. Ex. gr. cum dixit, in omnibus aequationibus Tabulae suae litteras p et q augeri minuive posse quantitate quacunque constante c, id intelligendum est de maximis vel minimis $\int pdy$, $\int pdt$, $\int qdy$, etc. in quibus p vel q significant ipsas ordinatas curvarum, quarum areae debent esse vel maximae vel minimae, non vero de maximis vel minimis

$$\int\frac{dy}{p},\ \int\frac{dt}{p},\ \int\frac{dy}{q},\ \text{etc.}$$

cum enim illa transeant in haec ponendo $\frac{aa}{p}$, vel $\frac{aa}{q}$ pro p et q, patet in his non p vel q, sed $\frac{1}{p}$ aut $\frac{1}{q}$ posse augeri vel minui quantitate constante c. Neque etiam eadem assertio ita accipi debet, ac si aequationes, quae maximum aliquod vel minimum suppeditant, post talem mutationem semper etiam maximum vel minimum respective praebere debeant; possunt enim per talem mutationem maxima degenerare in minima, et vice versa; quamvis ipse Jacobus, sicut ejus frater, ex inadvertentia hoc non observaverit. Ex. gr. quamvis aequatio

$$dy = \frac{pdx}{\sqrt{(aa - pp)}}$$

praebeat maximum $\int pdy$, attamen haec aequatio

$$dy = \frac{pdx - cdx}{\sqrt{(aa - (p - c)^2)}}$$

potest praebere et maximun $\int pdy$, et minimum $\int pdy$, prout p major est vel minor quam c. Sic quoque aequatio

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(bb + 2bp + pp - aa)}}$$

potest dare maximum $\int pdt$, etiamsi crescente x decrescat p, quicquid contradicat Johannes, quotiescunque nempe $b - p$ est quantitas affirmativa. Ita etiam, quamvis aequatio

$$dy = \frac{qdt}{\sqrt{(aa + qq)}}$$

satisfaciat maximo $\int qdy$, tamen aequatio generalior

$$\frac{qdt \pm cdt}{\sqrt{(aa + qq \pm 2cq + cc)}} = dy$$

potest dare et maximum et minimum $\int qdy$, illud nempe si $q \pm c$ fuerit quantitas affirmativa, hoc si $q \pm c$ fuerit quantitas negativa. Ad has praedictas tres aequationes generales, quae exhibent maxima vel minima $\int pdy$, $\int pdt$, $\int qdy$, Patruus meus Jacobus potuisset reducere omnes 11 aequationes Tabulae suae. Sed satis de his. Attingam nunc paucis quaedam ex Tua ultima epistola. Gaudeo Te nunc mihi assentiri circa ea, quae dixeram de seriebus divergentibus. Gratum facies, si mihi indicabis ipsam formulam quantitatis transcendentis $= 0{,}40478$, ex cujus evolutione oritur series

$$1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{ etc.}$$

Ipse modus concipiendi seriem divergentem, tanquam ortam ex evolutione quantitatis alicujus finitae, nil quicquam habet absurdi, ut contra eum aliquid objici possit, et si vel maxime eadem series ex pluribus diversis expressionibus finitis oriri posset, hinc non sequeretur ejusmodi concipiendi modum esse absurdum; sed hoc sequeretur, ejusmodi expressiones non posse appellari summam, seu valorem seriei divergentis, et hoc magis confirmaret sententiam meam, qua statuo, seriem divergentem nullum habere valorem.

Ego vicissim Tibi assentior in eo, quod attinet ad integrationem aequationis $PRdx + QRdy = 0$. Si paulo attentius considerassem ea, quae in penultima epistola ipse scripsi, non amplius dubitassem, sed facile vidissem, demonstrationem ibi a me allatam inverti posse. Verum quia aliquis haerere posset in sumtione integralis quantitatis $PRdx$ in casu $x = 0$, mallem ego hunc modum integrationis praescribere: Sit S nota integrationis, quando y ponitur constans, et σ nota integrationis, quando x ponitur constans. Distinguatur $PRdx$ in membra, in quibus y non reperitur, et in ea, in quibus y reperitur; vocentur illa Xdx, haec pdx. Pariter distinguatur $QRdy$ in membra, in quibus x non reperitur, et in ea, in quibus x reperitur; vocentur illa Ydy, haec qdy. Eritque

$$\int PRdx + \int QRdy = \int Xdx + \int Ydy + Spdx = \int Xdx + \int Ydy + \sigma qdy = \text{constanti}.$$

Quod autem sit $Spdx = \sigma qdy$, sic facile demonstro: Sit (Fig. 72.) $AE = CF = dx$, $BE = pdx$ posita constante; per consequens $AG = Spdx$. Sit $AC = FE =$ diff. AG posita x constante, diff. AC positis y et dy constantibus $= DB - AC = DB - FE = DF - BE =$ diff. BE, seu diff. pdx positi x et dx

constantibus. Sed per hypothesin est quantitas R ita comparata, ut diff. pdx positis x et dx constantibus, debeat esse $=$ diff. qdy positis y et dy constantibus, ergo $AC = qdy$, per consequens $\sigma qdy = AG = Spdx$.

Ad ea, quae dixisti de radicibus imaginariis nihil habeo quod reponam, nisi quod existimem, ideam quantitatis imaginariae sive impossibilis involvere ideam radicis quadratae quantitatis negativae, quia eae quantitates sunt impossibiles, quae neque affirmativae esse possunt neque negativae, quarumque quadrata aut ipsa sunt impossibilia, aut saltem negativa. Problemata, quae in fine subjunxisti de projecta catena vel filo tribus corpusculis onusto, nimis difficilia mihi visa sunt. Malo fundamentum solutionis ex Te discere, quam ingeniolum meum hebetatum eorundem examine diu torquere. Quod superest Deum O. M. rogo, ut luctum ex B. Parentis Tui obitu conceptum minuat, Teque cum Tuis quam optime valere jubeat. Dabam Basileae die 20 Apr. 1745.

P. S. d. 1 Maji 1745. Postquam misi nuperam epistolam, cupido me incessit examinandi solutionem Tuam problematis de filo tribus corpusculis onusto. Scribis Te ex theoria motus elicuisse has aequationes

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - \cos^2 s}{2\alpha - \beta + \alpha \cos s}} \quad \text{et} \quad dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)\ldots}};$$

reliqua in denominatore, quae a sigillo epistolae Tuae obtecta sunt, non possum legere. Mihi videtur has duas aequationes ita constituendas esse

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - (\cos s)^2}{2\alpha - \beta\beta + \alpha \cos s}} \quad \text{et} \quad dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)(2\alpha - \beta\beta + \alpha \cos s)}},$$

ut sit $$\alpha = \frac{dr^2}{dt^2}(2 + \cos s) + \frac{ds^2}{dt^2}(2 - \cos s), \quad \text{et} \quad \beta = \frac{dr}{dt}(2 + \cos s).$$

Disquisitiones, quae jam sequuntur de problemate illo mechanico Joh. Bernoullii, in superiori epistola Euleriana memorato, manu ipsius Nicolai conscriptae leguntur in margine primi autographi, quod postscriptum illud jam ante ad Eulerum missum exhibet, et eo magis mentione dignae sunt, quod nunquam ad Eulerum pervenisse videntur. *Editores.*

(Fig. 73.)

$$AB = BC = ab = bc = 1$$
$$AD = l, \quad BE = p$$
$$BD = m, \quad CE = q$$
$$ll + mm = 1 = pp + qq, \quad ldl = -mdm$$
$$pdp = -qdq$$
$$\text{angl. } ABD = \zeta, \quad \text{angl. } BCE = \eta$$

$A\alpha = dx$, $a\alpha = dy$, $B\beta = dx + dl$, $b\beta = dy + dm$, $C\gamma = dx + dl + dp$, $c\gamma = dy + dm + dq$ tempus per Aa, Bb, $Cc = dt$. Ob motuum corporum A, B, C, et centri gravitatis tempusculo dt uniformitatem est

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{3} \quad \text{h. e.} \quad dx + \frac{2}{3}dl + \frac{1}{3}dp = Adt \quad \text{hinc} \quad x = At + B - \frac{2}{3}l - \frac{1}{3}p$$

pariter $$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{3} \quad \text{h. e.} \quad dy + \frac{2}{3}dm + \frac{1}{3}dq = Cdt \quad \text{hinc} \quad y = Ct + D - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}q$$

velocitas secundum $AD = \frac{Aa}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{Adt - \frac{2}{3}dl - \frac{1}{3}dp}{dt}$, vis acceleratrix secundum $AD = al$

» » $AF = \frac{aa}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{Cdt - \frac{2}{3}dm - \frac{1}{3}dq}{dt}$, » » » $AF = am$

» » $C\gamma = \frac{C\gamma}{dt} = \frac{dx + dl + dp}{dt} = \frac{Adt + \frac{1}{3}dl + \frac{2}{3}dp}{dt}$, vis retard. secundum $CG = bp$

» » $CH = \frac{c\gamma}{dt} = \frac{dy + dm + dq}{dt} = \frac{Cdt + \frac{1}{3}dm + \frac{2}{3}dq}{dt}$, » » $CE = bq$

Posita dt constante est

$$\left.\begin{array}{ll} \text{incrementum velocitatis secundum} & AD = \frac{-\frac{2}{3}ddl - \frac{1}{3}ddp}{dt} = aldt \\ \text{» » »} & AF = \frac{-\frac{2}{3}ddm - \frac{1}{3}ddq}{dt} = amdt \end{array}\right\} \text{hinc } \frac{2ddl + ddp}{2ddm + ddq} = \frac{l}{m} = \frac{-dm}{dl}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{decrementum » »} & C\gamma = \frac{-\frac{1}{3}ddl - \frac{2}{3}ddp}{dt} = bpdt \\ \text{» » »} & CH = \frac{-\frac{1}{3}ddm - \frac{2}{3}ddq}{dt} = bqdt \end{array}\right\} \text{hinc } \frac{ddl + 2ddp}{ddm + 2ddq} = \frac{p}{q} = \frac{-dq}{dp}$$

Praecedentes aequationes reductae praebent

$$\left.\begin{array}{r} 2dlddl + dlddp + 2dmddm + dmddq = 0 \\ dpddl + 2dpddp + dqddm + 2dqddq = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2mddl + mddp - 2lddm - lddq = 0 \\ qddl + 2qddp - pddm - 2pddq = 0 \end{array}\right\}$$

Priores duae additae et integratae praebent $dl^2 + dm^2 + dp^2 + dq^2 + dldp + dmdq =$ Const. seu $d\zeta^2 + d\eta^2 + (dldp + dmdq) =$ (ob $dl = md\zeta$, $dm = -ld\zeta$, $dp = qd\eta$, $dq = -pd\eta$) $d\zeta^2 + d\eta^2 + (pl + qm)\, d\zeta d\eta = d\zeta^2 + d\eta^2 + (d\zeta d\eta \cos(\zeta - \eta)) =$ Const. Ponendo

$$\zeta + \eta = r,\ \zeta - \eta = s, \quad \text{seu} \quad \zeta = \frac{r+s}{2},\ \eta = \frac{r-s}{2},$$

habetur

$$\frac{2dr^2 + 2ds^2 + \cos s\,(dr^2 + ds^2)}{2} = \text{const.} \quad \text{h. e.} \quad dr^2(2 + \cos s) + ds^2(2 - \cos s) = \alpha dt^2.$$

Posteriores duae aequationes additae et integratae praebent

$$2mdl + mdp - 2ldm - ldq + qdl + 2qdp - pdm - 2pdq = 2mmd\zeta + mqd\eta + 2lld\zeta + lpd\eta + mqd\zeta + 2qqd\eta$$
$$+ lpd\zeta + 2ppd\eta = 2d\zeta + 2d\eta + (lp + mq)(d\zeta + d\eta) = (d\zeta + d\eta)(2 + \cos(\zeta - \eta)) = dr\,(2 + \cos s) = \text{Const.}\,\beta dt.$$

6.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Etsi litterae Tuae, Vir Celeberrime, maximo gaudio me afficiunt, summumque mihi fructum afferunt, tamen quoniam non ignoro in aliis diversissimi generis studiis Tibi plurimum esse elaborandum, ne Tibi sim molestus, frequentiores a Te litteras exigere non ausim, sed hoc tantum a Te etiam atque etiam rogo, ut meas benevole accipere, ad easque non nisi cum satis otii fueris nactus, respondere velis. Gratissimum mihi fuit ex Te intelligere opusculum meum de Isoperimetris, vel potius Isodynamis Tibi non displicere; argumentum mihi quidem ita comparatum videtur, ut in eo non errare sit difficillimum. De solutione Celeb. Joh. Bernoullii, quae extat in Comment. Academiae Regiae Parisinae 1706, Tecum plane sentio, neque etiam dubito, quin ipse Auctor, si sententiam suam aperte declarare voluerit, sit dissensurus. Cum autem ejus defensionem semel tanto ardore susce-

pisset, mirum non est, quod errorem profiteri nunquam voluerit. Ob eandem autem causam omnes occasiones data opera evito, meam sententiam de ista solutione indicandi. Tibi autem, Vir Celeb., maximas gratias habeo, quod Tuum judicium cum tam egregiis animadversionibus mecum communicare volueris. Saepenumero certe difficillimum est dignoscere, utrum formulae cujuspiam inventae valor sit maximus an minimus, praesertim si plures quantitates indefinitae in eam ingrediantur. Tanta est enim affinitas inter maximum et minimum, ut eadem quantitas seu functio V, quae formulam $A + V$ reddat maximam, eadem hanc formulam solo signo mutato $A - V$ exhibeat minimam. Sic cum aequatio

$$dy = \frac{pdx}{\sqrt{(aa - pp)}}$$

praebeat maximum $\int pdy$, vicissim haec aequatio

$$dy = \frac{-pdx}{\sqrt{(aa - pp)}},$$

quae quidem in illa ob signi radicalis ambiguitatem jam continetur, $\int pdy$ faciet minimum, quod clarius patebit si, uti fecisti, pro p scribatur $p \pm c$.

Quod ad valorem seriei divergentis $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. attinet, puto equidem dari lineam curvam, cujus abscissa si fuerit $= x$, applicata esse queat

$$y = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{ etc.}$$

unde si in hac curva ponatur abscissa $x = 1$, applicata y exhibebit valorem seriei

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{ etc.}$$

Potest autem natura hujus curvae per aequationem differentialem exprimi. Cum enim sit

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{ etc.}$$

erit ob utriusque seriei similitudinem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{xx}, \quad \text{seu} \quad dy + \frac{ydx}{xx} = \frac{dx}{x},$$

quae est aequatio differentialis pro curva quaesita, cujus integrale, si e denotat numerum, cujus logarithmus $= 1$, erit

$$e^{-\frac{1}{x}} y = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

quod integrale ita sumi debet, ut evanescat posito $x = 0$; erit ergo hinc

$$y = e^{\frac{1}{x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

hujusque proinde expressionis valor facto $x = 1$ dabit valorem seriei propositae. Erit ergo summa seriei propositae

$$= e \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x} = \int \frac{e^{1-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

posito post integrationem $x = 1$. Ponatur $e^{1 - \frac{1}{x}} = z$; erit posito $x = 0$, $z = 0$, et posito $x = 1$, $z = 1$; unde summa seriei erit $= \int \frac{dz}{1 - lz}$, integrali ita sumto, ut evanescat posito $z = 0$, deinde vero facto $z = 1$. Sit porro $z = 1 - t$, erit summa seriei $= \int \frac{-dt}{1 - l(1 - t)}$, integrali ita sumto, ut evanescat posito $t = 1$, tumque facto $t = 0$. Jam ob

$$l(1 - t) = -t - \frac{1}{2} tt - \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} - t^4 \text{etc.}$$

habebitur summa seriei

$$=\int\frac{-dt}{1+t+\frac{1}{2}tt+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\text{ etc.}}.$$

$$\text{Sit }\frac{1}{1-l(1-t)}=1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+\text{ etc.}$$

erit integrale

$$=-t-\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{1}{3}\beta t^3-\frac{1}{4}\gamma t^4-\frac{1}{5}\delta t^5-\text{ etc.}\quad+1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{5}\delta+\text{ etc.}$$

Fiat jam $t=0$, erit seriei divergentis $1-1+2-6+24-120+720-$ etc. valor

$$=1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{5}\delta+\text{ etc.}$$

Est vero series haec valde convergens ob

$$\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -1$$

$$\beta = -\alpha-\frac{1}{2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = +\frac{1}{2}$$

$$\gamma = -\beta-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{3}\;\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{3}$$

$$\delta = -\gamma-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{4}\;\ldots\ldots\ldots = +\frac{1}{6}$$

$$\varepsilon = -\delta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{5}\;\ldots\ldots = -\frac{7}{60}$$

$$\zeta = -\varepsilon-\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{3}\gamma-\frac{1}{4}\beta-\frac{1}{5}\alpha-\frac{1}{6}\;\ldots = +\frac{19}{360}$$

$$\eta = -\zeta-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\delta-\frac{1}{4}\gamma-\frac{1}{5}\beta-\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{7} = -\frac{3}{70}$$

etc.

ergo seriei propositae $1-1+2-6+24-$ etc.

$$\text{valor} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}-\frac{7}{360}+\frac{19}{2520}-\frac{3}{560}+\text{ etc.}$$

$$\text{differentiae } 1^{\text{mae}}\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{72},\ \frac{1}{84},\ \frac{11}{5040},\ \text{etc.}$$

$$\text{differentiae } 2^{\text{dae}}\quad \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{30},\ \frac{13}{360},\ \text{etc.}$$

etc.

hujus autem seriei non difficulter summa vero proxima invenitur, prodibitque fere 0,59521. Ceterum non mediocriter gaudeo, Tibi meum series divergentes considerandi modum probari, sic utique rectius dixerim esse 0,59521 valorem illius expressionis finitae, ex cujus evolutione series divergens $1-1+2-6+$ etc. nascatur. Vix autem crediderim ullum dari casum, quo eadem series divergens ex evolutione plurium formularum diversarum oriri queat.

Fundamenta solutionis meae problematis de motu catenae, seu plurium corpusculorum filo connexorum lubentissime judicio Tuo, Vir Amplissime, subjiciam. Utor ad hoc lemmatibus quibusdam, quorum ratio ex dynamicis facillime constat:

I. Si corpus secundum rectam AB motu quocunque feratur, cujus massa sit A; si tempore t elapso confecerit spatium $AP=x$, erit ejus celeritas in $P=\frac{dx}{dt}$, et vis id in P secundum PB sollicitans $=\frac{2Addx}{dt^2}$, posito dt constante.

II. Si (Fig. 74) corpus in linea curva EM moveatur utcunque, atque tempore t elapso versetur in M, quod punctum determinetur coordinatis $AP = x$, $PM = y$, corporisque motus resolutus concipiatur secundum directiones Mp et Mn, ipsis x et y parallelas, erit celeritas in directione $Mp = \frac{dx}{dt}$, et in directione $Mn = \frac{dy}{dt}$. Tum vero si massa corporis sit $= A$, erit vis sollicitans corpus secundum $Mp = \frac{2Addx}{dt^2}$, et secundum $Mn = \frac{2Addy}{dt^2}$.

His jam praemissis sint (Fig. 75) tria corpuscula L, M, N, filo connexa, quae super plano utcunque moveantur. Pervenerint ea elapso tempore t in situm, quem figura exhibet. Sumta recta AB pro axe, ad eumque demissis perpendiculis LP, MQ, NR, vocentur $AP = x$, $PL = y$, $AQ = x'$, $QM = y'$, $AR = x''$, $RN = y''$, et sit longitudo fili $LM = a$, ejus inclinatio ad axem $AB = \varphi$, longitudo fili $MN = a'$, ejusque inclinatio ad axem $= \varphi'$; erit $x' - x = a\cos\varphi$, $y' - y = a\sin\varphi$, $x'' - x' = a'\cos\varphi'$ et $y'' - y' = a'\sin\varphi'$. Tum vero per lemma secundum necesse est, ut corpusculum L sollicitetur

secundum Lp vi $= \frac{2Lddx}{dt^2}$, secundum Ll vi $= \frac{2Lddy}{dt^2}$;

corpusculum M vero

secundum Mq vi $= \frac{2Mddx'}{dt^2}$, secundum Mm vi $= \frac{2Mddy'}{dt^2}$;

corpusculum denique N

secundum Nr vi $= \frac{2Nddx''}{dt^2}$, secundum Nn vi $= \frac{2Nddy''}{dt^2}$.

Ponatur nunc tensio fili $LM = P$, fili $MN = Q$, atque a vi P corpus L urgebitur secundum Lp vi $= P\cos\varphi$, secundum Ll vi $= P\sin\varphi$; corpus M secundum $M\xi$ vi $= P\cos\varphi$, secundum MQ vi $= P\sin\varphi$. Deinde a tensione Q fili MN corpus M urgebitur secundum Mq vi $= Q\cos\varphi'$, secundum Mm vi $= Q\sin\varphi'$, at corpus N secundum $N\varrho$ vi $= Q\cos\varphi'$, secundum NR vi $= Q\sin\varphi'$. Hae vires nunc illis, quae ex consideratione motus sunt elicitae, aequales esse debent, unde obtinentur sequentes aequationes:

$$\frac{2Lddx}{dt^2} = P\cos\varphi, \quad \frac{2Mddx'}{dt^2} = Q\cos\varphi' - P\cos\varphi, \quad \frac{2Nddx''}{dt^2} = -Q\cos\varphi'$$

$$\frac{2Lddy}{dt^2} = P\sin\varphi, \quad \frac{2Mddy'}{dt^2} = Q\sin\varphi' - P\sin\varphi, \quad \frac{2Nddy''}{dt^2} = -Q\sin\varphi'.$$

Quae aequationes cum superioribus conjunctae sufficient ad quantitates P, Q, φ et φ' eliminandas, atque problema perfecte solvent, uti facillime perspicies.

Vale, Vir Amplissime, mihique favere perge. Dabam Berolini d. 17 Julii 1745.

P. S. Dum haec de serie divergenti $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 -$ etc. scripsi, in alium modum quantitatem finitam, ex qua nascitur, exprimendi incidi, qui ita se habet

$$1 - a + 2a^2 - 6a^3 + 24a^4 - 120a^5 + \text{etc.} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{2a}{1 + \cfrac{2a}{1 + \cfrac{3a}{1 + \cfrac{3a}{1 + \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{1 + \cfrac{5a}{1 + \cfrac{5a}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

ex qua expressione facile limites, inter quos ille valor contineatur, assignantur, qui quantumvis prope libuerit ad rationem aequalitatis accedant. Sic si $a = 1$ valorque quaesitus ponatur

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} \;= s, \quad \text{erit}$$

$$\left.\begin{array}{l} s < \frac{1}{1},\; s < \frac{2}{3},\; s < \frac{8}{13},\; s < \frac{44}{73},\; s < \frac{300}{501},\; s < \frac{2420}{4051},\; s < \frac{22460}{37633} \\ s > \frac{1}{2},\; s > \frac{4}{7},\; s > \frac{20}{34},\; s > \frac{124}{209},\; s > \frac{920}{1546},\; s > \frac{7940}{13327},\; s > \frac{78040}{130922} \end{array}\right\} \text{etc.}$$

Hinc in fractionibus decimalibus collegi valorem ipsius s contineri intra hos limites 0,5963107 et 0,5963764, quorum posterior multo propior est veritati, quam prior, ita ut revera quasi sit $s = 0{,}5963475922$. Fallax ergo fuit modus a me ante adhibitus, seu saltem non nimis aptus ad appropinquandum, quo inveneram $s = 0{,}59521$. Hoc itaque valore ab 1 subtracto, erit valor (seu uti vocare volueris) seriei

$$1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{etc.} \;= 0{,}4036525,$$

qui in meis praecedentibus perperam erat 0,40478. Simili autem modo inveni fore generaliter

$$1 - ma + m(m+n)a^2 - m(m+n)(m+2n)a^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)a^4 - \text{etc.} \;=$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{ma}{1 + \cfrac{na}{1 + \cfrac{(m+n)a}{1 + \cfrac{2na}{1 + \cfrac{(m+2n)a}{1 + \cfrac{3na}{1 + \cfrac{(m+3n)a}{1 + \cfrac{4na}{1 + \cfrac{(m+4n)a}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

ex qua expressione arbitror, non contemnendas conclusiones derivari posse.

Habere autem seriem $z - 1z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 120z^6 + 720z^7 -$ etc. valorem determinatum, sequenti modo mihi demonstrare posse videor. Concipiatur curva, cujus abscissa existente $= x$, applicata sit $y = \frac{1}{1 - lx}$, erit hujus curvae area

$$= \int \frac{dx}{1 - lx} = \frac{x}{1 - lx} - \frac{1x}{(1 - lx)^2} + \frac{1.2.x}{(1 - lx)^3} - \frac{1.2.3.x}{(1 - lx)^4} + \text{etc.}$$

quae cum habeat determinatam quantitatem, sequitur quoque hanc seriem valorem determinatum habere.

Quod luctum mihi ex morte Patris mei inflictum consolatione Tua lenire volueris, maximas Tibi ago gratias, Deumque T. O. M. rogo, ut Te cum Tuis incolumem et ab omnibus calamitatibus immunem servare velit!

His absolutis accipio schedulam Tuam litteris Celeb. Dan. Bernoullii inclusam, in qua lapsum formularum mearum recte annotas, quem ipse ignoraveram. In scripto enim meo, unde istas formulas exscripseram, aliis usus eram litteris constantibus, ad legem homogeneitatis nondum accommodatis, quarum loco inter describendum alias litteras substitui, sicque per errorem evenit, ut alteram formulam ponerem

$$dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)(2a - \beta + a\cos s)}},$$

cum scribere debuissem

$$dr = ds \sqrt{\frac{\beta(2 - \cos s)}{(2 + \cos s)(2a - \beta + a\cos s)}};$$

ita ut mihi sit β, quod Tu per $\beta\beta$ in emendatione exprimis. Sic autem formula prior

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - (\cos s)^2}{2a - \beta + a\cos s}}$$

recte se habet.

B. Duae litterae ad Fredericum II, Regem Borussorum, datae annis 1749 et 1763.

1*).

Sire,

Ayant fait l'examen de la loterie italienne dont V. M. a bien voulu me charger si gracieusement, j'ai premièrement déterminé combien chaque joueur devrait payer pour que l'avantage fût égal tant pour le banquier que pour le joueur, d'où l'on connaîtra d'abord, combien le banquier doit gagner probablement, si le joueur est obligé de payer plus que l'égalité du jeu ne demande.

Suivant le projet, on fait 90 billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4 etc. jusqu'à 90, dont on ne tire que 5 au hasard, lorsqu'on juge qu'un assez grand nombre de joueurs s'est engagé. Or on peut prendre part à ce jeu de plusieurs manières différentes, selon que chaque joueur le trouve convenable.

La 1ère est: le joueur choisit à volonté un numéro des 90 proposés, et il détermine lui-même le gain qu'il veut avoir en cas que son nombre se trouve parmi les 5 billets qu'on tirera à la loterie; et en proportion du gain qu'il attend, il est obligé de payer une certaine somme d'argent. Supposant que le joueur fasse prétention à un gain de 100 écus; pour que le parti soit égal, il devrait payer la 18ème partie de 100 écus, c'est à dire 5 Rthlr. 13 gr. 4 pf. Or selon le projet, il doit payer 8 Rthlr. Donc la banque doit s'attendre à un profit de 44 p. cent. Il en sera de même de tous les autres prix que les joueurs demandent par cette manière de jouer. Comme si quelqu'un vouloit gagner 1000 écus, en cas que son nombre se trouvât parmi les 5 qui se tirent, il serait obligé de payer d'avance, pour obtenir cette condition, 80 écus, et ainsi des autres prix, plus hauts ou plus bas, que les joueurs pourroient choisir.

La 2de manière de jouer se fait pas les ambes, ensorte que le joueur choisit deux nombres à la fois, et détermine lui même le prix qu'il veut gagner, en cas que tous les deux nombres se trouvent parmi les cinq numéros qu'on tirera au jour de la loterie. La probabilité que deux nombres, choisis à plaisir, se rencontrent dans les 5 qu'on tire au hasard des 90, n'étant que $\frac{5.4}{90.89}$ ou $\frac{2}{801}$, pour que le parti fût égal, il ne devrait payer que $\frac{2}{801}$ parties du prix auquel il prétend, c'est à dire, s'il demande un prix de 100 écus, il ne paieroit que 5 gr. $11\frac{81}{89}$ pf. ou 6 gr. à peu près. Or, selon le projet, la mise, pour avoir ce gain, est 14 gr., donc la banque gagneroit $133\frac{5}{8}$ p. cent. Or comme ce profit seroit trop considérable, pour mieux encourager les joueurs, on leur accorde 20 p. cent sur chaque prix qu'ils gagneront par une ambe, c'est à dire, au lieu de 100 écus, on leur promet de payer 120 écus en cas que leur ambe vienne à gagner, et partant la banque profitera probablement $94\frac{11}{16}$ p. cent.

La 3ème manière de participer à cette loterie est pas ternes, où le joueur se choisit 3 nombres à la fois,

*) Responsio ad sequens rescriptum regium: «Sa Majesté le Roi de Prusse, notre très gracieux Souverain, fait envoyer ci-joint au Professeur Euler le projet d'une loterie, établie dans la plupart des villes considérables d'Italie, et qui a été présenté à Sa Majesté par un certain Roccolini, pour examiner avec exactitude les calculs algébriques qui entrent dans toutes les pièces de ce projet; mais sourtout de bien approfondir par l'algèbre tous les hasards que l'entrepreneur d'une pareille loterie peut courir, et de même les profits qu'il pourroit faire par là, et d'en faire, aussitôt que faire se pourra, son très humble rapport à Sa Majesté. A Potsdam le 15 septembre 1749.

Signatum: Federic.

P. S. En cas que le dit Professeur Euler ait encore besoin de quelques lumières touchant ce projet, il pourra s'adresser pour cet effet au Lieutenant-général Comte de Mottembourg.»

sous condition de gagner le prix en cas que tous ces trois nombres se trouvent dans les 5 extraits, de sorte qu'il perde, soit qu'aucun de ses nombres ne s'y trouve, soit qu'il s'y en trouve un seulement, ou deux. Dans ce cas, la probabilité de gagner pour le joueur est $= \frac{5.4.3}{90.89.88}$ ou $\frac{1}{11748}$; de sorte que, pour gagner un prix quelconque, il n'auroit qu'à en payer la $11748^{\text{ème}}$ partie, pour que l'avantage fût égal de part et d'autre. Ainsi, pour gagner par une terne un prix de 100 écus, le joueur ne devroit payer que $2\frac{1}{2}$ pf. Or, selon le projet, le paiement pour ces 100 écus est marqué de 15 pf.; donc la banque gagneroit $511\frac{7}{8}$ p. cent. Mais pour un plus grand encouragement, la banque s'engage de bonifier 80 p. cent sur chaque prix qui se gagne par ternes, et partant le profit de la banque seroit 240 p. cent.

Ce sont les trois principales manières de jouer; mais dans les papiers qui m'ont été communiqués, il est fait mention encore d'autres manières mêlées de celles-ci. Comme p. exemple, un jouer choisit 3 nombres avec ces conditions que, si tous les trois se trouvent parmi les nombres qui seront tirés, il prétend à un prix de 50 écus, par exemple; mais s'il ne s'y rencontre que deux de ses nombres, ou une ambe, il prétend à 5 écus. Pour cette condition on trouve, par la règle des combinaisons, que, pour que le parti soit égal de part et d'autre, il faut payer pour la terne $\frac{1}{11748}$ du prix, et pour l'ambe $\frac{85}{11748}$ du prix: Donc celui-là étant supposé de 50 écus, et celui-ci de 5 écus, le joueur sera obligé de payer, en tout, un peu moins qu'un gros. Je ne trouve pas, combien il faut payer dans ce cas selon le projet; mais il est à présent très facile de le déterminer ensorte, que la banque gagne autant qu'on veut. Comme, si la banque vouloit gagner 100 p. cent, le joueur devrait payer 2 gros, au lieu d'un.

Il sera également aisé de déterminer, tant pour ces manières de jouer que pour toutes les autres qu'on peut imaginer, combien le joueur doit payer pour les conditions qu'il exige, afin que la banque en tire un tel profit, ou autant p. cent qu'on souhaitera. Le profit auquel la banque se pourroit attendre probablement, selon le projet de l'Italien, sera donc assez considérable, puisque sur les simples extraits, elle gagneroit 44 p. cent, sur les ambes 94 et sur les ternes 240 p. cent.

On n'est pas même attaché ni au nombre de 90 billets, ni à celui de 5 qu'on en tire au jour que la loterie se joue. On y peut varier, comme on jugera à propos. Pour le mieux faire voir, j'ajouterai ici un autre projet où le nombre des billets est 100, marqués des nombres 1, 2, 3, 4 jusqu'à 100, desquels on tire au hasard 10, et les conditions du jeu pour les joueurs seront les suivantes, pour que l'avantage soit égal de part et d'autre.

I. Le joueur ne prenant qu'un nombre, pour qu'il gagne 1000 écus, en cas que son nombre se trouve parmi les dix extraits, il doit payer à la banque .... 100 écus.

II. Si le joueur se choisit deux nombres, on pourra faire deux cas:

1) pour qu'il gagne 1000 écus, en cas que tous les deux nombres se trouvent parmi les dix extraits, il doit payer.......................... $9\frac{1}{11}$ écus

2) pour qu'il gagne 1000 écus, en cas qu'un seul de ses nombres se trouve parmi les extraits, il doit payer .... $181\frac{9}{11}$ écus

III. Si le joueur se choisit trois nombres, on pourra considérer trois cas:

1) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsque tous ses trois nombres se rencontrent dans les dix extraits, il doit payer............................ 18 gros

2) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsqu'il ne se trouve que deux de ses nombres dans les extraits, il doit payer .... 25 Rthlr. 1 gr.

3) s'il veut gagner 1000 écus, pourvu qu'un de ses nombres se trouve parmi les extraits, il doit payer . . . . 247 Rthlr. 16 gr.

IV. Si le joueur choisit 4 nombres, on pourra considérer quatre cas:

1) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsque tous ses quatre nombres se rencontrent dans les dix extraits, il doit payer . . . . 1 gr. 4 pf.

2) pour avoir le même gain, lorsque trois de ses nombres se rencontrent parmi les dix extraits, il doit payer . . . . 2 Rthlr. 21 gr.

3) pour avoir le même gain, s'il ne se trouve que deux de ses nombres tirés, il payera. . . . . 47 Rthlr. 10 gr.

4) enfin le même gain lui revient si, parmi les numéros tirés il ne se trouve qu'un seul de ses nombres; mais dans ce cas il faudra qu'il ait payé . . . . 312 Rthlr. 17 gr.

J'ai supposé ici partout le gain de 1000 écus, mais il est évident qu'on peut appliquer ces résultats à tous les gains possibles que les joueurs pourroient prescrire; car si le joueur prétend à un gain ou plus grand ou plus petit que 1000 écus, il paiera en proportion ou d'autant plus, ou d'autant moins.

Selon les arrangemens marqués, l'avantage seroit parfaitement égal du côté de la banque et des joueurs, mais il est facile d'augmenter les mises des joueurs afin que la banque gagne tant qu'on veut. Comme, si la banque vouloit un profit de 50 p. cent, on n'aurait qu'à augmenter les mises marquées de leur moitié chacune. Si la banque vouloit un profit de 100 p. cent, les joueurs devroient payer le double, et ainsi de suite.

Il seroit convenable de se contenter d'un profit médiocre, comme de 20 p. cent, sur les cas où le joueur est obligé de payer une partie considérable du prix qu'il prétend, comme la 10ème partie et au delà. Mais où la mise est fort petite par rapport au gain qu'on prescrit, on pourra considérablement augmenter le profit, sans que les joueurs en soient découragés. Ainsi, lorsque le joueur ne devroit payer que 18 gr. pour gagner 1000 écus, il ne balanceroit pas beaucoup de payer 2 écus, au lieu de 18 gr., et par ce moyen la banque gagneroit 166 p. cent.

De cette manière le hasard, auquel la banque est exposée, deviendra plus petit; car la banque risque d'autant moins, plus la somme que les joueurs doivent payer, sera considérable.

Pour le risque de la banque il est à remarquer qu'on ne peut pas compter sûrement sur le profit que le calcul montre. Cependant, en général, on peut assurer que plus le nombre des joueurs est grand, plus sera aussi certain le profit marqué par le calcul. Mais si le nombre des joueurs est fort petit, ou que quelqu'un fasse prétention à un gain immense par une mise medique, il pourroit réussir, quelque petite que soit la probabilité, et par ce moyen la banque courroit risque de faillir.

Cette loterie est donc de telle nature qu'il ne seroit pas à propos de s'en mêler, à moins qu'on ne fût assûré qu'un très grand nombre de joueurs y voudraient prendre part, et encore, dans ce cas, la banque devroit être en droit de ne s'engager point à de trop grandes sommes. On ne doit pas non plus accorder, qu'un très grand nombre de personnes choisissent les mêmes nombres pour gagner, puisque en cas qu'ils gagnassent toutes, la banque souffriroit une perte trop considérable.

Dans la persuasion que ces calculs avec les remarques y jointes seront conformes à la haute intention de V. M. je suis avec le plus profond respect etc.

Euler.

2*).

Sire,

Après avoir examiné, par ordre de Votre Majesté, le plan de loterie de M. de Griethausen, je trouve que les avantages que l'Etat en peut espérer pourraient être encore plus considérables que l'auteur n'assûre, et même monter à 8 millions de florins, comme je crois l'avoir prouvé dans les réflexions ci-jointes. Tout revient à savoir, si l'on peut bien s'attendre à ce que cette loterie fut remplie: la somme de 100 fl. pour chaque billet, et de 1000 fl. que la continuation pendant dix ans exige, sera toujours un objet très considérable pour bien du monde, de sorte que la distribution de 50000 billets sembleroit presque impossible, si l'on ne savoit par expérience que de telles loteries réussissent assez bien en Hollande où le crédit affermit la confiance du public. Personne n'apprendra jamais rien de moi sur ce projet. J'ose profiter de cette occasion pour présenter à V. M. mes très humbles et très respectueux remercîments des assurances grâcieuses que V. M. a bien voulu donner à mon fils; j'en suis le plus vivement pénétré, et je meurs avec le plus profond respect, Sire, de V. M. etc. Août 1763.

Euler.

Plan d'une loterie de cinq classes, chacune de 50000 billets qui toutes doivent être tirées dans un an, et réitérées pendant dix ans consécutifs.

Classes.	Mise d'un lot.	Recette.	Nombre des lots.	Somme des prix.	Reste en dépôt.
I.	10 fl.	500.000 fl.	8000	292.880	207.120 fl.
II.	15	750.000	8000	508.967	241.033
III.	20	1.000.000	8000	771.480	228.520
IV.	25	1.250.000	8000	1.047.208	202.792
V.	30	1.500.000	8000	1.524.465	— 24.465
		5.000.000	40.000	4.145.000	855.000

Après le tirage de ces cinq classes, le dépôt de 855000 fl. est employé à faire, pour une sixième classe, des prix de $28\frac{1}{2}$ fl. chacun pour 30000 billets, s'il y en a autant qui n'ont rien gagné dans les cinq classes. Il y a ici une incertitude sur laquelle je fais les réflexions suivantes:

*) Responsio ad sequens rescriptum regium: «Le nommé Griethousen en Hollande venant de M'envoyer un plan de loterie qu'il pense d'établir dans le pays de Clèves, pour aider cette province à se débarasser des dettes qu'elle s'est vue obligée de contracter pendant les troubles de la dernière guerre. J'ai bien voulu vous communiquer ci-joint ce plan, afin que vous l'examiniez dans tout son détail et me marquiez ensuite votre sentiment, si vous le trouvez solide et équitable pour être agréable au public, et pour que la susdite province en trouve le soulagement que l'auteur en fait espérer. J'attends le rapport que vous M'en ferez, auquel vous voudrez bien Me faire le plaisir de joindre le plan susdit avec vos remarques. Je voudrois d'ailleurs que vous n'en fissiez point d'éclat encore, ni qu'il en transpirât quelque chose hors de saison dans le public, tant sur ce qui regarde ce plan, que sur son auteur. Sur ce Je prie Dieu qu'il vous ait en sa Sainte garde. A Potsdam ce 17 d'août 1763.»

Signatum: «Federic.»

1° Si tous les prix dans les cinq classes tomboient sur des billets différents, de sorte qu'aucun n'en gagnât deux, il n'y auroit que 10000 qui entreroient dans la 6ème classe dont chacun retireroit $28\frac{1}{2}$ fl. ce qui faisant 28500 fl., laisseroit un profit de 570000 fl. pour les entrepreneurs ou pour la caisse.

2° Si tous les prix dans chaque classe tomboient sur les mêmes 8000 billets, il y auroit 42000 sans gain, dont 30000 profiteroient du bénéfice de la 6ème classe, et 12000 n'auroient absolument rien. Aussi le profit de l'entrepreneur s'évanouiroit.

3° Or ni l'un ni l'autre de ces deux cas n'existera probablement jamais, et l'on peut supposer à peu près qu'il y aura ordinairement le milieu, c'est à dire 26000 billets sains gains; de sorte que la 6ème classe ne contiendra qu'autant de billets, au lieu de 30000, et par conséquent le profit de l'entrepreneur peut être censé de 114000 fl.

4° Ce profit deviendra encore plus considérable par le § 19 N. B, où la dixième partie de chaque grand lot de 1000 fl. et au dessus doit être partagée parmi les 9 compagnons de la même parcelle, et qui, par conséquent, seront exclus de la 6ème classe. Comme il y a dans les cinq classes 328 tels lots ou primes, il pourroit y avoir 9 fois autant, c'est à dire 2957 qui ne concourroient point dans la 6ème classe. Mais comme plusieurs en seront exclus d'eux mêmes, en comptant la moitié, 1500, le nombre des participants à la 6ème classe en sera diminué, et partant le profit de la caisse devra être estimé à 156.750 fl.

5° Les années suivantes ce profit deviendra plus considérable, parce que ceux qui ont gagné 1000 fl. et au-delà, dans les années précédentes, seront à l'avenir pour toujours exclus de la ressource de la 6ème classe, quoique leurs lots ne gagnent plus rien.

6° L'auteur met ce profit de la caisse par an à 250000 fl., laquelle somme pourroit bien être trop grande; mais comme c'est le hasard dont dépend cette somme qui pourroit également devenir tant beaucoup plus grande que plus petite, on n'y sauroit compter pour sûr. Cependant on le doit regarder toujours comme un objet très considérable.

7° Cet argent mis dans la caisse peut être employé pendant les dix ans et fournir des intérêts à 5 p. cent comme l'auteur suppose; mais au bout de ce temps, il ne dit pas ce que doit devenir ce capital lui-même qui doit monter pourtant à 2.500000 fl. Cette somme, qui semble devoir être un profit réel pour la caisse, n'est pas comprise dans les 7 millions qu'il suppose rester au profit de l'Etat.

8° Il y a encore un autre bénéfice résultant de l'association proposée, où ceux qui en veulent profiter paient pour leurs lots 10 p. cent au-delà de la mise ordinaire, ce qui fait 10 fl. par an sur chaque lot, et ce surplus doit être partagé au bout de 10 ans parmi ceux des associés qui auront perdu, *pro rata* de leur perte. Pendant ce temps, cette somme peut être placée à intérêts qui tomberont au profit de la caisse.

9° Outre cela, on déduit de chaque gain 10 p. cent, ce qui fait 500000 fl. par an, laquelle somme, avec celles des articles précédents, sera mise à intérêt à 5 p. cent, et l'auteur suppose que tout cela pourroit bien monter à 1 million par an dont il rassemble les intérêts qui en écheoient tous les ans. Or, il ne dit pas à quoi ces intérêts sont employés tous les ans: si c'est d'abord au profit du pays pour payer les dettes, ou s'ils doivent rester dans la caisse, auquel cas ils pourroient bien être employés à produire de nouveaux intérêts.

C. Octodecim litterae ad Cel. Lagrange datae annis 1755 ad 1775.

1.

Vir praestantissime atque Excellentissime.

Perlectis tuis postremis litteris, quibus theoriam maximorum ac minimorum ad summum fere perfectionis fastigium erexisse videris, eximiam ingenii tui sagacitatem satis admirari non possum. Cum enim non solum in tractatu meo de hoc argumento methodum mere analyticam desideravissem, qua regulae ibi traditae erui possent, sed etiam deinceps non parum studii in hujusmodi methodo detegenda consumpsissem, maximo sane gaudio me affecisti, quod tuos profundissimas aeque ac solidissimas meditationes super his rebus mecum benevole communicare voluisti, quamobrem tibi me maxime obstrictum agnosco. Statim autem perspixi analysin tuam, quae meas hujusmodi problematum solutiones per sola analyseos praecepta elicuisti, multo latius patere mea methodo ideis geometricis innixa. In universa enim serie valorum ipsius y, qui singulis valoribus ipsius x respondent, donec x dato valori a aequetur, ego unicum valorem ipsius y data quadam particula δy augeri concepi, indeque incrementum in formula integrali $\int zdx$ ortum investigavi, dum tu, Vir clarissime, singulos valores ipsius y incrementa δy capere assumis, quam ob causam, non dubito quin tua analysis, si penitus excolatur, ad multo profundiora mox sit perductura. Cujus quidem praestantiae jam eximia exempla a te feliciter confecta circa lineas citissimi appulsus ad datam lineam, quin etiam de methodo maximorum ad superficies applicata commemoras, quae omnia ut accuratius persequaris etiam atque etiam te rogo. Mea quidem methodo usus, plures hujusmodi quaestiones circa superficies pertractavi in scientia navali, quae duobus voluminibus in 4[to] Petropoli pluribus abhinc annis prodiit. Quod autem ad tuam methodum, qua singulis applicatis y incrementa δy tribuis, attinet, antequam hoc ipsum, quod non aperte indicas, animadverti, de consensu tuarum formularum cum meis dubitaveram. Ut enim $\int zdx$ fiat maximum existente:

$$dz = Ndy + Pd^2y + Qd^3y + \ldots\ldots$$

(ubi quidem pro δx unitatem ponis, non pro x, uti forte lapsu calami notas), necesse est, ut tuo signandi more sit

$$\delta\int zdx, \quad \text{seu} \quad \int \delta zdx = 0.$$

At vero invenis, ponendo tecum 1 pro δx:

$$\delta\int z = \int(N - dP + d^2Q - d^3R \text{ etc.})\,\delta y + (P - dQ + d^2R)\,\delta y + (Q - dR)\,d\delta y \quad \text{etc.}$$

unde concludis esse debere

$$N - dP + d^2Q - d^3R = 0.$$

Cum tamen natura maximorum tantum postulet, ut sit:

$$\int(N - dP + d^2Q - d^3R \text{ etc.})\,\delta y = 0.$$

Verum perspecta amplitudine .... si unicae applicatae y incremen .... $\int(N - dP + d^2Q -)\,\delta y$ alius val .... partes $(P - dQ + d^2R)\,\delta y + (Q$ .... $x = a$ referuntur evanescere, ... sensus deprehendatur.

Vehementer etiam te rogo, Vir clarissime, ut mihi ignoscas, quod ad tuos priores litteras m ...... commercium nostrae urbis cum Italia .... ut nisi per mercatores promoveatur, non .... possit. Quare cum mihi jam mercatorem tuum indicaveris, has litteras ad eum per mercatorem mittens rogo, ad quem etiam tuam responsionem, qua forte me honorare volueris, per tuum mercatorem mittere vellem.

Quod autem in prioribus litteris de analogia differentialium cujusque ordinis formulae xy et terminorum binomii potestatis $(a+b)^m$ attulisti, eam jam a Leibnitzio observatam esse memini, quod nisi fallor in ejus cum Bernoullio commercio reperies. Vale et salve

Dabam Berolini d. 6 Sept. 1755. Tibi addictissimo L. Eulero *).

2.

Vir clarissime atque acutissime

Binas tuas epistolas, alteram circa finem anni elapsi, alteram vero nuper, ad me datas, summa cum voluptate perlegi, summamque ingenii tui perspicaciam maxime sum admiratus. Non solum enim methodum illam maximorum et minimorum, cujus equidem prima quasi elementa exposueram, ex veris iisque subtilissimis principiis elicuisti, verum etiam eandem penitus perfecisse videris, ut nihil amplius, quod in hoc genere desiderari queat, sit relictum. Quamobrem tibi, Vir clarissime, ex animo gratulor, ac te etiam atque etiam rogo, ut quae in hoc genere tam felici cum successu es meditatus, ea omni studio penitius perscrutari ac perficere pergas. Subtilissimae autem hic occurrunt quaestiones, quae non solum omnem ingenii solertiam, sed etiam maximam circumspectionem in ratiocinando postulant, quandoquidem haec methodus nobis objecta plurimis plerumque circumstantiis involuta exhibet, quas nisi calculum ad exempla determinata applicemus, vix distincte perspicere valeamus. Ita cum investigatio curvae maximi minimive proprietate praeditae perduxerit ad hanc aequationem $L=0$, quae scilicet indicat tractu curvae, paululum immutato, variationem inde ortam evanescere, quemadmodum natura maximi minimive postulat, dubito an aequationes $dL=0$, $d^2L=0$, seu $L=\alpha$ vel $L=\alpha+\beta x$ ad eundem sub aliis circumstantiis perducere queant. Neque etiam transformatio formulae

$$\int L\delta y \quad \text{in} \quad L\int\delta y - dL\int^2\delta y \quad \text{etc.}$$

novas determinationes mihi quidem suppeditare videtur; sed tantum indicare si sit $L=0$, fore etiam $dL=0$, quod utique verum est, sed conclusio inversa locum non habet. Nam nisi sit $L=0$, ratio maximi vel minimi non amplius versatur; sed fortasse hujusmodi positiones aliis problematis solvendis inservire poterunt. Quod autem brachystochronas per tria plurave puncta data transeuntes attinet, crediderim eas non esse curvas continuas, sed a quovis puncto ad proximum sequens arcum cycloidis duci oportere, quo tempus translationis ab altero ad alterum fiat minimum: si enim corpus celerrime singulas has portiones percurrat, totam curvam sine dubio tempore brevissimo conficiet.

Deinde si non inter omnes curvas, sed eas tantum, quae sub certo quodam genere continentur, quaeratur ea, quae maximi minimive proprietate gaudeat, tua quidem methodus ad hujusmodi quaestiones aequo cum successu adhiberi potest, dum mea nullius est usus, sed evolutio calculi saepenumero maximis obnoxia est difficultatibus; velut si (Fig. 76) super semiaxe horizontali dato AC infiniti describantur quadrantes elliptici AD, AQ, qui ratione semiaxis conjugati CD, CQ, differant, inter eosque quaeratur is AD, super quo corpus in vacuo descensum ex A incipiens, citissime ad rectam CQ perveniat, aequatio infinita pro specie hujus ellipsis invenitur, unde non nisi appropinquando valor semiaxis conjugati CD definiri potest. Adhibitis autem appropinquationibus, reperis esse debere:

$$8CD^2 = 3AC^2, \quad \text{seu} \quad CD = AC\sqrt{\frac{3}{8}}$$

*) Omnes litterae e Berolino datae propria Euleri manu conscriptae sunt.

scire ergo velim, an haec sit vera solutio? et si sit vera, an ea non directe ope methodi cujusdam certae obtineri queat.

Litteras tuas tam profundis meditationibus refertas cum illustrissimo praeside nostro communicavi, qui summam tuam sagacitatem mecum plurimum est admiratus, simulque tibi pro suscepto principii minimae actionis patrocinio, maximas agit gratias: tuoque nomine numerum sociorum academiae nostrae haud mediocriter illustratum iri censet, quod munus ut tibi conferatur prima oblata occasione curabit. De eo quoque mecum est allocutus, ut ex te sciscitarer, an non sedem, qua Taurini frueris, cum alia in Germania sub auspiciis regis nostri munificentissimi, cui te commendare vellet, permutare cupias; qua de re ut me certiorem facias, enixe rogo; mihi enim certe nihil evoptatius exenire potest, quam si tecum coram communicare, tuaque consuetudine frui liceret. Vale et salve, Vir praestantissime

Berolini d. 24 Aprilis 1756. Tibi deditissimo L. Eulero.

3.

Vir clarissime ac praestantissime

Ad litteras tuas mihi quidem jucundissimas prius respondere nolui, quam sententiam tuam cum illustri praeside nostro nunc in Gallia degente communicavissem, qui uti tuum praestantissimum ingenium mecum maxme admiratur, ita mihi mandavit, ut quantocius te Academiae nostrae commendarem, et in numerum sociorum nostrorum adscribi curarem. Quod cum summo applausu hodie sit expeditum, consuetum diploma cum his litteris accipies. Caeterum ill. praeses noster mihi perscripsit, se post reditum suum apud regem nostrum omnem operam esse adhibiturum, ut tuis meritis dignam stationem obtineat. Cum is tam propenso in te sit animo, haud abs re fore arbitror, si ad ipsum litteras dare volueris, quas ita inscibere poteris: *à M. de Maupertuis, président de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Prusse, à St.-Malo*, quo loco hyemem commorari decrevit. Interim Academia nostra profundissimas tuas meditationes summo cum desiderio expectat, quibus in posterum nostri commentarii exornentur. Vale, Vir clarissime,

faveque ingenii tui sagacissimi admiratori candidissimo

Berolini d. 2 Sept. 1756. L. Eulero.

4.

Vir clarissime ac praestantissime

Inter tot et tam atroces tumultus bellicos, quibus hic undequaque premimur, tantis curis equidem sum districtus, ut fere omne commercium litterarum negligere sim coactus, ex quo imprimis te, Vir clarissime, etiam atque etiam rogo, ut ne mihi meam negligentiam in scribendo vitio vertere velis. Quanquam autem Miscellanea philosophico-mathematica, quorum exemplar mihi benevole destinasti, nondum accepi, nec fortasse tam cito expectare possum, tamen non potui, quin tibi pro hoc testimonio amicitiae gratias agam maximas, simulque meam laetitiam et admirationem declarem, quod tam felici successu tam sublimes ac profundissimas investigatio-

nes perfeceris. Litterae tuae mihi demum post obitum dignissimi praesidis nostri sunt redditae, quo casu equidem eo gravius sum perculsus, quod optimum fautorem ac suavissimum amicum amisserim: litteras ergo tuas ad illum directas in nostro conventu academico aperiri, maxime optassem, ut ab ipso superstite responsum accipere posses. Nunc quid tibi scribam nescio? Fama est locum praesidis Alembertio cum maximis emolumentis destinari, quo casu an tuum excellentissimum opus huc mitti consultum sit, ipse judicaveris. Quin potius operam da, ut quam primum prelo committatur; hic enim his turbulentis temporibus vix quisquam bibliopola suam operam esset praestaturus. Genevae putem hujusmodi opus commodissime excudi posse, vel Lausannae, ubi quidem summo otio fruuntur. Lubens cognovi tibi meam solutionem cordae vibrantis probari, quam Alembertus variis cavillationibus infirmare est conatus, idque ob eam solam rationem, quod non ab ipso esset profecta. Minatus est se gravem refutationem esse publicaturum, quod an faceret nescio, putat se per eloquentiam semidoctis fucum esse facturum; dubito an serio rem gerat, nisi forte amore proprio sit penitus occoecatus. Voluit nostris commentariis non demonstrationem, sed nudam declarationem inseri meam solutionem maxime esse vitiosam, ego vero opposui novam demonstrationem omni rigore adornatam, sed praeses noster beatae memoriae noluit ipsi nostram Academiam tanquam palaestram concedere, unde etiam meam confirmationem lubens suppressi. Ex quo judicabis, quantas turbas, si praesidio decoretur, sit aturus, equidem omnia tranquillus expecto, nihil negotii cum illo mixturus.

Analytica tua solutio problematis isoperimetrici continet, ut video, quicquid in hac quaestione desiderari potest, et ego maxime gaudeo, hoc argumentum, quod fere solus post primos conatus quasi post limines tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse avectum. Rei dignitas me excitavit, ut tuis luminibus adjutus, ipse solutionem analyticam conscripserim, quam autem celare statui, donec ipse tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriae tibi debitae praeripiam.

Quoniam his gravissimis temporibus ab aliis negotiis vacavi, librum de calculo integrali conscribere coepi, quod opus jampridem etiam meditatus, atque adeo Academiae Petropolitanae pollicitus, nunc igitur jam notabilem partem absolvi. Calculum integralem ita definivi, ut esset methodus functiones unius pluriumve variabilium inveniendi ex data differentialium vel primi vel altiorum graduum relatione; unde prout functiones sint vel unius, vel duarum pluriumve variabilium, totum opus in duos libros divisi, ubi quidem pro posteriori vix quicquam est cultum. Eo pertinent scilicet quaestiones de cordis vibrantibus, ubi pro dato tempore t et cordae puncto, cujus situs variabilis, denotetur ejus celeritas et ...... determinari debet: quaeritur enim functio quaedam (r) binarum variabilium t et s ex data relatione formularum $\frac{d^2r}{dt^2}$ et $\frac{d^2r}{ds^2}$, et hujusmodi formulis universa Hydrodynamica innititur. Utilissimum ergo erit hanc partem calculi integralis adhuc fere intactam accuratius evolvi, cujus equidem prima fundamenta jam jecisse videor. Incipiendum autem erat a differentialibus primi gradus, ut functio r binarum variabilium t et s definiatur ex data quacunque relatione inter r et has formulas $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr}{ds}$ per differentiationem inde derivatas. Ex quo perspicuum est fere omnia, quae adhuc de integrandi methodo sunt prolata, etiamsi binarum variabilium mentio fiat, ad primam tamen partem referri debere, quia altera ut functio alterius tractatur. Alio forte tempore plura de his commemorare continget. Vale ac fave

Berolini de 2 Oct. 1759.

Tibi addictissimo

L. Eulero.

P. S. Privatam adhuc societatem litterarum Taurinensem mox publicam fieri in augmentum scientiarum magnopere opto.

5.

Monsieur,

Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai pu assez admirer l'adresse avec laquelle vous maniez les équations les plus difficiles, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toute chicane et c'est d'après vos profonds calculs, que tout le monde doit reconnoître à présent l'usage des fonctions irrégulières et discontinues pour la solution de ces sortes de problèmes. En effet, la chose me paroît à présent si claire, qu'il n'y sauroit rester le moindre doute. Supposons qu'il faille chercher une fonction r des deux variables t et x telle, qu'on ait $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}$, et il est évident que toute fonctions de $t + x$, tant irrégulière que régulière peut être mise pour r: par exemple, ayant tracé a plaisir (Fig. 77) une ligne queleonque AM, si l'on prend l'abcisse $AP = t + x$, l'appliquée PM fournira une valeur pour r, et il en est de même du problème des cordes. A cette occasion j'ai observé, que ma solution n'est pas assez générale; car pour qu'on puisse donner à la corde au commencement une figure quelconque AMB (Fig. 78), ma solution exige que dans cet état, il n'y ait pas de mouvement; mais je puis résoudre à présent le problème lorsqu'on a donné d'abord à la corde non seulement une figure quelconque AMB, mais qu'outre cela on ait imprimé à chaque point M une vitesse quelconque Mm. Je vois que vous avez traité le cas où la corde au commencement est tendue en ligne droite AB, mais je ne sais pas bien si votre solution s'étend aussi au cas où l'on suppose à la corde outre, le mouvement donné, une figure quelconque. Je passe à la propagation du son dont je n'ai jamais pu venir à bout, quelques efforts que j'aie faits pour cela, car ce que j'en ai donné dans ma jeunesse est fondé sur quelque idée illusoire pour mettre d'accord la théorie avec l'expérience sur la vitesse du son. J'ai donc lu votre mémoire sur cette matière avec la plus vive satisfaction, et je ne puis assez admirer votre sagacité en surmontant tous les obstacles. A présent je vois bien qu'on pourrait tirer la même solution de la formule $\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha \frac{d^2r}{ds^2}$ en faisant usage des fonctions discontinues; mais alors M. **D'Alembert** me ferait les mêmes objections que contre le mouvement des cordes. Ce n'est qu'après vos recherches que je pourrai faire valoir cette méthode. J'ai résolu par là le cas où l'on suppose au commencement non seulement un déplacement quelconque a autant de molécules d'air qu'on veut, mais où l'on donne outre cela à chacune un mouvement comme dans les cordes; mais en ne considérant qu'une ligne physique d'air, ou bien un tuyau mince et droit rempli d'air, comme vous l'avez fait. Cette généralisation me paraît d'autant plus utile qu'elle nous découvre plus clairement le mouvement dont toutes les particules d'air sont successivement ébranlées. On peut aussi par là résoudre un doute bien important qui m'a longtemps tourmenté; c'est qu'un ébranlement excité en A (Fig. 79) se répand également des deux côtés du point A. Mais étant parvenu en X, il ne se répand que vers E: on demande donc quelle différence il y a entre un ébranlement primitif en A et un dérivatif en X, pour que celui-là se répande vers D et E et celui-ci uniquement vers E. Ce doute est levé par la solution générale dont nous venons de parler, et qui fait voir que le déplacement primitif des particules en A, avec le mouvement imprimé à chacune pourrait être tel que la propagation ne se fît que dans le sens de E; et on s'apercevra ensuite que cette circonstance a toujours lieu dans les ébranlemens dérivés. Il est bien remarquable que la propagation du son se fait actuellement plus vite que le calcul ne l'indique, et je renonce à présent à la pensée que j'eus autrefois que les ébranlemens suivans pourraient accélérer la propagation des précédens, de sorte que plus un son serait aigu, plus la vitesse serait grande, comme vous l'avez peut être vu dans nos derniers mémoires. Il m'est aussi venu dans l'esprit d'examiner, si la grandeur des ébranlemens n'y pourrait causer quelqu'accélération, puisque dans le calcul on les a supposés infiniment petits: et il est évident que leur grandeur chan-

gerait le calcul et le rendrait intraitable. Mais autant que je puis l'entrevoir, il me semble que cette circonstance diminuerait plutôt la vitesse. C'est dommage que ce même problème ne puisse pas être résolu en donnant à l'air trois dimensions ou seulement deux; car on a lieu de douter que la propagation fut alors la même; au moins est il certain que les ébranlemens seraient dans ce cas plus faibles, plus ils s'écarteraient de l'origine. J'ai bien trouvé les formules fondamentales pour le cas où l'étendue de l'air n'a que deux dimensions, ou est contenue entre deux plans. Soit (Fig. 80) Y une particule d'air dans l'état d'équilibre, qui après quelqu'agitation ait été transporté en y; posons $AX = X$, $XY = Y$, $Xx = Yu = x$ et $uy = y$. Cela posé, tant x que y seront certaines fonctions de X, Y et du temps t et partant de trois variables. Je trouve pour leur détermination les deux équations suivantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\frac{d^2x}{dX^2} + \alpha\frac{a^2y}{dXdY} \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha\frac{d^2y}{dY^2} + \alpha\frac{d^2x}{dXdY}$$

de là, si je suppose que l'ébranlement primitif se passe en A (Fig. 81) et qu'il se répande de là en ondes circulaires, de sorte qu'une de ces ondes ZV, dans l'état d'équilibre, ait été, après l'agitation, transportée en zv; posant $AZ = Z$ et $Zz = z$ la quantité r sera une fonction des deux variables t et z pour la détermination de laquelle je trouve cette équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{\alpha}{z}\frac{dr}{dz} - \frac{\alpha r}{z^2}.$$

En rejetant les deux derniers termes, il reste la même équation qui convient au cas où l'air est étendu seulement en ligne droite AE. Or par cette équation il ne parait pas que la propagation se fasse avec la même vitesse dans les deux cas. Il serait donc fort à souhaiter que l'analyse fut portée au point de pouvoir résoudre ces sortes d'équations; et j'espère que cette gloire vous est réservée. Ce que vous dites des échos est aussi important dans l'analyse que dans la physique. Tout le monde doit convenir que ce premier volume de vos travaux est un vrai chef-d'oeuvre et renferme bien plus de profondeur que tant d'autres volumes des académies établies; jamais société particulière n'a mieux mérité d'être soutenue par son souverain.

Quant aux sons de musique, je suis parfaitement de votre avis, Monsieur, que les sons consonnans, que M. Rameau prétend entendre d'une même corde, viennent des autres corps ébranlés: et je ne vois pas pourquoi ce phénomène doit être regardé comme le principe de la musique, plutôt que les proportions véritables qui en sont le fondement. Je crois encore avoir bien déterminé le degré d'agrément avec lequel on entend deux sons donnés, et de là deux sons dans la raison de 8 : 9 s'aperçoivent plus aisément que s'ils étaient dans la raison de 7 : 8. Mais je crois qu'ici il faut avoir égard à un préjugé par lequel on suppose d'avance la proportion des sons, et alors une aberration est insupposable; comme celui qui accorde un violon, si deux cordes se trouvent dans l'intervalle d'une sexte, les juge fausses, parce qu'il prétend que leur intervalle soit une quinte. Ainsi, pour l'intervalle 7 : 8, il sera fort difficile de le prendre tel qu'il est, on s'imaginera toujours qu'il devrait être celui de 8 : 9, celui-ci étant mal accordé: il ne s'agit que de prévenir ce préjugé, pour mettre en usage l'intervalle 7 : 8; mais il faudrait aussi pour cela des règles particulières de composition.

Je viens d'achever le III[e] volume de ma Mécanique qui roule sur le mouvement des corps solides inflexibles, j'y ai découvert des principes tout à fait nouveaux et de la dernière importance. Pour qu'un tel corps tourne librement autour d'un axe, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité (ou plutot par le centre d'inertie du corps), mais il faut, outre cela, que toutes les forces centrifuges se détruisent. Il est bien évident que dans tous les corps, toutes les lignes qui passent par le centre d'inertie n'ont pas cette propriété. Or j'ai démontré que dans tous les corps quelqu'irréguliers qu'il soient, il y a toujours trois lignes perpendiculaires entr'elles qui remplissent ces conditions; je les nomme les trois axes principaux du corps, par rapport

aux quels je détermine ensuite les momens d'inertie. Cette considération m'a mis en état de résoudre quantité de problèmes qui auparavant m'avaient paru insolubles, tels que celui-ci: ayant imprimé a un corps quelconque un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement, en fesant abstraction de toute force qui pourrait agir sur le corps.

J'espère que vous aurez reçu ma dernière lettre; pour celle-ci, je la fais passer par la main d'un ami a Genève, M. Bertrand qui s'est appliqué aux mathématiques avec un très grand succès.

J'ai l'honneur d'être

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 27 oct. 1759. L. Euler.

6.

Monsieur,

Depuis ma dernière lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, quoique je ne doute pas que vous n'y soyez parvenu plus heureusement, je ne crois cependant pouvoir mieux témoigner mon attachement envers votre illustre société qu'en lui présentant mes recherches sur le même sujet.

Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique.

Ces recherches commençant par ces mots:

«En considérant le milieu dans l'état d'equilibre, soit etc. et finissant par ceux-ci:

«D'ou l'en peut justement juger de l'affoiblissement du son par de grandes distances.»

Se trouvent imprimées dans le III[e] volume des Mélanges de la Société de Turin.

Voilà mes recherches que vous pouvez insérer, Monsieur, dans votre second volume, si vous le jugez a propos. Je les ai abrégées autant qu'il m'a été possible: et si vous y vouliez ajouter vos remarques, ou quelques éclaircissemens, je vous en serai infiniment obligé.

Il y a longtemps que j'ai examiné le son des Cordes qui ne sont pas également épaisses, et je viens de lire à notre académie quelques mémoires sur le son des cloches et des tambours ou tymbales, fondis sur la même théorie, des fonctions discontinues.

Faites bien mes complimens les plus empressés à toute votre illustre société, et soyez assuré que je suis avec le plus parfait attachement

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 1 Janvier 1760. L Euler.

7.

Monsieur,

Je suis très flatté de l'approbation dont votre illustre académie et vous en particulier avez bien voulu honorer mon essai sur les ébranlemens dans un milieu élastique. L'honneur de ces profondes recherches est

uniquement du a votre sagacité et je n'y ai rien fait que profiter des lumières que votre excellent mémoire m'a fournies. Vous y avez ouvert une carrière toute nouvelle ou tous les géomètres qui viendront après nous trouveront abondamment de quoi exercer leur adresse; et, à mesure qu'ils y réussiront, l'analyse en acquerra des développemens très considérables. La matière même est sans doute la plus importante en physique; non seulement tous les phénomènes de la propagation du son en dépendent, mais je suis assuré que la propagation de la lumière suit les mêmes lois on n'a qu'a substituer l'éther au lieu de l'air et les ébranlemens qui y sont répandus, nous donneront la propagation de la lumière. Il serait à souhaiter qu'on put déterminer les altérations que les ébranlemens excités dans un milieu, souffrent, lorsqu'ils passent dans un autre milieu dont la densité et l'élasticité sont différentes. Je ne sais pas si l'on peut espérer la solution de ce problème mais je suis convaincu qu'on y découvrirait infailliblement, non seulement les véritables lois de la réfraction, mais aussi l'explication la plus complète de la réflexion dont la réfraction est toujours accompagnée. On verrait qu'il est impossible que les rayons passent d'un milieu dans un autre sans qu'une partie rebrousse chemin. Peut être cette considération pourroit-elle faciliter le développement de l'analyse et fournir au moins quelques solutions particulières. Mais on rencontrera ici une nouvelle difficulté: comme il faut estimer tant la densité que l'élasticité des autres milieux transparens, du verre par exemple, la densité étant si grande par rapport à celle de l'éther sans qu'on puisse supposer son élasticité plus grande, que la vitesse des rayons dans le verre deviendrait extrêmement petite; cependant je crois que la réfraction même prouve suffisamment que la vitesse des rayons dans le verre à celle dans l'éther doit être dans le rapport de 2 à 3. Si les pores du verre sont remplis d'un éther pur par lequel se ferait la propagation, il semble que la matière du verre n'y contribuerait pour rien, ce qui est pourtant faux. De là je concluerais volontiers qu'il faut tenir compte des particules du verre même, mais d'une manière tout à fait différente de celle, dont nous concevons la propagation des ébranlemens par l'air où nous supposons les mêmes particules parfaitement liquides. Or il doit y avoir une différence essentielle entre les particules fluides et solides dont le milieu est composé; les impressions ne sont transmises que successivement par les particules fluides, tandis qu'une particule solide étant frappée par un bout, transmet quasi dans un instant le coup à l'autre bout, et je crois là la raison pourquoi les rayons de lumière traversent le verre avec une aussi prodigieuse vitesse, que si la densité était des millions de fois plus petite qu'elle n'est effectivement. Cette pensée me semble conduire à l'explication de cet étrange phénomène que la vitesse du son par l'air est plus grande que le calcul ne nous l'indique. Tous les efforts que vous avez faits pour déterminer la propagation des ébranlemens finis, prouvent incontestablement qu'aucune accélération n'en saurait résulter, comme je l'avais soupçonné: il faut donc que cette accélération actuelle que l'expérience nous découvre dans la propagation du son, provienne d'une autre cause. Ne pourrait-on donc dire, que l'air n'est pas un milieu parfaitement liquide dans les moindres particules, mais qu'il renferme des particules solides ou rigides, qui étant frappées d'un coté communiquent l'impulsion dans un instant à l'autre coté, et que la propagation successive sur la quelle est fondé le calcul, n'a pas lieu dans ces particules solides? Je crois que cette explication pourrait être vérifiée par quantité d'expériences ou le son est transmis par d'autres corps que l'air. Nous savons que le son pénêtre par tous les corps, pourvu qu'ils ne soient pas trop épais: on entend parler à travers des murailles, et on ne saurait dire que la communication se fasse par les particules d'air renfermées dans les pores de la muraille; la propagation du son se fait plutôt par la substance de la muraille. Il me semble que tous les corps sont par rapport au son la même chose que les corps transparens par rapport à la lumière; et comme tous les corps s'ils sont assez minces, sont transparens, et que réciproquement, les corps transparens, s'il, sont trop épais perdent leur transparence; il en est de même de tous les corps à l'égard du son; tous, s'ils ne sont pas trop épais, transmettent les sons, les uns pourtant plus aisément que les autres. Je souhaiterais qu'on fit plus d'expériences sur cette matière, et qu'on examinat surtout si le son en traver-

sant un autre corps ne souffre pas quelque réfraction. Je vois bien que la chose serait sujette à de grandes difficultés, puisque nous ne pouvons pas aussi aisément juger de la direction du son que de celle de la lumière.

La question que notre Académie vient de proposer pour l'année 1762 est relative à cette matière. On demande une explication mathématique de la manière dont la représentation du son se fait dans l'organe de l'ouie, explication semblable ou analogue à celle dont on fait usage pour la représentation des objets visibles au fond de l'oeil. Il faut bien que les rayons quasi sonores, qui partent d'un point sonore, soient réunis en un seul point dans la cavité de l'oreille et qu'ils y représentent une espèce d'imagé ou simulacre, sans quoi il serait impossible que nous distinguassions tant de sons différens. Or une telle réunion de rayons sonores, qui sont divergens en entrant dans l'oreille, ne saurait arriver, sans une espèce de réfraction. Voici donc à quoi se réduit notre question. C'est à montrer que les rayons sonores sont assujettis à quelque réfraction sous quelques circonstances. Quelques expériences pourraient nous fournir bien des lumières là-dessus; l'angle d'un bastion, par exemple, pourrait y servir. Si (Fig. 82) quelqu'un en A criait bien fort, un autre en B devrait juger suivant quelle direction il entendrait le son. Or ayant bien développé les circonstances sous lesquelles la direction du son souffre quelque changement, on ne manquera pas de trouver de pareilles circonstances dans la structure de l'oreille. Puissiez-vous vous résoudre, Monsieur, à travailler sur cette question; je doute fort que tout autre que vous soit capable de travailler là dessus.

Quoique la diminution des ébranlemens transmis à de grandes distances suive la raison des distances je crois pourtant que la force du son que nous appercevons soit proportionnelle réciproquement au carré des distances. Chaque particule d'air étant ébranlée, se meut par un certain espace qui détermine son excursion, et tant cet espace que sa plus grande vitesse même qu'elle y acquiert est réciproquement proportionnel à la distance. (Si je ne me trompe, car j'oublie aisément ces sortes de circonstances et je n'ai pas le temps de consulter mes calculs.) Or il me semble que la force avec laquelle une telle particule frappe sur l'organe dépend conjointement et de son excursion et de sa vitesse, ce qui produirait la raison inverse des carrés.

Vous aurez vu sans doute la photométrie de M. Lambert, ou il prouve incontestablement que la force des lumières décroit en raison inverse du carré des distances; mais il parle de la force et non pas de la vitesse ou de l'excursion de chaque particule, et partant je ne trouve aucune contradiction entre ses expériences et nos calculs.

Ce que vous me marquez, Monsieur, sur les ébranlemens de l'air dans un tuyau conoïdal, où vous supposez même l'air hétérogène, est extrêmement profond; et quoiqu'il ne puisse servir à nous éclairer sur la réfraction, vous pourrez connoitre par là pour les cas ou l'équation est résoluble, s'il n'y a pas aussi des ébranlemens répandus en arrière; cela prouverait que dans toutes les réfractions, ou lorsqu'un rayon passe d'un milieu dans un autre, il se fait toujours quelque réflexion.

Pour les formules que vous avez trouvées pour la figure d'un corps qui sur la même surface ait la plus grande solidité, ou p et q doivent être des fonctions de x et y telles, que cette formule $pdx + pdy$ devienne intégrable, j'ai remarqué que l'autre condition se réduit à ce que cette autre formule

$$\frac{pdy - qdx}{r(1 + p^2 + q^2)} - \frac{ydx}{a}$$

soit aussi intégrable; mais cela n'avance de rien. Au reste la solution générale doit être telle que fesant $r = 0$ l'équation entre x et y donne une figure quelconque même décrite au hasard et sans aucune continuité.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 24 juin 1760. L. Euler.

8.

Monsieur,

Je dois être infiniment flatté de la distinction toute particulière dont la nouvelle Académie royale des sciences vient de m'honorer, en accordant une place dans ses mémoires à mes faibles recherches sur la propagation du son que j'avais pris la liberté de vous envoyer. Je connois tout le prix de cette distinction et j'en suis plus vivement touché, ce que je vous supplie, Monsieur, de témoigner à l'illustre Académie, et de lui présenter mes très humbles remerciments en l'assurant de ma plus haute vénération et de mon attachement le plus inviolable. Mais je ne sens aussi que trop que c'est uniquement à vous que je suis redevable de cette glorieuse distinction; je vous en suis infiniment obligé de même que des deux exemplaires du premier recueil académique que vous aurez bien voulu m'envoyer. Vous ne douterez pas que je ne l'aie parcouru avec la plus grande avidité et je fus tout à fait surpris de l'excellence et de la richesse des mémoires que ce recueil renferme. Vous en particulier, Monsieur, vous y avez véritablement prodigué vos profondes découvertes; tout autre en aurait en abondamment de quoi fournir à plusieurs Académies et à plusieurs volumes, pendant que vous y avez ramassé en quelques moneaux des sciences entières et accomplies, dont la moindre particule aurait routé à d'autres les plus pénibles recherches. Vous ne craignez pas de vous épuiser pour les volumes suivans puisque vos ressources sont inépuisables; je suis tout stupéfait quand je pense seulement que les volumes suivans ne brilleront pas moins de nouvelles découvertes quoique je ne puisse pas encore comprendre sur quelles matières elles rouleront. Mais je vous avoue franchement que je ne suis quasi qu'ébloui de l'abondance et de la profondeur de vos recherches et bien d'autres souhaiteront avec moi que vous preniez la peine de traiter successivement plus en détail tous les sujets particuliers que vous n'avez fait jusqu'ici qu'envelopper dans la plus grande généralité.

Quelle satisfaction n'aurait pas M. de Maupertius s'il était encore en vie, de voir son principe de la moindre action, porté au plus haut degré de dignité, dont il est susceptible!

Dans vos autres recherches, il s'agit principalement d'une branche tout à fait nouvelle de l'analyse qui mériterait bien d'être développée avec tous les soins possibles. C'est la résolution de cette espèce d'équations

$$\frac{d^2r}{dt^2} = P\frac{d^2r}{dx^2} + Q\frac{dr}{dx} + Rr$$

dont l'intégrale complète renferme par sa propre nature des fonctions indéterminés, et même discontinues, contre les prétentions de M. d'Alembert, qui cependant sera bien embarrassé des réponses solides que vous lui avez faites quoique je doute fort qu'il s'y rende. Avant toute chose il faudrait bien chercher des méthodes plus propres à résoudre ces équations. Il paroit que des transformations convenables peuvent beaucoup y contribuer. En voici un exemple que j'applique au cas le plus simple.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a\frac{d^2r}{dx^2}.$$

Au lieu des variables t et x j'introduirai ces deux autres p et q telles que $p = \alpha x + \beta t$ et $q = \gamma x + \delta t$. Pour cet effet, considérant une fonction quelconque v de t et de x, puisque

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}dx$$

et par les nouvelles variables

$$dv = dp\frac{dv}{dp} + dq\frac{dv}{dq},$$

je substitue pour dp et dq leurs valeurs et j'aurai:

$$dv = \alpha dx \frac{dv}{dp} + \beta dt \frac{dv}{dp} + \gamma dx \frac{dv}{dq} + \delta dt \frac{dv}{dq} = dx \left[\alpha \frac{dv}{dp} + \gamma \frac{dv}{dq}\right] + dt \left[\beta \frac{dv}{dp} + \delta \frac{dv}{dq}\right]$$

d'où il s'ensuit pour les substitutions dont j'ai besoin,

$$\frac{dv}{dt} = \beta \frac{dv}{dp} + \delta \frac{dv}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = \alpha \frac{dv}{dp} + \gamma \frac{dv}{dq}, \quad \text{donc:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta \frac{dr}{dp} + \delta \frac{dr}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \beta^2 \frac{d^2r}{dp^2} + 2\beta\delta \frac{d^2r}{dpdq} + \delta^2 \frac{d^2r}{dq^2}$$

$$\frac{dr}{dx} = \alpha \frac{dr}{dp} + \gamma \frac{dr}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2r}{dp^2} + 2\alpha\gamma \frac{d^2r}{dpdq} + \gamma^2 \frac{d^2r}{dq^2}.$$

Maintenant je pose:

$$\beta^2 - \alpha^2 a = 0 \quad \text{et} \quad \delta^2 - \gamma^2 a = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \alpha\sqrt{a} \quad \text{et} \quad \delta = -\gamma\sqrt{a}$$

pour avoir cette équation:

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma a) \frac{d^2r}{dpdq} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2r}{dpdq} = 0.$$

A présent M. d'Alembert ne saurait disconvenir que l'intégration de cette formule en ne prenant que p variable ne donne:

$$\frac{dr}{dq} = \varphi' : q$$

et faisant ensuite varier q

$$r = \varphi : q + \psi : p = \varphi : (x - t\sqrt{a}) + \psi : (x + t\sqrt{a})$$

ou les fonctions sont absolument indéterminées et dépendent entièrement de notre volonté, de sorte que la construction générale puisse se faire par deux courbes décrites à plaisir; l'appliquée de l'une donnant $\varphi : (x - t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x - t\sqrt{a}$ et celle de l'autre $\psi : (x + t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x + t\sqrt{a}$.

Mais si l'on demandait une intégrale complète pareille pour le cas ou a serait une quantité négative $- b$ je ne vois pas comment on pourrait la représenter par des courbes arbitraires, puis pu'on ne saurait y assigner les appliquées qui répondent à des abcisses imaginaires.

La réduction aux arcs de cercle en posant:

$$x = v \cos\varphi \quad \text{et} \quad t\sqrt{b} = v \sin\varphi$$

qui donnerait:

$$r = A + Bv\cos\varphi + Cv^2 \cos 2\varphi + \ldots.$$
$$+ 4v \sin\varphi + 6v^2 \sin 2\varphi + \ldots.$$

quelque soit le nombre des termes qu'on prenne, ne saurait jamais produire une solution générale en sorte que posant $t = 0$ il en résulte entre r et x une relation donnée exprimée par quelque courbe décrite à volonté.

Pour le problème des isopérimètres pris dans sa plus grande étendue c'est à vous que nous sommes redevables de sa plus parfaite solution et je suis bien surpris de voir avec quelle adresse vous l'avez étendu à des surfaces et même à des polygones. Vous conviendrez que ces recherches profondes mériteraient un développement plus détaillé. Il est facheux que la solution du cas ou l'on demande entre tous les solides de la même capacité celui, dont la surface est la plus petite, conduise à une équation presqu'absolument intraitable: on voit bien que les surfaces sphériques et cylindriques y sont comprises sans être en état de les en conclure. Les corps ont des bizarreries qui ne se trouvent pas dans les surfaces: quoique tous les cotés d'un polygone et même leur ordre soient donnés, la figure est encore susceptible d'une infinité de déterminations; mais dans un polyèdre, dès qu'on connoît toutes les hèdres (faces), avec leur ordre, le corps est entièrement déterminé.

De plus on ne saurait assigner deux courbes différentes qui aient pour toutes les abcisses des arcs égaux; mais on peut toujours trouver une infinité de surfaces différentes ou les élémens $dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ soient les mêmes. Ainsi les surfaces coniques dont l'axe est perpendiculaire à la base, conviennent avec une surface

plane; et les corps exprimés par ces équations $ar = xy$ et $2ar = x^2 + y^2$ ont leurs surfaces égales puisque $p^2 + q^2$ est le même de part et d'autre, on trouve même aisément une infinité d'autres surfaces de même nature ou l'on peut introduire des fonctions arbitraires et discontinues. Il est plus difficile de trouver des corps dont la surface convienne à celle de la sphère. Il s'agit de trouver une équation intégrable $dr = pdx + qdy$ telle que l'on ait

$$p^2 + q^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Je peux bien définir toutes les fonctions possibles pour p et q mais je n'en peux tirer aucune dont l'équation entre x et r devienne algébrique. C'est encore un sujet qui demande la nouvelle branche de l'analyse qui roule sur les fonctions de deux ou plusieurs variables, étant donné de certains rapports entre leurs différentielles.

A l'égard du problème du mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes, en raison inverse du carré des distances, j'ai trouvé moyen de construire la courbe que le corps décrit lors même qu'elle n'est pas dans un même plan, et j'ai observé une infinité de cas ou la courbe devient algébrique, outre ceux de l'ellipse et de l'hyperbole dont les foyers tombent aux deux points fixes.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin le 9 novembre 1762. L. Euler.

9.

Monsieur,

La gracieuse déclaration que vous venez de me faire de la part de la société royale de Turin devait sans doute faire sur mon esprit la plus vive impression; aussi suis-je pénétré de la plus respectueuse reconnoissance: ce que je vous prie de lui temoigner, avec la plus forte assurance, que je saisirai avec le plus grand empressement toutes les occasions ou je serai capable de rendre quelque service à cette illustre société, à laquelle je prend la liberté de présenter les pièces ci-joints, dont deux aussi roulent sur le mouvement des cordes. M. d'Alembert m'a aussi fait quantité d'objections sur ce sujet. Mais je vous avoue qu'elles ne me paroissent pas assez fortes pour renverser notre solution. Le grand génie me paraît un peu trop enclin à détruire tout ce qui n'est pas construit par lui-même. Quand la figure initiale de la corde n'est pas telle qu'il prétend qu'elle devrait être, je ne saurais me persuader que son mouvement fût différent de celui que notre solution lui assigne; et si M. d'Alembert soutient que dans ce cas le mouvement ne saurait être compris sous la loi de continuité, je lui accorde très volontiers cette remarque, mais je soutiens à mon tour, que ma solution donne ce mouvement discontinu. Car les équations différentielles à trois ou plusieurs variables ont pour propriété essentielle, que leurs intégrales renferment des fonctions arbitraires qui peuvent aussi bien être discontinues que continues.

Après cette remarque je vous accorde aisément, Monsieur, que, pour que le mouvement de la corde soit conforme à la lois de continuité, il faut que dans la figure initiales les $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{d^4y}{dx^4}$ $\frac{d^6y}{dx^6}$ etc. soient $= 0$ aux deux extrémités: mais quoique ces conditions n'aient pas lieu, je crois pouvoir soutenir que notre solution donnera néanmoins le véritable mouvement de la corde, car dans ces cas il y aura bien quelqu'erreur dans la détermination du mouvement des éléments extrêmes de la corde, mais par cette même raison, l'erreur sera infiniment petite et partant nulle.

Je n'ai plus assez présentes à l'esprit toutes les circonstances de ce problème, pour oser prononcer plus hardiment là dessus: mais il me semble qu'on pourrait combattre les opinions les mieux constatées par des objections semblables à celles avec lesquelles M. d'Alembert combat notre solution. Je dirais par exemple que la formule $\int ydx$ ne saurait donner l'aire d'une courbe APM (Fig. 83) à moins qu'on n'ait $\frac{dy}{dx}=0$ au commencement A où $y=0$. Car puisque dans chaque élément de l'aire qui est veritablement $=ydx+\frac{1}{2}dxdy$, on néglige le petit trinangle $\frac{1}{2}dxdy$, cela ne saurait plus être pratiqué au commencement A où $y=0$, et partant le premier membre $ydx=0$, attendu à là le second membre $\frac{1}{2}dxdy$ pourait être infiniment plus grand que le premier à moins qu'on n'eût $\frac{dy}{dx}=0$. Puisque donc, malgré cette objection, la formule $\int ydx$ exprime toujours la véritable aire de la courbe, je crois aussi que notre solution sur les cordes donne toujours le véritable mouvement, quoique le premier et le dernier élément soient assujettis à un grand inconvénient ou même à une contradiction apparente. M. d'Alembert témoigne partout un trop grand empressement à rendre douteux tout ce qui a été soutenu par d'autres, et il ne permettra jamais qu'on fasse des objections semblables contre ses propres recherches.

J'avais déjà reçu le projet de la nouvelle édition des ouvrages de Leibnitz, et je pense que M. Formey aura déjà remarqué à l'éditeur qu'on vient de decouvrir à Hanovre quantité d'ouvrages manuscrits de ce grand homme, dont on a nouvellement publié les remarques sur Locke. Je ne saurais dire autre chose, sur la fameuse controverse touchant le calcul différentiel que ce que j'en ai dit dans la préface de mon calcul différentiel.

Le XIVe volume de nos mémoires est sous presse, de même que mon ouvrage sur la mécanique qni s'imprime à Rostock. J'ai achevé, il y a longtemps, mon ouvrage sur le calcul iniégral, mais il n'y a pas d'espérance qu'il soit publié de sitôt, faute de libraires. L'Académie de Russie vient de publier le IXe volume de ses nouveaux commentaires.

J'avais aussi depuis longtemps achevé un traité sur la Dioptrique dont le résultat se trouve dans le XIIIe volume de nos mémoires: mais comme on vient de découvrir de nouvelles espèces de verre, qui causent une réfraction beaucoup plus grande que le verre ordinaire, je suis actuellement occupé à refondre mon ouvrage et à l'appliquer à toutes les diverses espèces de verre, parce que par ce moyen, on peut procurer aux instruments dioptriques un beaucoup plus haut degré de perfection. Je suis extrèmement ravi que le rétablissement de la paix me procure l'avantage de recommencer votre correspondance, qui m'a toujours fourni les éclaircissements les plus importants, et je me flatte d'en retirer à l'avenir un profit plus grand encore.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur

votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin le 16 février 1765. L. Euler.

10.

Monsieur et très cher Confrère,

Je dois commencer par vous demander mille pardons de ce que j'ai differé si longtemps de répondre à la lettre obligeante dont vous avez-bien voulu m'honorer. Je suis infiniment charmé de ce que notre illustre société a si bien reçu les mémoires que j'avais pris la liberté de vous envoyer, et je suis bien impatient de voir bientôt le troisième volume de vos ouvrages, pour y voir vos profondes recherches sur cette nouvelle partie

de l'analyse, dont les premiers principes même ont été inconnus avant que vous en ayez entrepris le développement avec le plus heureux succès: je me flatte que la présente foire de Leipzig me procurera ce présent précieux. Pour justifier mon long silence je dois vous informer, Monsieur, que depuis longtemps je me trouve dans le plus grand embarras, qui m'a presqu'entièrement empêché de m'appliquer à aucune recherche, et j'avais honte de vous écrire une lettre tout à fait vide de recherches Geométriques: et à l'heure qu'il est, je n'en suis pas en état, de grandes raison m'ayant determiné à solliciter ici mon congé pour retourner à Pétersbourg ou m'appelle la vocation la plus avantageuse de l'Impératrice. Vous savez sans doute que l'Académie de Russie est depuis quelques temps fort tombée en decadance; mais maintenant sa Majesté Impériale a résolu de retablir cette Académie dans son ancien lustre et de lui donner même plus d'éclat. Elle y a destiné un fonds de 60,000 Roubles par an. Dans cette vue sa Majesté veut bien m'honorer de sa haute confiance, en m'appelant à diriger et exécuter ce grand dessein, où il s'agit principalement d'engager de grands hommes dans toutes les sciences de venir s'établir à Pétersbourg et d'y travailler conjointement à l'avancement des sciences. Vous comprendrez aisement, Monsieur, que vous avez été le premier que j'ai proposé à sa Majesté Impériale et je m'estimerais infiniment heureux, si je pouvais vous persuader d'accepter cette vocation qui sera toujours pour vous aussi avantageuse qu'honorable. Je sais bien que le grand éloignement et le climat rude vous causera d'abord de l'aversion; mais comme je connais parfaitement cet endroit, y ayant séjourné pendant quatorze ans, et que j'y retourne avec le plus grand empressement, je puis vous assurer que la ville de Pétersbourg renferme à la fois tous les agrements qu'on ne trouve que séparement dans les autres lieux et qu'on y a des moyens de se garantir du froid, de sorte qu'on y est beaucoup moins incommodé que dans les pays plus chauds.

Je vous prie donc, Monsieur, de faire des réflexions sur cette proposition et de m'en marquer votre sentiment au plutôt, avant que je parte d'ici, ce qui pourrait bien encore trainer quelques mois.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération et le plus inviolable attachement,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin le 3 mai 1766. L. Euler.

11*).

A St.-Pétersbourg, ce 9 janvier 1767 st. v.

Monsieur et très cher ami,

J'espère que vous m'excuserez de ce que j'ai manqué de répondre à la lettre dont vous m'aviez honoré, encore de Turin. La grande distraction que mon voyage et mon nouvel établissement m'ont causée en est une raison plus que suffisante. Quelque glorieux qu'il soit pour moi de vous avoir pour successeur à l'Académie de Berlin, j'aurais souhaité que vous eussiez été en état d'écouter les propositions que l'Académie Impériale se proposait de vous faire, et je crois que vous y auriez trouvé beaucoup plus d'avantages et d'agrément. Cependant, je souhaite de tout mon coeur que votre séjour à Berlin soit comblé de toutes sortes de prosperité et qu'il vous mette en état de continuer vos profondes recherches pour l'avancement des sciences. J'attends avec la dernière impatience le troisième volume des Mémoires de l'Académie de Turin et je crains beaucoup qu'il

*) Hae litterae, ut et sequentes e Petropoli datae, scriptae sunt ab iisdem Euleri discipulis, qui ex Adversariis lectori jam cogniti sunt: filio scilicet Joanne Alberto, J. A. Lexellio, W. L. Krafftio et Nicolao Fuss.

ne soit le dernier, tout à cause de votre absence, que j'ai su que M. Cigna est aussi disposé à quitter; je n'ai pas manqué d'en parler à notre Académie, où tout dépend des arrangements qu'on doit encore faire pour la mettre sur un bon pied; et jusque là on n'a pu encore penser qu'à remplir les places, qui étaient actuellement vacantes, dont aucune n'aurait pu convenir à M. Cigna; mais aussitôt qu'on pourra lui donner une plus grande extension, on ne manquera pas de faire attention aux mérites de cet habile homme.

Je suis extrêmement ravi que mon dernier ouvrage sur la Mécanique ait mérité votre approbation, mais je suis fâché de n'avoir pas été en état de vous en présenter un exemplaire; car à peine ai-je trouvé un libraire qui ait voulu se charger de l'imprimer; je fus même obligé de renoncer à un certain nombre d'exemplaire pour les présenter à mes amis; mais le libraire n'avait pas tort, puisqu'il n'en a fait imprimer que cinq cents exemplaires et que suivant toute apparence, il n'en debitera pas cent.

Dès mon arrivée ici, l'Académie Impériale a bien voulu se charger de l'impression de mon ouvrage sur le calcul intégral, qui est déjà avancé assez bien; mais comme il y aura trois volumes *in quarto* il faudra attendre encore plus d'un an, avant que tout soit achevé.

Le troisième volume renferme la nouvelle partie du calcul intégral dont le public sera toujours redevable à votre sagacité, et j'espère que par vos soins, cette partie que je n'ai fait qu'ébaucher, sera bientôt porté à un plus haut point de perfection.

Tant la faiblesse de ma vue que mon emploi actuel, qui m'oblige de passer tous les matins à la Direction de l'Académie, me mettent absolument hors d'état de continuer mes recherches sur cette matière; mais à l'aide de mon fils Albert, je serai toujours en état de profiter des éclaircissements, que vous voudrez bien me communiquer tant sur ce sujet que sur tous les autres auxquels vous vous appliquerez; je vous en supplie même, avec le plus grand empressement, dans la confiance que vous êtes déjà suffisamment convaincu, que personne ne saurait faire plus de cas que moi, de l'importance de vos découvertes. Je vous prie donc, Monsieur, de me conserver toujours votre amitié et votre affection et d'être assuré, que je serai toujours, avec la plus parfaite considération et le plus inviolable attachement,

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

12.

St.-Pétersbourg ce 5 (16) février 1768.

Monsieur,

Votre lettre du 29 décembre de l'année passée m'a été remise à peu près en même temps que j'ai reçu le dernier volume des mémoires de l'Académie de Berlin, dans lequel je me suis d'abord fait lire votre excellent mémoire sur le tautochronisme, parce que cette matière m'a autrefois tenu fort au coeur et que j'ai aussi fait une analyse de la méthode de M. Fontaine, que vous trouverez dans le Tome X de nos Commentaires. Mais votre méthode est beaucoup plus ingénieuse et la lecture m'en a causé un vrai plaisir, quoique l'espérance d'y trouver des tautochrones pour toutes les hypothèses possibles de résistance n'ait pas été entièrement remplie. J'en ai d'abord découvert la source dans la formule $\frac{X}{A}$, à une fonction quelconque de laquelle vous égalez le temps pour un arc indéfini, ou bien à une fonction de dimension nulle des quantités X et A. Mais

vous conviendrez aisément, que la supposition d'une telle fonction apporte une très grande limitation à la solution, attendu, qu'on pourrait imaginer une infinité d'autres expressions également propres à représenter le temps, comme $\frac{X'}{A'}$, $\frac{X''}{A''}$, et qu'on pourrait supposer le temps égal à une fonction quelconque de toutes ces formules ensemble, mais l'exécution ménerait à des calculs presque insurmontables. J'ai aussi remarqué déjà dans le IIe volume de ma Mécanique, que les cas, où la resistance serait comme le cube, ou quelque puissance plus haute de la vitesse, ne sauraient être résolus par de telles fonctions de dimension nulle, mais qu'il faut recourir à des fonctions de plusieurs dimensions et je crois y avoir indiqué la véritable route pour arriver à la solution de ces cas, route qui cependant est trop embarrassée, pour que j'ai pu en faire l'application à d'autres cas que celui ou la vitesse est par elle même extremement petite.

J'ai vu aussi que les trois Méthodes de M. d'Alembert, dans le même volume de Mémoires, sont assujetties à la même restriction. Au reste je crois devoir avertir que feu M. Bernoulli n'a trouvé la tantochrone pour la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, qu'après que je lui en eus communiqué ma solution: et il n'a jamais dit, qu'il en avait fait le premier la découverte.

Je suis extrêmement ravi, Monsieur, que nos recherches sur le mouvement d'un corps attiré par deux autres, de forces fixes, aient mérité votre attention; mais vous n'en avez vu que ce qui a été inséré dans les mémoires de Berlin et qui regarde principalement les courbes algebriques, que ma solution renferme. J'ai encore composé, sur ce sujet, deux autres mémoires, dont l'un se trouve dans le Xe vol. de nos Commentaires et l'autre dans le XIe. Dans le dernier j'ai aussi réussi à determiner le mouvement du dit corps, lorsqu'il ne se meut pas dans le même plan et je suis extrêmement curieux d'apprendre à quel égard vous avez donné une plus grande étendue à ce problème. Si vous avez reussi à donner à l'un des deux centres de force un mouvement autour de l'autre, ne fût il que circulaire et uniforme, je le regarderai comme la decouverte la plus importante dans l'astronomie.

L'impression de mon Calcul intégral avance assez passablement, le premier tome est déja achevé et je tacherai de vous l'envoyer au plutôt, peut être accompagné du second: il y aura trois volumes en tout.

Je n'ai reçu qu'un exemplaire du IIIe volume, des Mémoires de Turin, et je en ai déja presenté si je ne me trompe, mes très humbles remerciements; comme je suis hors d'état de lire et d'ecrire moi-même, je suis d'autant plus curieux de profiter des écrits des autres, et principalement de vos recherches qui sont toujours marquées d'un très grand degré de profondeur. Je vous prie donc de me conserver toujours votre amitié et votre bienveillance et d'être assuré que je ne cesserai jamais d'être avec une très respectueuse considération,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

Mes compliments empressés à mon très digne ami M. le professeur Beguelin.

Monsieur Bernoulli aura bien la bonté de faire parvenir l'incluse à son adresse et nous vous prions, Monsieur, de lui présenter nos civilités.

13.

Monsieur et très-cher Confrère,

Je suis extrêmement ravi, que vous avez reçu avec tant de bonté mon ouvrage sur le calcul intégral; j'ai taché d'y ramasser tout ce que j'ai observé de remarquable sur ce sujet. J'espère vous envoyer au plutôt la IIIe partie de cet ouvrage; elles vous appartient presqu'uniquement et je ne doute pas que vous ne la portiez bientôt à un plus haut degré de perfection.

M. Formey m'a envoyé les feuilles du dernier volume des Mémoires de Berlin, qui contiennent les excellentes pièces dont vous me parlez dans votre lettre. Comme je ne suis pas en état de lire moi-même, j'ai prié notre habile M. Lexell de m'en faire la lecture, que j'ai entendu avec la plus grande avidité. J'ai admiré non seulement la profondeur de vos recherches, mais aussi et surtout leur multiplicité, qui aurait fourni à tout autre dequoi remplir une douzaime d'excellens Mémoires différents. Vous savez, Monsieur, que j'ai beaucoup travaillé sur cette espèce d'Analyse, et que j'en connais parfaitement toutes les difficultés, et partant j'ai vû avec la plus grande satisfaction que vous en avez surmonté quelques unes, très heureusement. La méthode que vous employez pour résoudre l'équation $A = pp \pm Bqq$ est d'autant plus ingenieuse qu'elles ne suppose rien qui ne soit fondé que sur l'induction. J'ai été curieux d'appliquer d'abord vos méthodes à des exemples qui ont pour la plupart très bien réussi; mais l'exemple suivant m'a causé quelque embarras; il s'agit de résoudre en nombres entiers cette équation

$$101 = pp - 13qq.$$

Selon votre méthode il faut donc chercher un nombre α plus petit que $\frac{101}{2}$, tel que $\alpha\alpha - 13$ soit divisible par 101, j'ai trouvé $\alpha = 35$ et de là $A' = 12 = p'^2 - 13.q'^2$, pendant que $A = 101$ et $B = 13$; d'où l'on tire $p' = 5$ et $q' = 1$: donc selon votre méthode on trouverait:

$$p = \frac{\alpha p' \mp Bq'}{A'} = \frac{35.5 \mp 13}{12.} \text{ et } q = \frac{\alpha q' \mp p'}{A'} = \frac{35 \mp 5}{12};$$

et partant ces nombres n'étant pas entiers on devrait conclure que ce cas n'est pas possible; cependant on satisfait à cette question en prenant $p = 123$ et $q = 34$, ce qui me faisait croire que votre méthode était insuffisante.

Mais en écrivant ceci, je vois que je n'ai pas assez bien observé les préceptes que vous donnez: car puisque $A' = 12$ est divisible par le carré 4, il faut poser $\frac{12}{4} = 3 = tt - 13uu$ ce qui donne $t = 4$ et $u = 1$, d'où l'on tire $p' = 8$ et $q' = 2$, et alors on aura

$$p = \frac{35.8 \mp 13.2}{12.} = \frac{140 \mp 13}{6.} \text{ et } q = \frac{35.2 \mp 8}{12.} = \frac{35 \mp 4}{6};$$

or ces formules ne sauraient non plus donner des nombres entiers. Cependant je vois bien qu'on parviendrait à ma solution si on prenait $p' = 47$ et $q' = 13$ parceque $12 = 47^2 - 13.13^2 = 2209 - 2197$, car on tirerait de là

$$p = \frac{35.47 \mp 13.13.}{12.} \text{ et } q = \frac{35.13 \mp 47}{12.},$$

ou les signes superieures donnent $p = 123$ et $q = 34$. Mais quelle raison nous conduit à supposer

$$p' = 47 \text{ et } q' = 13?$$

J'ai aussi fort admiré votre méthode d'employer les nombres irrationnels et même les imaginaires dans cette espèce d'Analyse attachée uniquement aux nombres rationnels. Il y a déjà quelques années que j'ai eu des idées semblables, mais je n'ai encore rien donné là-dessus ni dans nos Commentaires, ni dans les Mémoires de Berlin; cependant j'ai publié ici une algébre complète en langue russe, j'y ai developpé cette matière fort au long et j'ai fait voir que pour résoudre l'équation

$$xx + nyy = (pp + nqq)^{\lambda},$$

on n'a qu'à résoudre celle-ci

$$x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^{\lambda}.$$

Cet ouvrage s'imprime actuellement aussi en allemand, en deux volumes in 8°, et quand je vous expédierai le IIIe volume du calcul intégral j'y ajouterai un exemplaire de cette algèbre, soit en Russe, soit en Allemand.

Mais je n'y ai pas poussé mes recherches au delà des racines quarrées et l'application aux racines cubiques et ulterieures vous a été réservée uniquement. C'est de là que j'ai tiré cette formule très remarquable

$$x^3 + ny^3 + nnz^3 - 3nxyz$$

dont les trois facteurs sont

$$x + y\sqrt[3]{n} + z\sqrt[3]{n^2};$$

d'où l'on voit qu'ón peut toujours aisément déterminer les lettres $x.\ y.\ z.$ pour que cette formule devienne un quarré, ou un cube, ou un quarré-quarré, au quelque puissance plus haute. Au reste pour juger si l'équation $A = pp \pm Bqq$ est possible ou non, j'ai trouvé cette règle pour les cas ou A est un nombre premier.

»Otez du nombre A un multiple quelconque de $4B$ et toutes les fois que le reste est un nombre premier »a, l'équation proposée sera possible si celle-ci $a = pp \pm Bqq$ l'est; de plus, si le reste $A - 4nB$ devient un »nombre abb tel, que a soit un nombre premier; ou même l'unité, alors la possibilité ou l'impossibilité de »l'équation $a = pp - Bqq$ déclare la nature de l'équation proposée.»

Ainsi ayant l'équation $109 = pp - 7.qq$, puisque $109 - 4.7 = 81$ où $a = 1$ $b = 9$, je forme cette équation $1 = pp - 7.qq$, qui étant possible, prouve la possibilité de la proposée; et dans l'exemple rapporté ci-dessus, $101 = pp - 13qq$, puisque $101 - 4.13 = 49$ et partant $a = 1$, le jugement se réduit à cette équation $1 = pp - 13qq$, qui est possible sans doute; mais je dois avouer, à ma confusion, que je ne saurais démontrer cette règle; et quand même on en trouverait une démonstration, cela ne servirait en rien à la solution actuelle de l'équation $A = pp - Bqq$.

J'attend avec la plus grande impatience le IVe volume des Mémoires de Turin, que vous aurez la bonté, Monsieur, de m'envoyer, ne pouvant douter qu'il ne soit rempli de vos très excellentes recherches; je vous en présente d'avance mes remerciments les plus empressés ayant l'honneur d'être avec la plus parfaite consideration,

Monsieur,

Votre très humble serviteur

L. Euler.

à St. Pétersbourg, ce 16 (27) janvier 1770.

Voici, Monsieur, et très honoré Confrère, un théorême de la plus grande importance et un problême très difficile à résoudre.

Theorema. Si formula $mxx + nyy$, casu $x = a$ et $y = b$, prebeat numerum primum α, tum omnes numeri primi in formula $\alpha \pm 4mnp$, quin etiam in hac formula generaliori $\alpha qq \pm 4mnp$ contenti, simul erunt numeri formae $mxx + nyy$.

NB. Demonstratio adhuc desideratur.

Problema. Envenire duos numeros quorum productum, tam summa quam differentia sive auctum sive minutum, fiat quadratum. $xy + x + y = \square$; $xy - x - y = \square$; $xy + x - y = \square$; $xy - x + y = \square$.

Solutio. Quaerantur duo numerorum paria p, q et r, s, ut formulae

$$2pq(pp - qq)(pp + qq) \text{ et } 2rs(rr - ss)(rr + ss)$$

teneant rationem quadrati ad quadratum. Tum enim numerorum quaesitorum

$$\text{alter erit} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2pq(rr - ss)},$$

$$\text{alter vero} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2rs(pp - qq)}.$$

Conditio praescripta impletur sumendo $p = 12$, $q = 1$; et $r = 16$, $s = 11$; tum erit enim

$$\frac{2pq(pp - qq)(pp + qq)}{2rs(rr - ss)(rr + ss)} = \frac{1}{36} = \square.$$

Hinc ergo numeri quaesiti erunt $\frac{13 \cdot 29^2}{2^3 \cdot 3^2}$ et $\frac{5 \cdot 29^2}{2^4 \cdot 11^2}$.

Il y a quelques temps, Monsieur, que j'ai trouvé une solution complète du problème suivant:

Il s'agit de trouver trois fonctions x, y, z, des deux variables t et u, telles que posant

$$dx = Pdt + pdu;\ dy = Qdt + qdu:\ dz = Rdt + rdu;$$

on satisfasse aux conditions suivantes

$$\text{I.}\quad P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$

$$\text{II.}\quad p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

$$\text{III.}\quad Pp + Qq + Rr = 0;$$

Or la nature des différentielles demande encore les conditions suivantes

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right),$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dq}{dt}\right),$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dR}{du}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right),$$

Comme une considération tout à fait singulière m'a conduit à la solution de ce problème, que j'aurais d'ailleurs cru impossible; je crois que cette découverte pourra devenir d'une grande importance dans la nouvelle partie du Calcul Intégral dont la géometrie vous est redevable.

L. Euler.

14.

Monsieur et très honoré confrère,

Votre prompte reponse sur les remarques que j'avais eu l'honneur de vous communiquer m'a causé bien du plaisir et je vous en suis infiniment obligé. Je me suis fait lire toutes les opérations que vous avez faites sur la formule $101 = pp - 13qq$, et je suis entierement convaincu de leur solidité; mais étant hors d'état de lire et d'écrire moi même, je dois vous avouer que mon imagination n'a pas été capable de saisir le fondement de toutes les réductions que vous avez été obligé de faire et moins encore de fixer dans mon esprit la signification de toutes les lettres que vous y avez introduites. Il est bien vrai, que des recherches semblables ont fait autrefois mes delices et m'ont couté bien du temps; mais maintenant je ne saurais plus en entreprendre que de celles que je suis capable de développer dans ma tête, et souvant je suis obligé de recourir à un ami, pour exécuter les calculs que mon imagination projette.

Pour ce qui regarde le problème de deux nombres dont, le produit augmenté ou diminué de leur somme ou de leur différence produise des quarrés, il m'a été autrefois proposé à Berlin par un Capitaine M. de Happe, qui me dit l'avoir reçu d'un ami de Leipzig, qui s'était longtemps occupé inutilement à en trouver une solution et que lui même y avait épuisé ses forces sans aucun fruit. Il m'a donc demandé, si je croyois ce problème possible ou non. Je lui repondis d'abord que ce problème me paraissait d'une nature singulière et qu'il surpassait même les règles connues de l'Analyse de Diophante; en quoi je ne crois pas m'être trompé. Cependant après quelques essais, j'ai trouvé la solution que j'ai eu l'honneur de vous communiquer; je croyais presque que c'était l'unique qu'on fut en état d'en donner. Mais depuis que j'ai eu l'honneur de vous écrire, ayant encore fixé mes recherches sur ce problème, j'ai découvert une route qui fournit une infinité de solutions. Voici de quelle manière je m'y suis pris.

Posant les deux nombres cherchés A et B, les premiers efforts fournissent d'abord ces formules

$$A = \frac{(pp + ss)(qq + rr)}{4pqrs}, \quad B = \frac{(pp + ss)(qq + rr)}{(pp - ss)(qq - rr)};$$

mais il est nécessaire que cette formule

$$\frac{(pp + ss)(qq + rr)}{2pqrs(pp - ss)(qq - rr)}$$

devienne un quarré, ce qui est sans doute extrêmement difficile et au dessus de la méthode ordinaire de Diophante. Cependant en employant les substitutions suivantes

$$p = mn + (m - n)^2; \quad q = mm + mn - nn = s \text{ et } r = m(m - 2n)$$

cette formule après en avoir oté les facteurs quarrés se réduit à celle-ci

$$\frac{5mm - 6mn + 2nn}{2n(2m + n)}$$

qu'il est aisé de rendre quarrée; car faisant $n = 2m - l$, elle devient

$$\frac{mm - 2ml + 2ll}{(4m - 2l)(4m - l)}$$

dont le numérateur multiplié par le denominateur donne ce produit

$$16m^4 - 44m^3l + 58mmll - 28ml^3 + 4l^4$$

qui doit être un quarré, et dont la résolution est fort aisée.

Quoique cette solution paraisse très particulière, vû qu'au lieu de quatre lettres p, q, r, s, cette formule n'en contient que deux; j'ai pourtant lieu de croire qu'elle renferme toutes les solutions possibles.

Je serais fort curieux, Monsieur, d'apprendre votre sentiment sur les deux théorèmes suivants que je crois vrais sans pouvoir les démontrer.

I. Outre le cercle il n'y a point de courbe algébrique dont chaque arc soit égal à un arc de cercle.

II. Il n'y a pas non plus de courbe algébrique dont chaque arc soit égal à un logarithme.

Vous voyez bien qu'il ne s'agit pas ici des courbes algébriques dont la rectification dépende ou des arcs de cercle ou des logarithmes.

Je reviens au problème, dont je vous ai parlé dans ma lettre précédente, ou il s'agit de déterminer les trois quantités x. y. et z par les deux variables t et u ensorte qu'en posant

$$dx = l\,dt + \lambda\,du; \quad dy = m\,dt + \mu\,du; \quad dz = n\,dt + \nu\,du;$$

les trois conditions suivantes soient remplies, savoir

$$1^\circ.\quad ll + mm + nn = 1$$

$$2^\circ.\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$$

$$3^\circ.\quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

J'en avais bien trouvé une solution complète, mais par une méthode extrêmement indirecte, et je croyois presque qu'il n'y avait pas de méthode directe qui pût conduire à sa solution. Mais, afin que vous ne pensiez pas que c'est là une spéculation entièrement stérile, j'ai l'honneur de vous dire que le problème suivant m'y a conduit: Trouver tous les solides dont la surface puisse être développée sur un plan, comme cela à lieu pour tous les corps cylindriques et coniques. Depuis quelques jours je suis tombé sur la solution suivante, qui me parait assez directe;

J'introduis une nouvelle variable ω et j'en cherche trois fonctions p, q et r, telles que

$$1^\circ.\quad pp + qq + rr = 1, \text{ et}$$

$$2^\circ.\quad dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2,$$

ce qui n'a aucune difficulté; ensuite je fais

$$l = p\sin\omega + \frac{dp}{d\omega}\cos\omega;$$

$$m = q\sin\omega + \frac{dq}{d\omega}\cos\omega;$$

$$n = r\sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega;$$

$$\lambda = p\cos\omega + \frac{dp}{d\omega}\sin\omega;$$

$$\mu = q\cos\omega + \frac{dq}{d\omega}\sin\omega;$$

$$\nu = r\cos\omega + \frac{dr}{d\omega}\sin\omega;$$

Il est clair que les trois conditions prescrites sont remplies; il ne reste donc que de rendre intégrables les trois formules différentielles. Pour cet effet, je remarque que

$$dl = d\omega \cos\omega\left(p + \frac{ddp}{d\omega^2}\right)$$
$$dm = d\omega \cos\omega\left(q + \frac{ddq}{d\omega^2}\right)$$
$$dn = d\omega \cos\omega\left(r + \frac{ddr}{d\omega^2}\right)$$
$$d\lambda = -\,d\omega \sin\omega\left(p + \frac{ddp}{d\omega^2}\right)$$
$$d\mu = -\,d\omega \sin\omega\left(q + \frac{ddq}{d\omega^2}\right)$$
$$d\nu = -\,d\omega \sin\omega\left(r + \frac{ddr}{d\omega^2}\right)$$

de sorte que $\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\mu}{dm} = \frac{d\nu}{dn} = -\operatorname{tang}\omega$. Maintenant transformons les formules proposées ensorte que

$$x = lt + \lambda u - \int(tdl + ud\lambda) = lt + \lambda u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\,dl;$$
$$y = mt + \mu u - \int(tdm + ud\mu) = mt + \mu u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\,dm;$$
$$z = nt + \nu u - \int(tdn + ud\nu) = nt + \nu u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\,dn$$

puisque l, m et n sont des fonctions de la seule variable φ, toutes ces trois formules deviendront intégrables, si l'on égale la formule $t - u \operatorname{tang}\omega$ à une fonction quelconque de ω, que nous désignerons par Ω. De là on tire $t = \Omega + u \operatorname{tang}\omega$; de sorte que le calcul roule maintenant sur les deux variables u et ω, dont les coordonnées x, y, z deviennent des fonctions.

Permettez moi, Monsieur, que je vous parle d'un problème qui me paraît fort curieux et digne de toute attention. Dans un carré divisé en seize cases, il s'agit d'inscrire dans ces cases, seize nombres tels,

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

que premièrement les sommes des quarrés de chacune des bandes horizontales, ensuite aussi la somme des quarrés pris par les bandes verticales, soient égales entre elles et outre cela aussi la somme des quarrés par les diagonales; ce qui donne déjà dix conditions à remplir; mais il faut de plus remplir les conditions suivantes.

$$11^\circ.\ AE + BF + CG + DH = 0,\quad 12^\circ.\ AI + BK + CL + DM = 0;\ \text{etc.}$$

et ainsi, joignant deux à deux les bandes horizontales; ce qui donne six conditions; enfin il faut aussi remplir celles-ci

$$17^\circ.\ AB + EF + IK + NO = 0;\quad 18^\circ.\ AC + EG + IL + NP = 0\ \text{etc.}$$

en combinant deux à deux les bandes verticales, ce qui donne aussi six conditions; de sorte qu'il faut remplir en tout 22 conditions différentes, tandis qu'on n'a que seize quantités inconnues. Cependant ce problème ne laisse pas d'être infiniment indéterminé et j'ai réussi d'en trouver la solution en général, dont j'ajoute ici un exemple particulier.

+ 68	− 29	+ 41	− 37
− 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	− 23	+ 61
− 11	− 77	+ 8	+ 49

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

à St. Pétersbourg, ce 9 (20) mars 1770. L. Euler.

(Répondu Lagr.)

P. S.

Lorsque Monsieur le Directeur voudra bien répondre à cette lettre, on le prie de donner sa réponse ou au professeur Formey, ou de l'envoyer sous l'adresse du secrétaire de l'Académie Impériale des Sciences.

15.

Monsieur et très honoré Confrère,

Comme je suis hors d'état d'écrire moi même, et que les occasions de se servir d'une autre main se présentent rarement, vous me pardonnerez, si j'ai différé si long tems à répondre à l'obligeante lettre dont vous m'avez honoré. D'ailleurs depuis environ un an. la théorie de la lune m'a tellement occupé que je n'ai presque pu penser à autre chose. Trois habiles calculateurs ont bien voulu m'assister pendant tout ce tems; quoique nous ayons rencontré mille obstacles, nous les avons surmonté, presque tous, assez heureusement, de sorte que nos travaux sur cette matière se trouvent actuellement déjà sous presse. Jamais recherche n'a demandé autant de calculs pénibles et autant d'adresse dans l'exécution; il s'en faut cependant de beaucoup que cette matière soit entièrement épuisée; nous devons nous contenter, si les tables que nous en avons tirées s'accordent mieux encore avec le ciel que celles de MM. Mayer et Clairaut et si leur usage est beaucoup plus facile.

Malgré ces pénibles recherches, je n'ai pas manqué de profiter de quelques momens pour étudier vos excellens mémoires, qui m'ont été communiqués par M. Formey; et d'abord, ce qui m'a frappé le plus et que je puis pas assez admirer, c'est la beauté et l'étendue infinie de votre théorème général, savoir: lorsque

$$x = t + \varphi(t) + \frac{1}{2}d.\varphi t^2 + \frac{1}{6}dd.\varphi t^3 + \frac{1}{24}d^3\varphi t^4 + \text{etc.}\dots$$

Si l'on désigne par $\psi(x)$ une fonction quelconque de x et par ψt une fonction semblable de t on aura toujours

$$\psi x = \psi t + \varphi t\ \psi' t + \frac{1}{2}d\ \varphi t^2.\psi' t + \frac{1}{6}dd\ \varphi t^3.\psi' t + \frac{1}{24}d^3.\varphi t^4.\psi' t + \text{etc.}$$

en omettant les divisions par les puissances de dt.

Cè Théorème me parait déjà de la dernière importance, sans même avoir égard à l'équation $t = x - \varphi x$, dont il fournit la solution et dont vous vous servez avec le plus grand succès, pour résoudre toutes sortes

d'équations. J'avais déjà composé, avant mon départ de Berlin, un mémoire sur le même sujet, à l'occasion d'une excellente pièce de M. Lambert insérée dans les actes helvétiques. Cette idée me parut d'abord susceptible d'une beaucoup plus grande étendue, que j'ai taché de développer dans ce mémoire, qui actuellement se trouve imprimé dans le XVe volume des nos mémoires ou commentaires. Mais vous avez, Monsieur, poussé cette recherche beaucoup plus loin, à l'aide de votre admirable théorème. Après y avoir réfléchi tant soit peu, j'ai reconnu que sa vérité est indépendante de la résolution des équations et des rapports qui règnent entre les racines. J'avais formé le dessein d'en chercher une démonstration directe, tirée des premiers principes généraux de l'analyse, mais j'y ai d'abord rencontré de trop grands obstacles.

Notre habile académicien, M. Lexell y a bientôt réussi parfaitement et il en a trouvé une démonstration qui répondait entièrement à mes souhaits. C'est dommage que ce beau théorème soit tellement caché entre vos nombreuses recherches, Monsieur, que peu de monde l'y observera et en remarquera toute l'importance. Pour moi, je le crois de beaucoup préférable à mon théorème général sur l'intégrabilité, que j'avais tiré de la théorie des isopérimètres et que vous avez jugé digne, Monsieur, d'insérer dans les mémoires de Berlin, avec une note touchant M. de Condorcet à cette occasion, j'ai aussi l'honneur de vous marquer que M. Lexell a pareillement donné une très belle démonstration de ce même théorème, que vous lirez dans le XVe volume de nos Commentaires.

Vous avez bien voulu dire à M. Formey, que les extraits des lettres de M. D'Alembert, insérés dans les mémoires de Berlin, ne sont rien moins que ce que porte le titre, mais que ce grand homme vous les avait adressé, Monsieur, exprès pour les publier dans cette forme, quoiqu'à mon avis, elles ne renferment que des observations assez légères. Comme les dernières lettres que j'ai eu l'honneur de vous adresser, Monsieur, contiennent quelques articles qui ont mérité votre approbation, il me semble que vous pourriez également les faire insérer dans vos mémoires sous le titre d'extraits, sans que j'ai besoin de l'y mettre moi même à la tête.

Ne doutant pas que vous n'ayez, Monsieur, poussé encore plus loin vos premières recherches sur le problème de deux nombres dont tant la somme que la différence étant ajoutée ou retranchée du produit de ces mêmes nombres produise des nombres quarrés, je serais fort curieux d'apprendre si vous en avez découvert une solution plus générale que la mienne, à laquelle je suis parvenu par bien des détours.

On expédiera d'ici, avec les premiers vaisseaux, le troisième volume de mon calcul intégral, ainsi que le troisième volume de ma dioptrique, qui traite de la construction la plus parfaite des microscopes. Vous verrez aussi le XIVe volume de nos commentaires, divisé en deux parties dont la dernière est presque uniquement remplie des recherches sur la parallaxe du soleil déduite des observations du dernier passage de vénus sur le disque du soleil, que M. Lexell a bien voulu exécuter d'après les idées que je lui avais communiquées. Ce même académicien a aussi composé un traité à part sur la comète de 1769 qui vient de paraître il y a quelques mois. Vous voyez, Monsieur, que je profite amplement de la belle occasion que M. Lexell me fournit en me prêtant ses yeux et sa main.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

à St. Pétersbourg, ce 20 (31) mai 1771. L. Euler.

Intercallamus hic epistolam Ill. Lexellii ob arctissimum nexum, quem cum ipsius Euleri litteris habet.

Lettre de A. J. Lexell.

Monsieur,

Ayant appui par la lettre que notre illustre M. Euler a reçue de vous et qu'il a bien voulu me communiquer, que vous seriez curieux de voir la démonstration que j'ai donnée de votre très élégant théorème, qui se trouve dans le tome XXIVe des mémoires de Berlin; et M. Euler m'ayant ordonné de vous communiquer en même temps quelques-unes des démonstrations qu'il a trouvées pour ce théorème : je profiterai de cette occasion, pour vous présenter, Monsieur, les hommages que je dois vous offrir, comme à un des plus grands mathématiciens de notre siècle et pour vous témoigner les sentiments d'admiration et de respect que vos sublimes recherches m'ont inspirés.

Avant que de donner les démonstrations dont je viens de parler, je remarquerai que les deux premières sont de M. Euler et que la troisième est celle que j'ai trouvée.

Outre ces deux démonstrations M. Euler en a encore trouvé quelques autres, mais celles que vous recever ici m'ont paru les plus remarquables.

Démonstration 1.

Puisque

$$t = x - P$$

on aura

$$1 = \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}P',$$

donc

$$\frac{dx}{dt}Q' - Q' = \frac{dx}{dt}P'Q' = \frac{dx}{dt}R',$$

Q marquant une fonction quelconque de x. Soient p, q, r, etc. des fonctions de t et P, Q, R des fonctions semblables de x; faison

$$Q = q + A + B + C + D + \text{etc.}$$

où A, B C, D sont des fonctions qui outre q, q', q'', contiennent des fonctions déterminées de t. on aura donc

$$Q' = q' + \left(\frac{dA}{dq}\right) + \left(\frac{dB}{dq}\right) + \left(\frac{dC}{dq}\right) + \text{etc.}$$

car en supposant $Q' = q' + A' + B' + C' + \text{etc.}$, on a

$$\left(\frac{dA}{dq}\right) = A'; \ \frac{dB}{dq} = B'; \ \text{etc.}$$

mais en prenant la différentielle complète de Q, on aura

$$\frac{dx}{dt}Q' = q' + \left(\frac{dA}{dq}\right) + \left(\frac{dB}{dq}\right) + \left(\frac{dC}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt}Q' - Q' = \frac{dx}{dt}R' = \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \text{etc.}$$

supposons maintenant

$$R = r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

il s'en suivra que

$$\frac{dx}{dt}R' = r' + \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \ldots \text{ etc.}$$

par conséquent

$$r' + \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \text{ etc.} = \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \left(\frac{dD}{dt}\right) + \text{ etc.}$$

En comparant les membres de cette équation, on trouve

$$1^\circ.\ \left(\frac{dA}{dt}\right) = r' = p'q',$$

donc

$$A = pq' \text{ et } \mathfrak{A} = pr' = pp'q';$$

$$2^\circ.\ \frac{dB}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d.pp'q'}{dt};$$

donc $dB = d.\ pdp.q'$ et $B = \frac{1}{2}d\ ppq'$; donc $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}d.ppr' = \frac{1}{2}d.\ ppp'q' = \frac{1}{1.2.3}d\ d.p^3q'$;

$$3^\circ.\ \left(\frac{dC}{dt}\right) = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{1}{1.2.3}d^2.p^3q',$$

donc

$$C = \frac{1}{1.2.3}dd.p^3q' \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{1}{1.2.3}dd.p^3r' = \frac{1}{1.2.3.4}d^3p^4q'; \text{ etc.}$$

Ainsi on obtiendra

$$Q = q + pq' + \frac{1}{2}d.ppq' + \frac{1}{1.2.3}dd.p^3q' + \frac{1}{1.2.3.4}d^3.p^4q' + \text{ etc.}$$

en omettant tous les dénominateurs affectés de dt.

Je ne sais si j'ai bien saisi le sens et la force de cette démonstration; mais j'avoue qu'elle me parait un peu douteuse.

Démonstration 2.

Supposons

$$\psi x = \psi t + P\psi' t + d.Q\psi' t + dd.R\psi' t + d^3.S\psi' t + \text{ etc.}$$

donc pour le cas $\psi x = x$, $\psi t = t$, et $\psi' t = 1$, on aura

$$x = t + P + dQ + ddR + d^3S + d^4T + \text{ etc.}$$

or, puisque

$$x - t = \varphi(x) \text{ et } \varphi(x) = \varphi t + P\varphi' t + dQ\varphi' t + dd.R\varphi' t + d^3S\varphi' t + \text{ etc.};$$

on aura

$$P + dQ + ddR + d^3S + \text{ etc.} = \varphi t + P\varphi' t + d.Q\varphi' t + dd.R\varphi' t + \text{ etc.}$$

donc

$$P = \varphi t,\quad dQ = P\varphi' t;\quad ddR = d.Q\varphi' t;\quad d^3S = dd.R\varphi' t;\ \text{ etc.}$$

ou

$$P = \varphi t;\quad Q = \frac{1}{2}\varphi t^2;\quad R = \frac{1}{1.2.3}\varphi t^3;\ \text{ etc.}$$

Démonstration 3.

On a, par les principes de l'analyse,

$$\psi t = \psi x - \varphi x.\psi' x + \varphi x^2.\frac{d\psi' x}{1.2dx} - \varphi x^3.\frac{dd\psi' x}{1.2.3dx^2} + \text{ etc.}$$

de même

$$\varphi t\psi' t = \varphi x\psi' x - \varphi x\cdot\frac{d(\varphi x\psi' x)}{dx} + \varphi x^2\frac{dd(\varphi x\psi' x)}{1.2\,dx^2}$$

on aura donc

$$\begin{array}{rcllllll}
\psi t & = & \psi x - \varphi x\psi' x & + \varphi x^2.\frac{d\psi' x}{1.2dx} & - \varphi x^3.\frac{dd\psi' x}{1.2.3dx^2} & + \varphi x^4\frac{d^3\psi' x}{1.2.3.4\,dx^3} & - \text{etc.}\\
+\ \varphi t\psi' t & = & + \varphi x\psi' x & - \varphi x\frac{d(\varphi x\psi' x)}{dx} & + \varphi x^2\frac{dd(\varphi x\psi' x)}{1.2\,dx^2} & - \varphi x^3\frac{d^3(\varphi x\psi' x)}{1.2.3dx^3} & + \text{etc.}\\
+\ \frac{d\varphi t^2\psi' t}{1.2dt} & = & & + \frac{d(\varphi x^2\psi' x)}{1.2\,dx} & - \varphi x\frac{dd(\varphi x^2\psi' x)}{1.2dx^2} & + \varphi x^2.\frac{d^3(\varphi x^2\psi' x)}{12.12.\,dx^3} & - \text{etc.}\\
+\ \frac{dd\,.\,\varphi t^3\psi' t}{1\ 2.3dt^2} & = & & & + \frac{dd(\varphi x^3\psi' x)}{1\ 2.3dx^2} & - \varphi x.\frac{d^3(\varphi x^3\psi' x)}{1.2.3\,dx^3} & + \text{etc.}\\
+\ \frac{d^3.\,\varphi t^4\psi' t}{1.2.3.4.dt^3} & = & & & & + \frac{d^3(\varphi x^4\psi' x)}{1.2.3.4dx^3} & - \text{etc.}\\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

Or du côté droit tous les termes placés dans les mêmes lignes verticales s'entredétruisent, parce qu'on a généralement

$$y^m d^{m-1}z - my^{m-1}d^{m-1}_{\cdot}yz + \frac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2}d^{m-1}y^2z \;\ldots\ldots \pm d^{m-1}_{\cdot}y^m z = 0$$

nous aurons par conséquent

$$\psi x = \psi t + \varphi t\psi' t + \frac{1}{1.2}\,\frac{d\varphi t^2\psi' t}{dt} + \text{etc.}$$

Dans le mémoire que j'ai composé sur ce théorème, j'ai aussi considéré cette équation plus générale $t = x - P$, ou P est une fonction quelconque de x et t; et j'ai trouvé qu'on aura encore

$$\psi x = \psi t + Q\psi' t + \frac{d\,Q\psi' t}{1.2dt} + \text{etc.},$$

Q denotant une fonction dans laquelle se change P en y mettant a pour t et t pour x, et en introduisant de nouveau après la différentiation t au lieu de a.

Il n'y a que fort peu de temps que j'ai trouvé des formules assez belles à ce qui me semble, pour les différences finies des fonctions à deux ou plusieurs variables.

Soit z une fonction quelconque de deux variables x et y, et supposons x augmenté de p et y de q de manière qu'on ait $x' = x + p$, et $y' = y + q$; soit de plus z' fonction de x', y' de la même manière que z l'est de x, y; on aura

$$\begin{array}{rl}
z' = z & + p\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{2}pp\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{1}{1.2\ 3}\,p^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \text{etc.}\\
& + q\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{2}{2}pq\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + \frac{3}{1.2.3}\,p^2q\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + \text{etc.}\\
& + \frac{1}{2}qq\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + \frac{3}{1.2.3}\,pq^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + \text{etc.}\\
& + \frac{1}{1.2.3}\,q^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) + \text{etc.}
\end{array}$$

si on supposait que z fut une fonction de trois variables x, y, u; il ne serait pas plus difficile de trouver la valeur de z'.

Dans le tome XVe de nos commentaires, nouvellement imprimé, se trouve, parmi d'autres pièces de M. **Euler** la solution qu'il a donné de ce problème curieux: trouver deux nombres x et y tels que $xy \pm (x+y) = \square$ et $xy \pm (x-y) = \square$ il a aussi inséré dans le même tome une dissertation que j'avais donnée sur les caractères d'intégrabilité, dont le principal objet est de démontrer le beau théorème de Mr. **Euler**. Quoique la démonstration que j'en ai donnée, me sembloit fort exacte, lorsque j'étais occupé à écrire cette pièce, j'ai pourtant reconnu qu'elle n'est pas tout à fait concluante; c'est pourquoi je lui en ai substitué une autre, dans un mémoire qui sera imprimé comme une suite du précédent dans le tome XVI. Ayant appris que Mr. de **Condorcet** a déjà traité le même sujet, je dois craindre que mes petites recherches n'en deviennent tout à fait superflues. Je serais fort curieux de savoir, de quelle manière M. de **Condorcet** a demontré ce théoréme, s'il a employé les principes du calcul des variations, comme l'avait fait M. **Euler**, ou s'il a déduit les démonstrations des principes du calcul différentiel.

Je souhaiterais aussi d'apprendre s'il a considéré les caractères d'intégrabilité pour les formules intégrales doubles ou triples telles que $\iint v dx\, dy$ ou $\iiint v dx\, dy\, dz$. Si vous vouliez bien, Monsieur, me faire la grace de m'en instruire, comme aussi de me faire connaître votre sentiment sur les petites productions dont je viens de parler, je la regarderai comme un honneur des plus singuliers qui me soient arrivés de ma vie.

Quoique la santé de Mr. **Euler** se retablisse de jour en jour, il n'a pas encore pu avoir l'honneur de vous écrire; il m'a recommandé seulement de vous témoigner qu'il est extrêmement sensible aux sentimens d'amitié et d'affection que vous venez, Monsieur, de lui témoigner dans votre dernière lettre.

Je finis en vous assurant des sentimens de respect et d'attachement, avec lesquels j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

St. Pétersbourg, ce 5 mars 1772. A. J. **Lexell**.

P. S.

Voici encore un problème analytique, fort curieux, de M. **Euler**, qu'il a trouvé en traitant des corps solides dont les surfaces peuvent être deployés sur des plans:

«Trouver six quantités l, m, n, λ, μ, ν telles que les formules

$$l dx + \lambda dy\,,\; m dx + \mu dy\,,\; n dx + \nu dy$$

«soient intégrables et qu'on ait

$$ll + mm + nn = 1\,,\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1\,,\quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.»$$

J'en ai trouvé cette solution sur une surface sphérique, soit décrite (Fig. 84) une ligne courbe quelconque MO, soit POQ un grand cercle qui touche MO en O, faisons $PO = MO$ et $PO \pm QO = 90°$. Soient de plus trois points A, B, C, tellement situés que les arc AB, AC, BC soient égaux chacun à $90°$; joignons AP, BP, CP; AQ, BQ, CQ. A présent nommant ω l'arc MO, soit s une quantité variable indépendante de ω, il faudra faire

$$x = \varphi\omega + s \sin\omega \quad \text{et} \quad y = \psi\omega + s \cos\omega$$

$\varphi\omega$ et $\psi\omega$ sont des fonctions quelconques de ω; et les quantités λ, μ, ν seront égales aux cosinus des arcs AP, BP, CP. de même que l, m, n le seront aux cosinus des arcs AQ, BQ, CQ.

16.

St. Pétersbourg, ce 24 7bre (5 8bre) 1773.

Monsieur et très honoré confrère,

Ayant enfin reçu la traduction françoise de mon algèbre, j'ai l'honneur de vous témoigner ma très parfaite reconnaissance de la peine que vous vous êtes donnée d'y ajouter vos très profondes recherches sur l'analyse indéterminée; et je vous prie de vouloir bien présenter tant à M. Bernoulli qu'aux libraires mais très humbles remercimens.

J'ai lu avec la plus grande satisfaction les excellens mémoires dont vous venez d'enrichir le recueil de l'académie royale de Berlin. Les belles démonstrations que vous y donner du théorême de M. Waring m'ont causé un très grand plaisir; j'en ai aussi trouvé une démonstration fondée sur des principes tout à fait différens.

Soit $2p+1$ le nombre premier dont il s'agit, il est certain qu'il y a toujours une infinité de nombres a, tels que les puissances $1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots$ jusqu'à a^{2p-1}, étant divisées par $2p-1$, produisent des restes tous différens entre eux, de sorte que a^{2p} soit la première puissance après l'unité qui reproduise le reste 1; d'où il s'ensuit que la puissance a^p donne -1 pour reste; puisque tous les restes mentionnés sont inégaux entre eux leur nombre étant $2p$, tous les nombres $1, 2, 3, 4 \ldots . 2p$ y seront compris. Soit maintenant M le produit de tous ces nombres $1, 2, 3, 4 \ldots 2p$, il est clair que ce produit M étant divisé par $2p+1$ laissera le même reste que le produit de toutes les puissances ci-dessus; or ce produit est évidemment $a^{p(2p-1)}$, que je représente par cet autre $a^{2p(p-1)}a^p$, dont le premier facteur $a^{2p(p-1)}$ étant une puissance de a^{2p} laissera l'unité pour reste; mais l'autre facteur a^p donnera le reste -1; d'où il est clair que le reste qui provient de cette puissance entière sera $=-1$; de sorte que le produit M doit aussi donner le même reste. De là il s'ensuit que la formule $M+1$ sera divisible par le nombre proposé $2p+1$.

Or pour ce qui regarde le nombre a; il faut qu'il soit tel, que la formule $xx-a$ ne puisse jamais devenir divisible par le nombre premier $2p+1$; ainsi, par rapport à chaque nombre premier, tous les nombres se partagent en deux classes, la première renferme ceux, que je nommerai b, d'où la formule $xx-b$ peut devenir divisible par $2p+1$; l'autre classe comprend les nombres a dont je viens de parler. Pour trouver dans chaque cas ces deux classes de nombrés indiquées par les lettres a et b, j'ai trouvé par hazard une règle très facile, qui mérite d'autant plus d'attention, que je ne suis pas en état d'en donner une démonstration rigoureuse.

Pour cet effet, il faut diviser les nombres premiers en deux classes, l'une de la forme $4n-1$, l'autre de la forme $4n+1$. Soit donc premièrement le nombre premier proposé de la forme $4n-1$, j'en forme une progression contenue dans ce terme général, laquelle sera par conséquent.

$$n,\ n+2,\ n+6,\ n+12,\ n+20,\ n+30,\ n+42,\ n+56,\ n+72,\ \text{etc.}$$

et je puis démontrer que tous les termes de cette série sont compris dans la classe des nombres marqués par b, de sorte qu'une formule $xx-b$ puisse devenir divisible par $4n-1$; ou bien tous ces nombres sont tels que la formule $b^{2n-1}-1$ soit toujours divisible par $4n-1$ ou un de ses multiples. Mais pour ce que je ne puis pas encore démontrer, c'est que non seulement tous les termes de cette progression, mais encore tous les diviseurs de chacun, appartiennent à la classe des nombres b; et en effet on observera toujours, que si d est diviseur de quelqu'un de ces termes, on rencontrera dans la même progression un terme de la forme dkk qui est équivalent du nombre d.

Soit, par exemple, le nombre premier proposé $4n - 1 = 71$; partant $n = 18 = 2.3^2$ et la progression sera

$$18, \; 20, \; 24, \; 30, \; 38, \; 48, \; 60, \; 74, \; 90, \; 108, \; \text{etc.}$$

l'on voit d'abord que les nombres de la classe b sont

$$2, \; 3, \; 5, \; 19, \; 37, \; 87.$$

Pour le nombre 2, la chose est claire, puisqu'il se trouve déjà dans le premier terme, multiplié par le carré 9, et le nombre 3 se trouve multiplié par le carré 16 dans le terme 48; ensuite le second terme 20 renferme le nombre 5 multiplié par le quarré 4.

Pour les nombres premiers de la forme $4n + 1$, je forme d'abord la progression au moyen de cette formule $n - x - xx$; cette progression sera

$$n, \; n-2, \; n-6, \; n-12, \; n-20, \; n-30, \; n-42, \; n-56, \; n-72, \; \text{etc.}$$

et lorsque ces termes deviennent négatifs, on n'a qu'à les traiter comme positifs, puisque si b est un tel nombre, non seulement la formule $xx - b$ mais aussi celle $xx + b$, pourra devenir divisible par $4n + 1$. Ici la même propriété a lieu, non seulement tous les termes de cette progression mais encore tout leurs diviseurs fournissent des nombres de la classe b, et tous les nombres qui ne s'y trouvent pas sont ceux qui constituent la classe a. Ainsi prenant, par exemple, $4n + 1 = 89$, ou bien $n = 22$, la progression sera

$$22, \; 20, \; 16, \; 10, \; 2, \; 8, \; 20, \; 34, \; 50, \; 68, \; 88, \; 110, \; 134, \; 160, \; \text{etc.}$$

d'ou l'on voit d'abord que la classe des nombres b contient

$$2, \; 11, \; 17, \; 67, \; \text{etc.}$$

Le nombre 2 se trouve lui même dans la série. Pour le nombre 11 en prenant $x = 33$, le terme de la progression sera $1100 = 11 . 10^2$. Mais il est très remarquable que cette belle propriété n'a lieu que lorsque le nombre $4n - 1$ ou $4n + 1$ est premier; car prenant, par exemple, $4n - 1 = 35$, où $n = 9$, la progression sera

$$9, \; 11, \; 15, \; 21, \; 29, \; 39, \; 51, \; 65, \; 81, \; 99, \; 119, \; 141, \; 165, \; \text{etc.};$$

ici quoique 3 divise plusieurs de ces termes, il ne s'en trouvera cependant aucun qui ait la forme $3KK$, il en est de même des nombres 5, 7 et d'autres qui sont multipliés par 3. Je suis persuadé que la considération de ces circonstances pourra conduire à des découvertes très importantes.

Vous aurez vû, Monsieur, dans mon algèbre, que le problème de trouver 4 nombres dont les produits 2 à 2, en y ajoutant l'unité, deviennent des nombres quarrés, m'a fort embarrassé, je n'ai même pu assigner en général des nombres satisfaisans, quoique je me sois presque souvenu que ce problème a été résolu par Ozanam; mais l'occasion de faire des recherches là-dessus m'a manqué. Depuis, j'ai trouvé cette solution assez générale.

Prenant à volonté deux nombres m et n, tels que $mn + 1 = ll$, les quatres nombres cherchés seront

$$I. \; m, \quad II. \; n, \quad III. \; m + n + 2l, \quad IV. \; 4l \, (l + m)\,(l + n),$$

où le nombre l peut être pris négatif ou positif. Peut être cette solution se trouve-t-elle dans l'algèbre d'Ozanam.

Mais je n'aurais jamais cru que l'analyse fut suffisante pour étendre cette question à 5 nombres, et je fus très agréablement surpris ces jours-ci, lorsque je rencontrai les cinq nombres suivans

$$A = 1, \quad B = 3, \quad C = 8, \quad D = 120 \quad \text{et} \quad E = \frac{777480}{(2879)^2}$$

qui satisfont aux dix conditions prescrites, de la manière suivante :

$$I.\ AB + 1 = 2^2,\quad II.\ AC + 1 = 3^2,\quad III.\ AD + 1 = 11^2,\quad IV.\ BC + 1 = 5^2,$$
$$V.\ BD + 1 = 19^2,\quad VI.\ CD + 1 = 31^2,\quad VII.\ AE + 1 = \left(\frac{3011}{2879}\right)^2,$$
$$VIII.\ BE + 1 = \left(\frac{3259}{2879}\right)^2,\quad IX.\ CE + 1 = \left(\frac{3809}{2879}\right)^2,\quad X.\ DE + 1 = \left(\frac{10079}{2879}\right)^2.$$

et de là je suis parvenu à donner une solution assez générale, mais par une méthode très indirecte que je ne saurais expliquer clairement. Car, ayant établi par les formules données les quatre premiers nombres A, B, C, D, je fais

$$A + B + C + D = p,\quad AB + AC + AD + BC + BD + CD = q,$$
$$ABC + ABD + ACD + BCD = r,\qquad ABCD = s,$$

et alors le cinquième nombre sera

$$E = \frac{4r + 2p(s+1)}{(s-1)^2}.$$

Voici une propriété fort remarquable de ces nombres; on aura toujours $1 + q + s = \frac{1}{4}pp$. Cette matière parait bien digne d'être mise dans tout son jour, mais je m'y sens incapable.

La résolution de la formule $axx + 1 = yy$ m'a causé autrefois bien de la peine par rapport au nombre a qui demande de très grands nombres pour x et y, comme 61 et 109; mais je viens de trouver un théorème qui conduit d'abord à la solution de ces cas et d'autres semblables.

Connaissant pour le nombre a, les valeurs de r et de s telles que $arr - 4 = ss$, que l'on prenne $p = rs$ et $q = ss + 2$, ensuite $x = \frac{1}{2}p^2(q^2-1)$ et $y = \frac{1}{2}q(q^2-3)$ et l'on aura certainement $axx + 1 = yy$; où il faut remarquer, que puisque r est par sa nature un nombre impair, les deux expressions de x et y donneront des nombres entiers. Ainsi pour le cas de $a = 61$ on aura d'abord $r = 5$, $s = 39$, et de là on tire les grauds nombres x et y rapportés dans ma table. M. Lexell et moi venons de remettre à M. le chevalier Triquet quelques mémoires pour les actes de l'académie royale de Turin; il m'a assuré avant son départ que vous y serez incessamment rappellé et que le roi regnant veut remettre son Académie dans son premier état florissant Dans ce cas l'académie de Berlin serait bien à plaindre.

Vous voyez, Monsieur, que je vous ai découvert mon coeur tout entier; et je vous prie de me continuer l'honneur de votre amitié, en vous assurant que je serai toujours avec le plus inviolable attachement,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

Leonard Euler.

17.

Domino celeberrimo de la Grange,

S. P. D.

Leonardus Euler.

Seqnens theorema attentione Geometrarum haud indignum, et Analysin prorsus singularem postulare videtur

Theorema demonstrandum.

Si formula differentialis $\frac{(x-1)\,dx}{\log x}$ ita integretur, ut facto $x = 0$ integrale evanescat, tum vero statuatur $x = 1$, ejus valor aequalis est logarithmo binarii, ubi quidem logarithmi hyperbolici sunt intelligendi.

(Reçu le 26 janvier 1775; répondu le 10 février.)

18.

A St. Pétersbourg, ce 23 mars 1775.

Monsieur et très honoré confrère,

Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'académie un plus grand service qu'en prenant mon congé; et à cet égard je puis me vanter d'avoir une grande supériorité sur vous, vû que vous ne lui sauriez jamais rendre un tel service.

J'ai parcouru avec la plus grande avidité les excellens mémoires dont vous avez enrichi les derniers volumes de Berlin et de Turin; je n'ai pu assez admirer l'adresse et la facilité avec laquelle vous y traitez tant d'objets épineux qui m'ont coûté bien de la peine. Tel est le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes; et surtout l'intégration de cette équation différentielle

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By+Cyy+Dy^3+Ey^4)}}.$$

toutes les fois, que les deux nombres m et n sont rationnels.

Cette recherche renferme encore une autre branche, lorsqu'on y ajoute des numérateurs semblables, où il s'agit de trouver un rapport entre les variables x et y tel, que la somme ou la différence de deux formules pareilles devienne algébrique.

J'en ai tiré autrefois la solution de cette question: Le quart d'une ellipse ABC (Fig. 85) étant donné, y trouver deux points P et Q tels, que l'arc PQ soit précisement la moitié de l'arc AB. Cette matière me parait avoir beaucoup encore *in recessu*.

Ce que vous me marquez, Monsieur, à l'occasion du petit théorème $\int\frac{(x-1)\,dx}{\log x}=\log 2$ en prenant $x=1$, m'a beaucoup rejoui, et j'ai vu avec la plus grande satisfaction, que vous avez d'abord pénétré tout le mystère, et que vous avez poussé toutes ces recherches beaucoup plus loin que je ne l'avais fait dans quelques mémoires composés sur ce sujet. J'ai été frappé surtout de cet excellent théorème

$$\int\frac{(x^n-x^m)dx}{(1+x^r)\log x}=\log\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r}}{\operatorname{tang}\frac{(m+1)\pi}{2r}}\right)$$

en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$; de la vérité du quel je me suis d'abord convaincu par des séries infinies, qui m'ont fait connaître, que cette intégrale $\int\frac{x^n dx}{(1+x^r)\log x}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, est toujours égale à $\log.\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r}$, après avoir trouvé que $\int\frac{dz}{(1+zz)\log z}$ depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$ est toujours égale à 0. Comme vous aurez tiré sans doute, ce beau théorème de celui-ci que $\int\frac{x^{n-1}dx}{1+x^r}$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=\infty$ est égal à $\frac{\pi}{r\sin\frac{n\pi}{r}}$ je suis curieux d'apprendre où s'en trouve la démonstration; car quoi qu'il me soit connu depuis plus de quarante ans, je n'en ai pu néanmoins trouver une démonstration formelle que depuis peu de temps, et je ne l'ai pas encore publiée j'attends avec beaucoup d'impatience, de voir les profondes recherches que vous aurez communiquées sur ce sujet à l'académie royale de Berlin.

Le paradoxe dont vous me parlez, mérite sans doute toute l'attention des géomètres: il consiste en ce que la différence entre ces deux formules intégrales $\int\frac{dy}{\log y}$ et $\int\frac{dz}{\log z}$, comprises entre les mêmes limites 0 et 1

soit égale à $\log \frac{n+1}{m+1}$; le dénouement de ce paradoxe se trouve sans doute, en ce que l'une et l'autre intégrale devient infiniment grande, où leur égalité n'empêche pas que leur différence soit indéterminée; comme cela arrive dans ces formules plus simples $\int \frac{dy}{y}$ et $\int \frac{dz}{z}$ prises depuis 0 jusqu'à l'infini, où la différence peut devenir égale à une quantité quelconque; aussi en prenant $y = az$ on aura sans doute $\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{z} = \log a$.

Je suis tombé ces jours ci sur un problème de mécanique, qui m'a beaucoup tourmenté, quoiqu'il paraisse fort simple au premier coup d'oeil. Il s'agit de trouver le mouvement avec lequel une barre descend en glissant sur un axe cylindrique, comme (Fig. 85) le représente. L'analyse m'a d'abord conduit à deux équations différentio-différentielles, assez semblables à celles qui expriment le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes; mais jusqu'ici je n'en ai pu tirer qu'une seule équation intégrale, en négligeant même le frottement: et si l'on en voulait tenir compte, je ne vois d'autre ressource que de suivre le mouvement de la barre quasi pas à pas; et c'est sur ce pied que j'ai developpé un cas déterminé.

En parcourant le dernier volume des mémoires de Berlin, je ne fus pas peu surpris, qu'il puisse encore être question d'un satellite de Venus, et même d'un tel, qui renverserait tous les principes de l'astronomie; je n'aurais pas crû non plus que le principe de la raison suffisante osât encore paraître sur le théâtre.

Je suis entièrement convaincu, qu'à moins que vous réussissiez à retrouver les démonstrations perdues de Fermat, elles resteront perdues à jamais. Tous mes soins à cet égard ont été inutiles jusqu'ici, sans en exclure ceux que j'ai pris pour prouver, que cette égalité $x^n \pm y^n = z^n$ est toujours impossible, à moins que l'exposant n ne soit au-dessous de 2. Nous avions cru autrefois que cette impossibilité s'étendait plus loin à ces formules:

$$a^3 \pm b^3 = z^3;$$

$$a^4 \pm b^4 \mp c^4 = z^4;$$

$$a^5 \pm b^5 \pm c^5 \pm d^5 = z^5;$$

etc.

Mais il n'y a pas long-temps que j'ai été convaincu que la seconde n'est pas impossible; car j'ai trouvé quatre nombres a, b, c, d, tels, que $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$.

Vous recevrez en peu de temps le XVIIIème volume de nos commentaires; la première partie du tome XIXème est déjà imprimée. J'y ai donné une idée pour étendre la table des nombres premiers jusqu'au delà d'un million, et j'ai même donné tous les nombres premiers entre 1000000 et 1002000; un tel ouvrage demanderait un volume in 4°, de la même épaisseur que nos commentaires.

Je finis, Monsieur, ayant l'honneur d'être avec les sentiments du plus parfait dévouement,

Monsieur et très-honoré confrère,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

P. S.

Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter encore deux théorèmes qui me paraissent vrais, quoique je n'en ai pu trouver encore la démonstration.

Théorème 1.

Il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal au logarithmique d'une fonction quelconque.

Théorème 2.

Hormis le cercle, il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal à un arc de cercle.

FINIS TOMI PRIORIS.

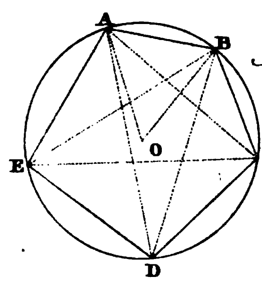


Fig. 1. Pag. 229.

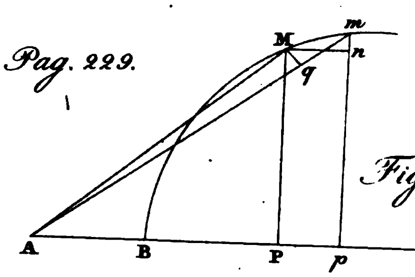
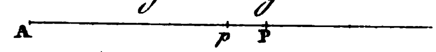


Fig. 2. Pag. 342.

Fig. 3. Pag. 346.



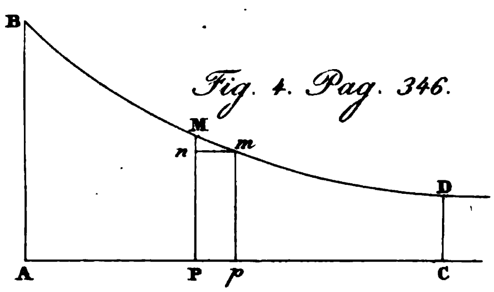


Fig. 4. Pag. 346.

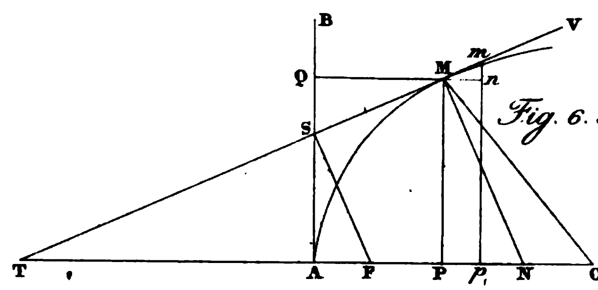


Fig. 6. Pag. 353.

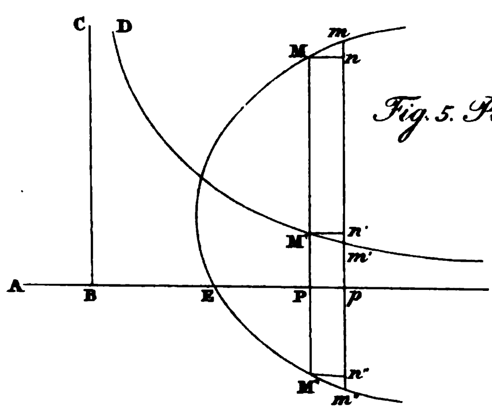
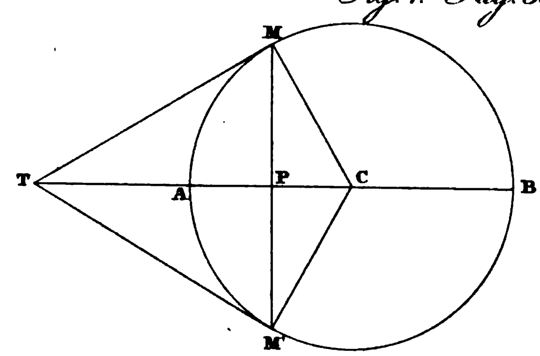


Fig. 5. Pag. 347.

Fig. 7. Pag. 355.



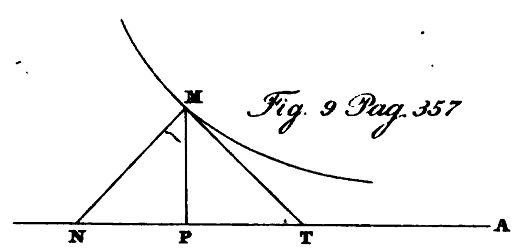


Fig. 9 Pag. 357

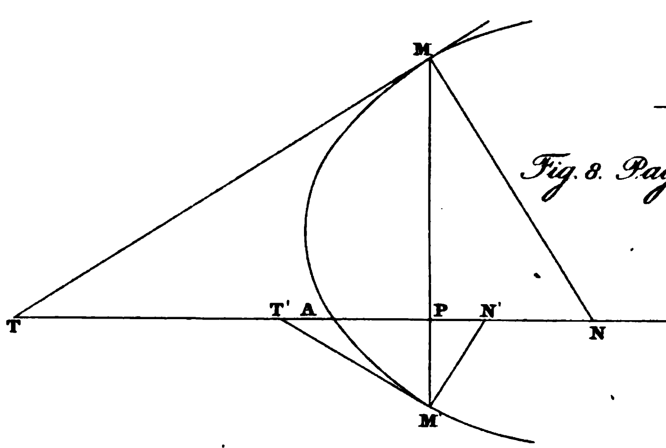
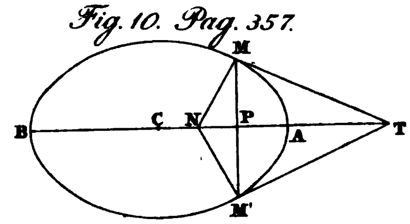


Fig. 8. Pag. 356.

Fig. 10. Pag. 357.



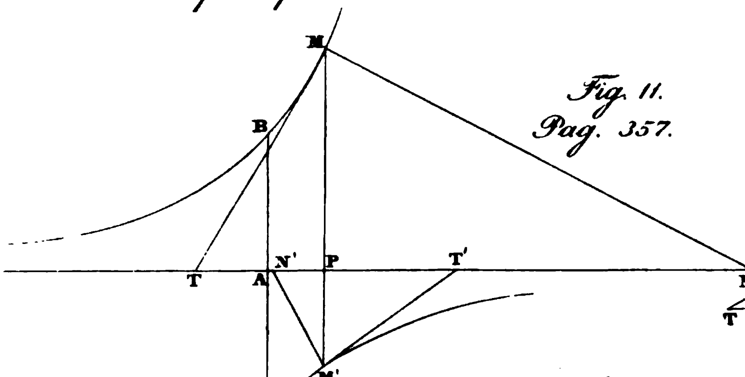


Fig. 11. Pag. 357.

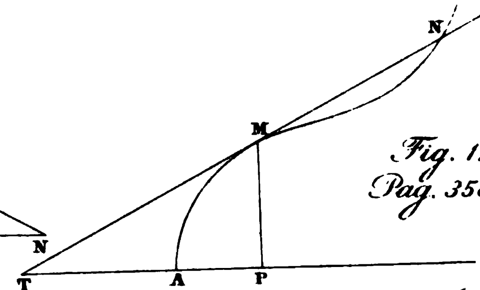


Fig. 12. Pag. 358.

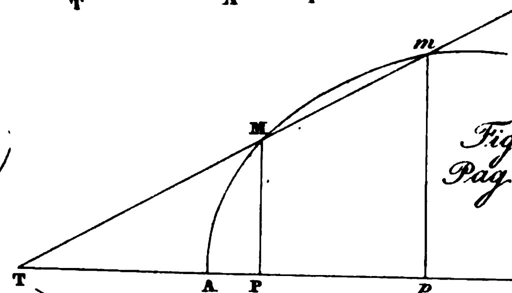


Fig. 13. Pag. 359.

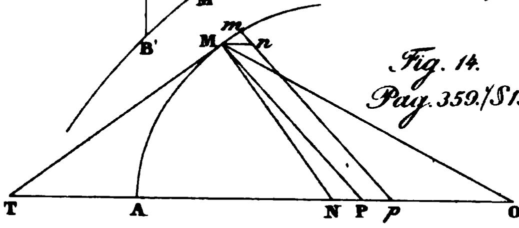


Fig. 14. Pag. 359. (§ 19)

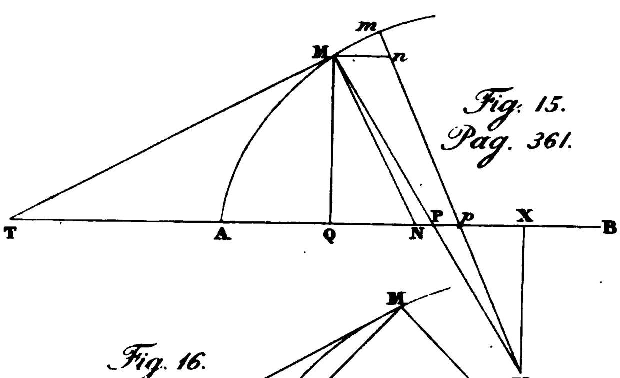


Fig. 15. Pag. 361.

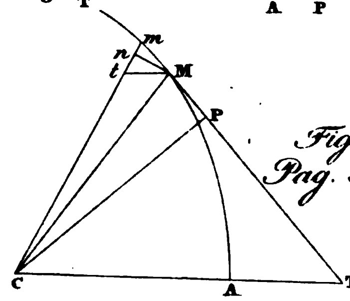


Fig. 17. Pag. 363.

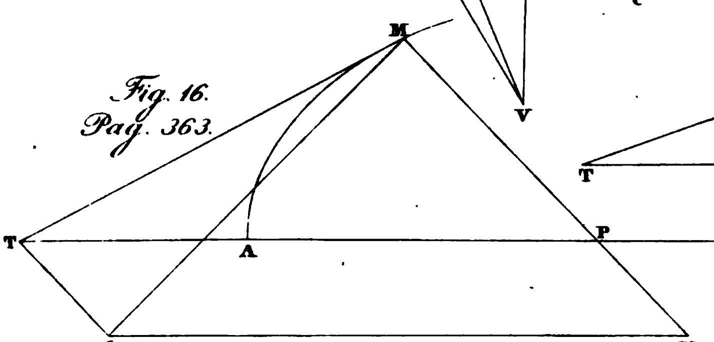


Fig. 16. Pag. 363.

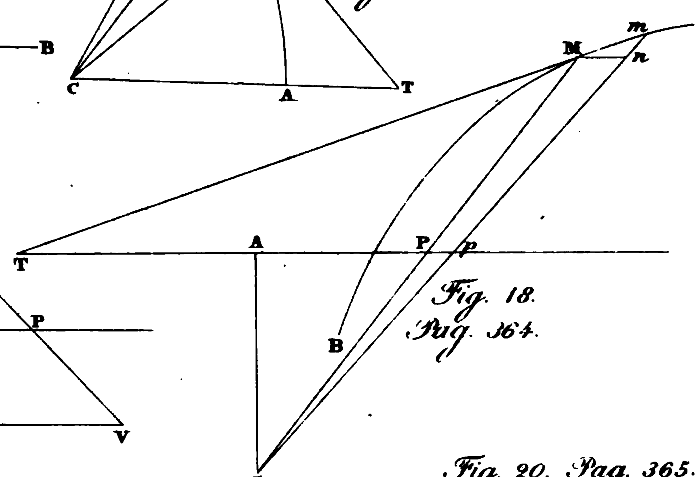


Fig. 18. Pag. 364.

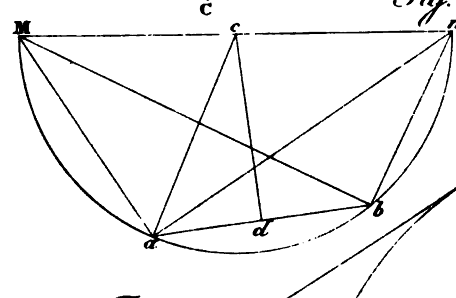


Fig. 20. Pag. 365.

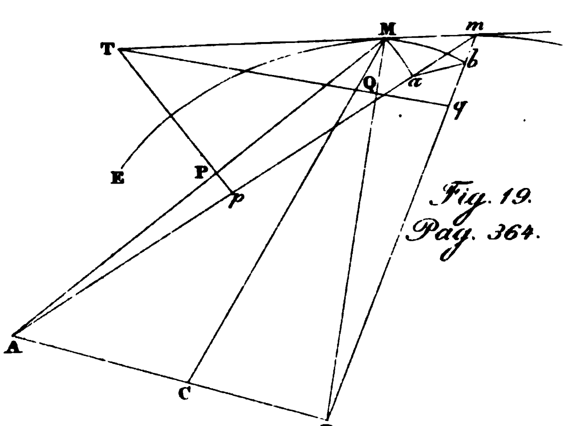


Fig. 19. Pag. 364.

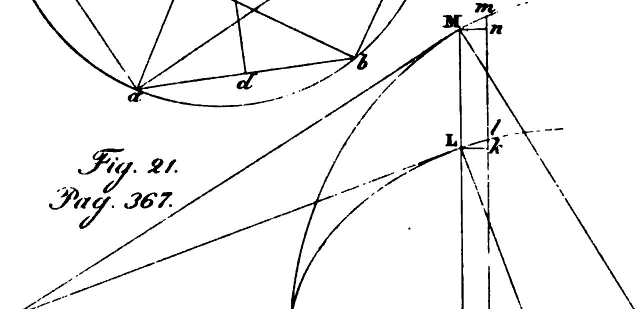
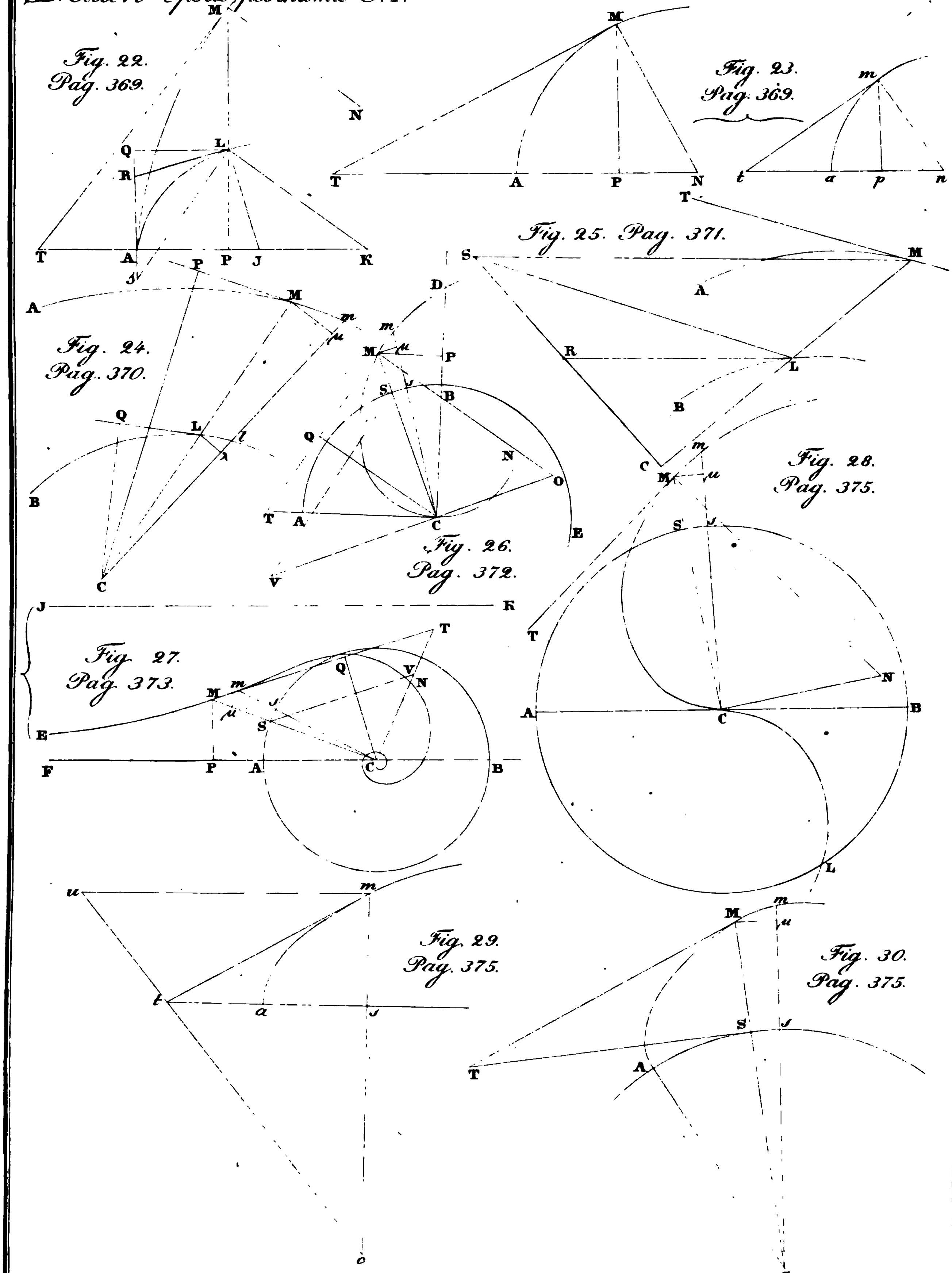


Fig. 21. Pag. 367.


Fig. 22. Pag. 369.
Fig. 23. Pag. 369.
Fig. 24. Pag. 370.
Fig. 25. Pag. 371.
Fig. 26. Pag. 372.
Fig. 27. Pag. 373.
Fig. 28. Pag. 375.
Fig. 29. Pag. 375.
Fig. 30. Pag. 375.

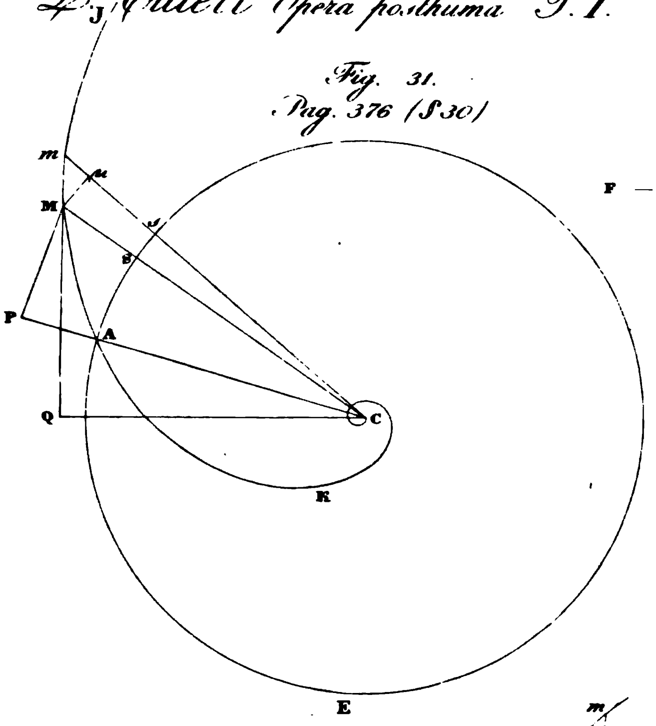


Fig. 31. Pag. 376 (§ 30)

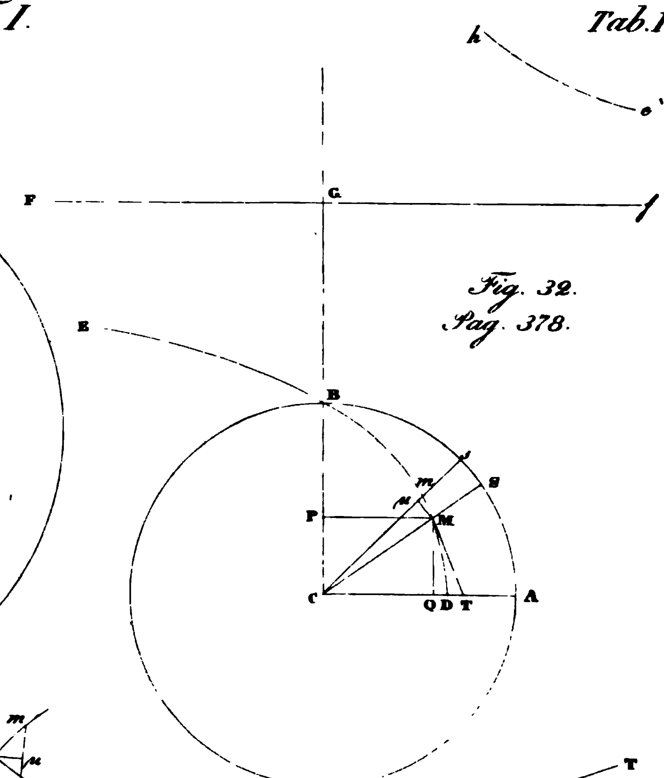


Fig. 32. Pag. 378.

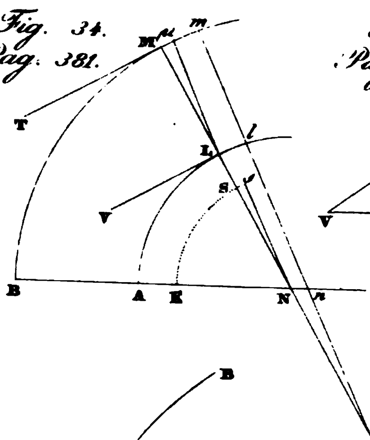


Fig. 34. Pag. 381.

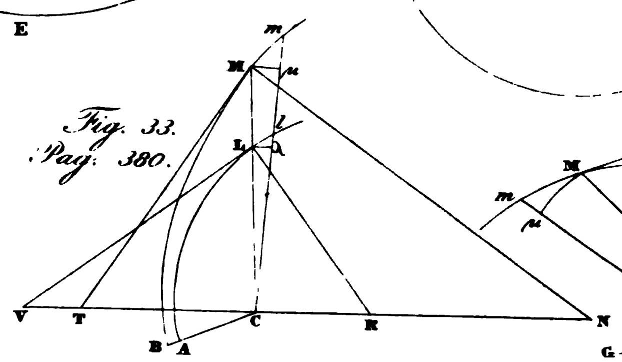


Fig. 33. Pag. 380.

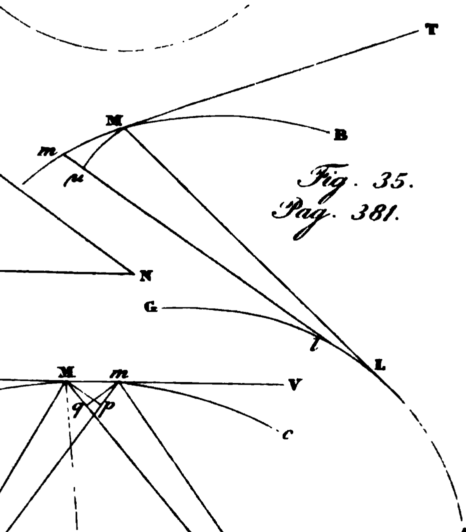


Fig. 35. Pag. 381.

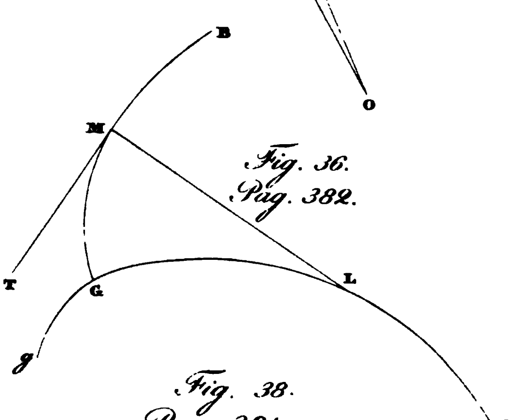


Fig. 36. Pag. 382.

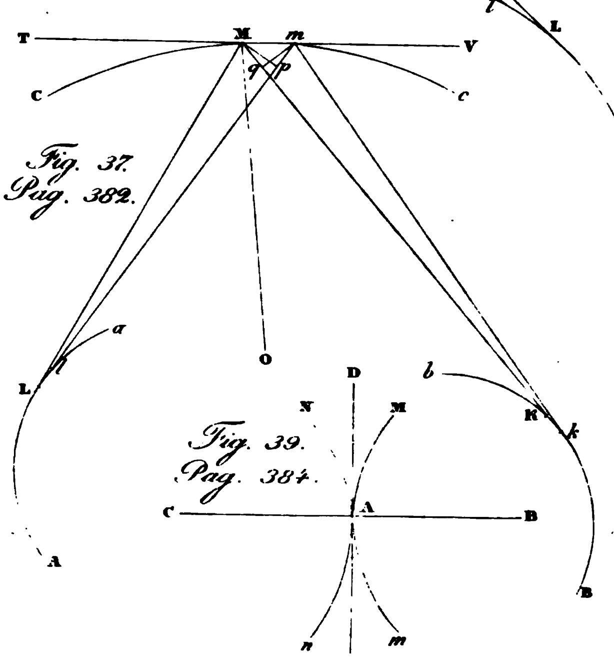


Fig. 37. Pag. 382.

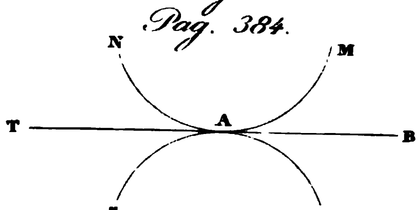


Fig. 38. Pag. 384.

Fig. 39. Pag. 384.

Fig. 42. Pag. 388.

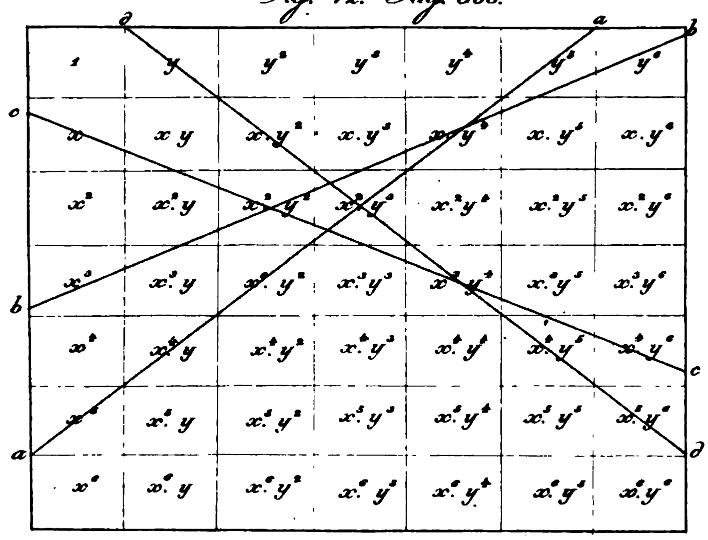


Fig. 46. Pag. 398.

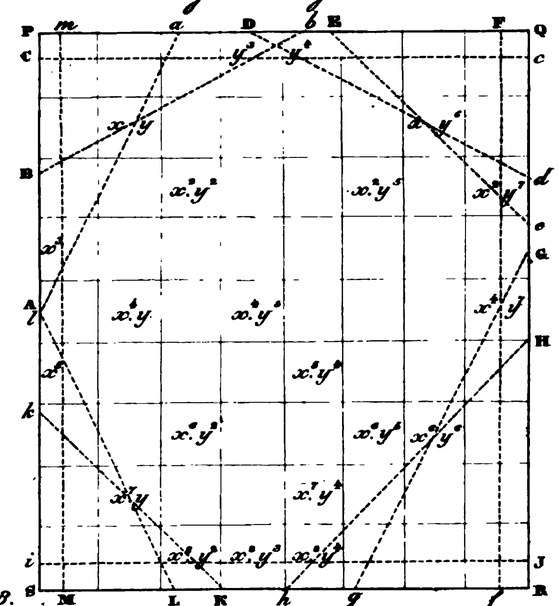


Fig. 43. Pag. 391.

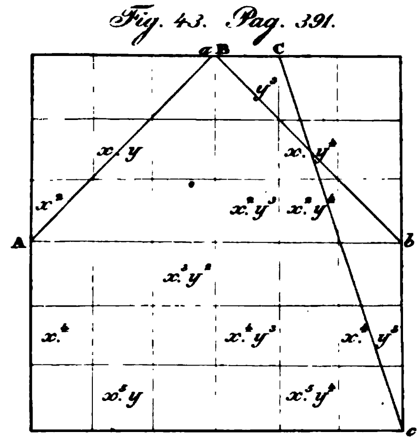


Fig. 47. Pag. 398.

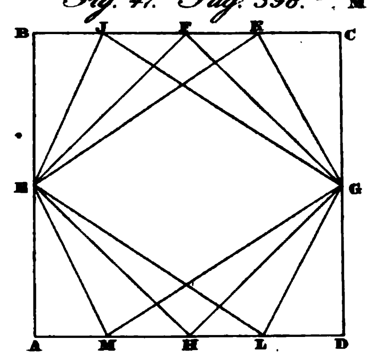


Fig. 44. Pag. 391.

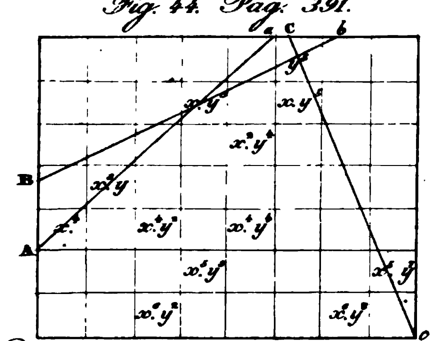


Fig. 45. Pag. 392.

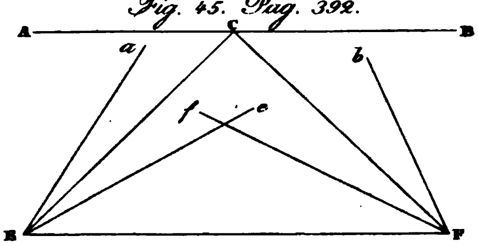


Fig. 41. Pag. 385.

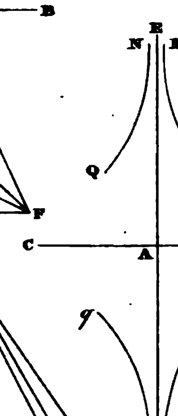


Fig. 40. Pag. 385.

Fig. 49. Pag. 405.

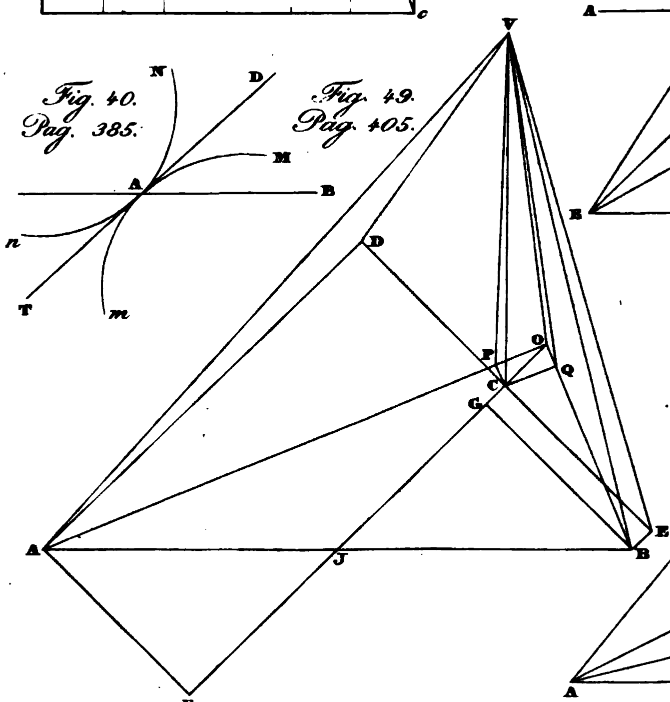
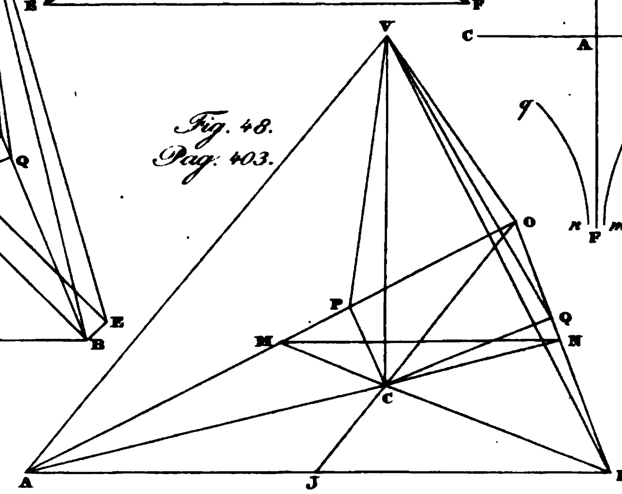


Fig. 48. Pag. 403.



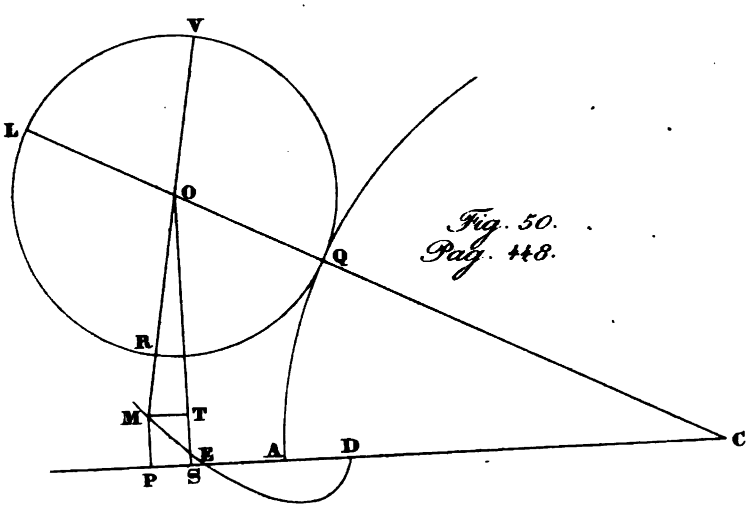


Fig. 50.
Pag. 448.

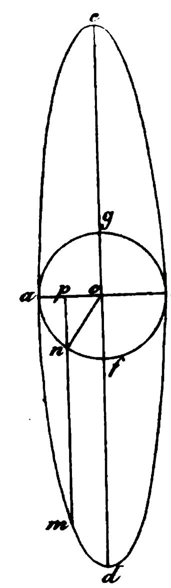


Fig. 54.
Pag. 449.

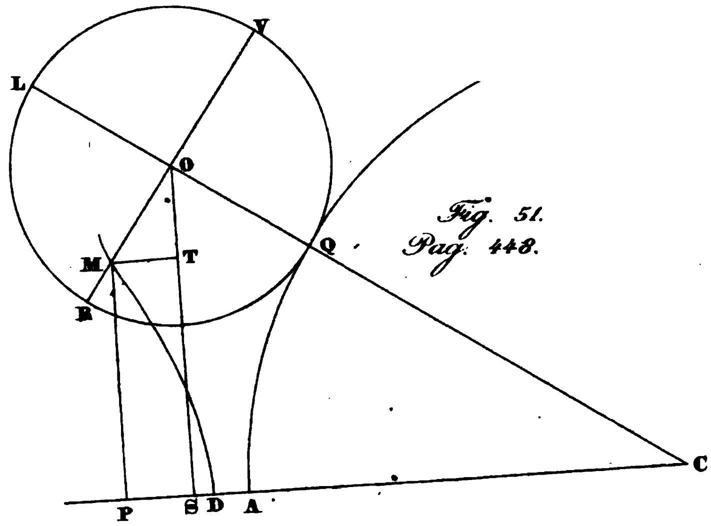


Fig. 51.
Pag. 448.

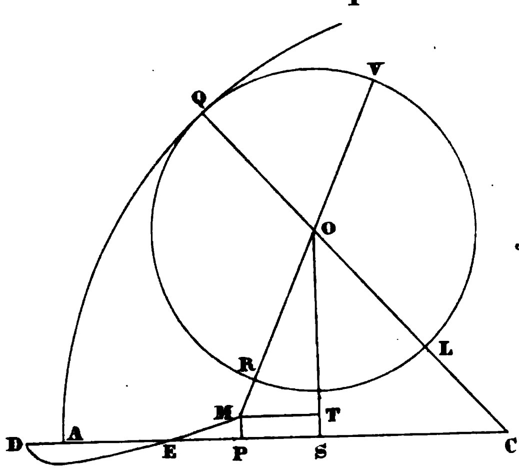


Fig. 52.
Pag. 448.

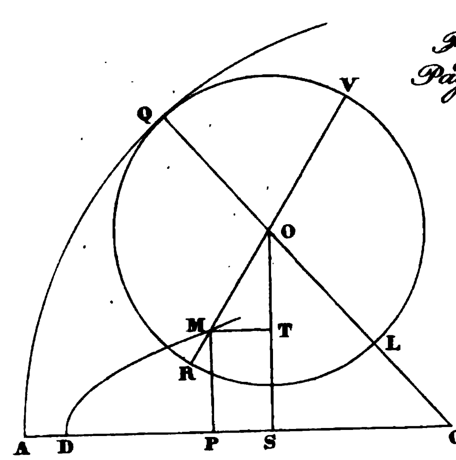


Fig. 53.
Pag. 448.

Fig. 61. Pag. 494.

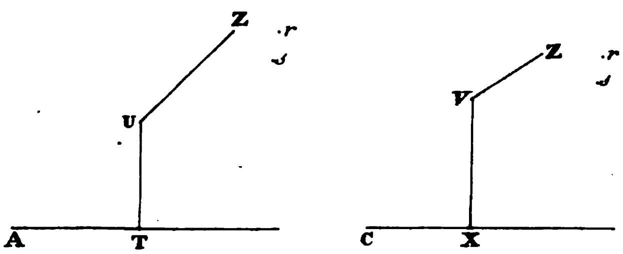


Fig. 55. Pag. 458.

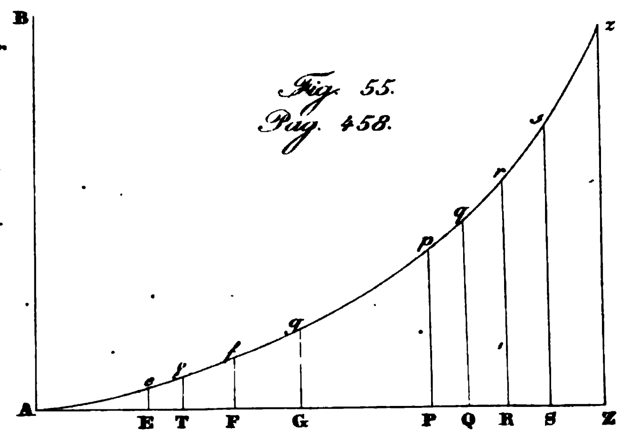


Fig. 56. Pag. 462.

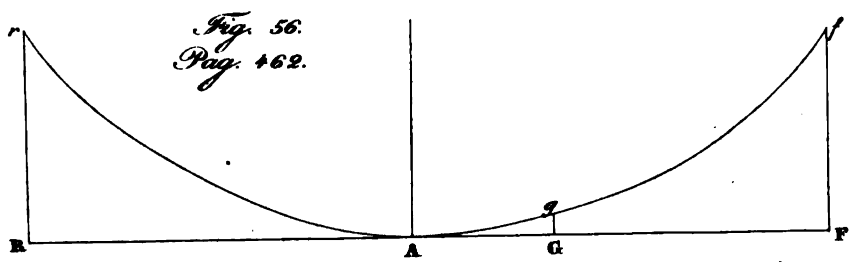


Fig. 57. Pag. 469.

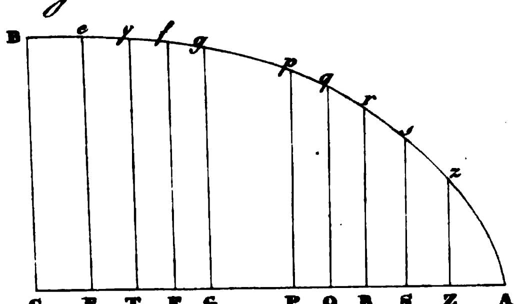


Fig. 58. Pag. 473.

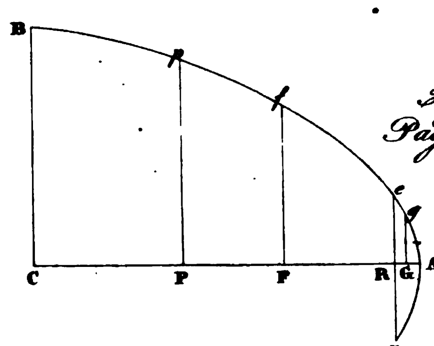


Fig. 59. Pag. 477.

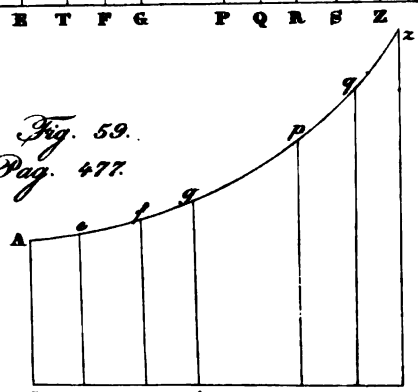


Fig. 60. Pag. 481.

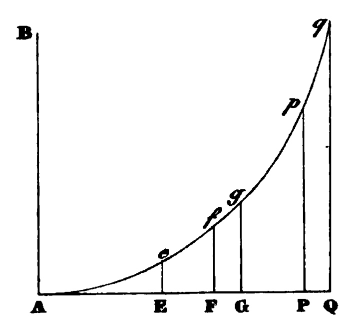


Fig. 62.
Pag. 496.

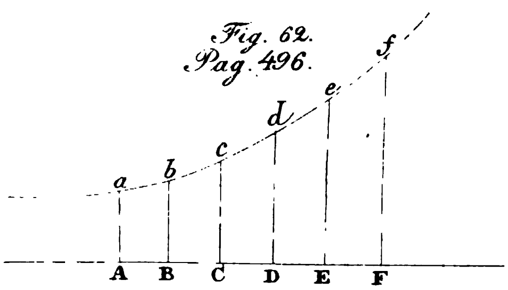


Fig. 63.
Pag. 496.

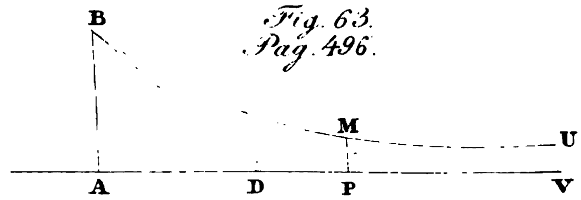


Fig. 64.
Pag. 497.

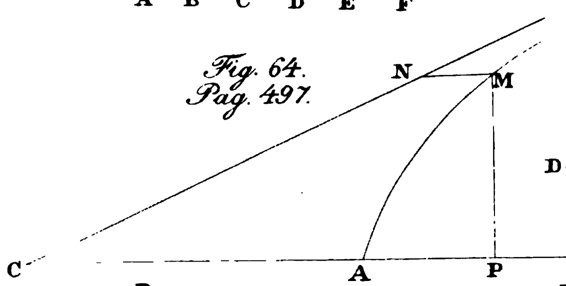


Fig. 65.
Pag. 502.

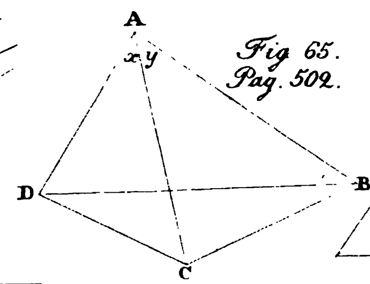


Fig. 66.
Pag. 503.

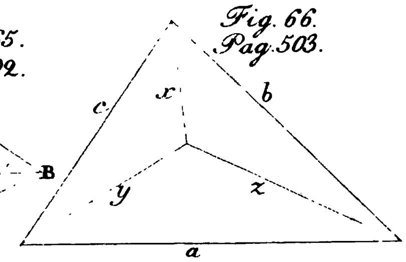


Fig. 67.
Pag. 504.

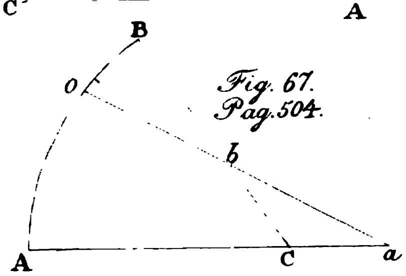


Fig. 68.
Pag. 504.

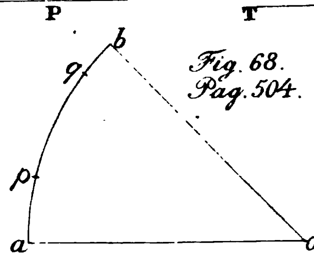


Fig. 69.
Pag. 538.

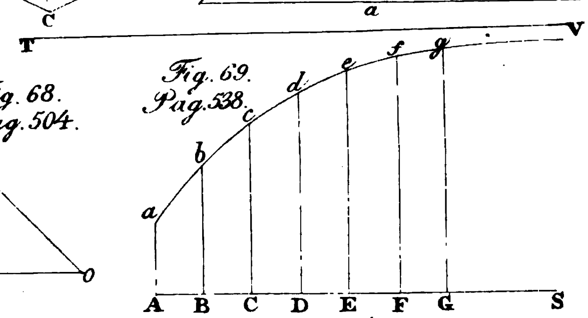


Fig. 70.
Pag. 540.

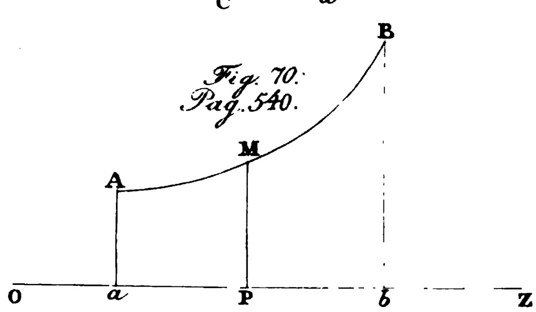


Fig. 71.
Pag. 541.

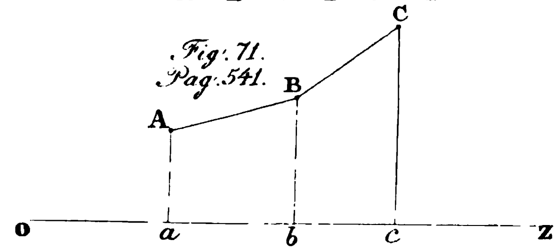


Fig. 72.
Pag. 543.

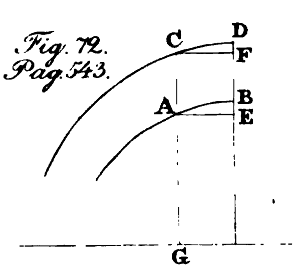


Fig. 73.
Pag. 544.

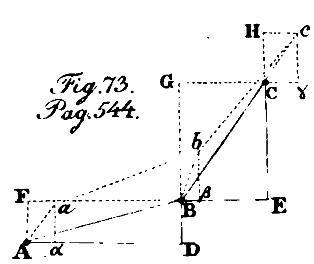


Fig. 74.
Pag. 548.

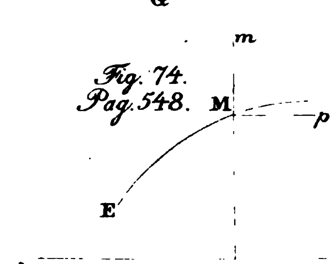


Fig. 75.
Pag. 548.

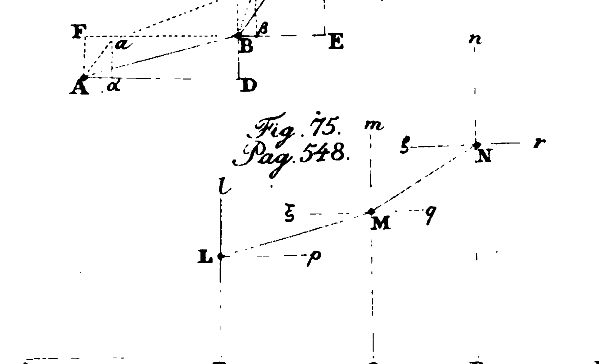


Fig. 76.
Pag. 556.

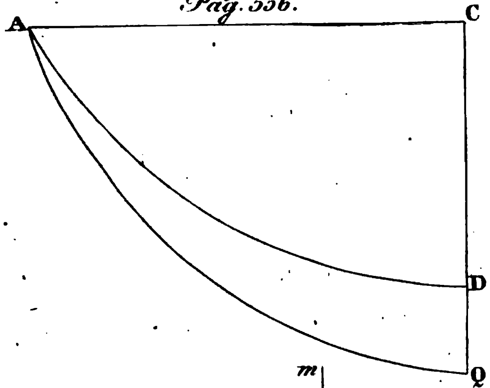


Fig. 77.
Pag. 559.

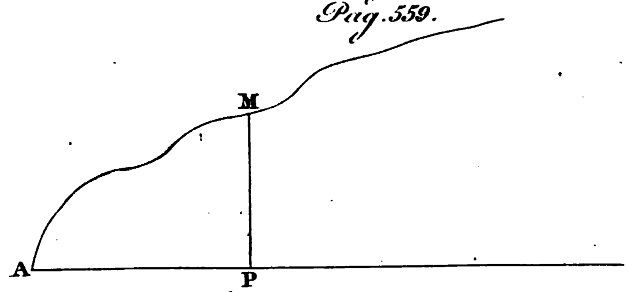


Fig. 78.
Pag. 559.

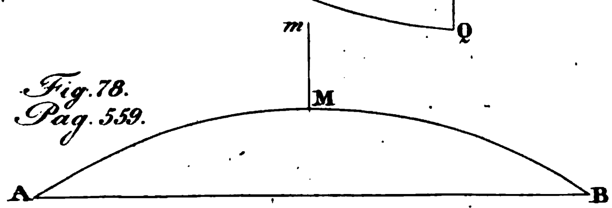


Fig. 79.
Pag. 559.

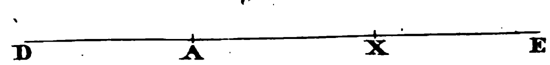


Fig. 80.
Pag. 560.

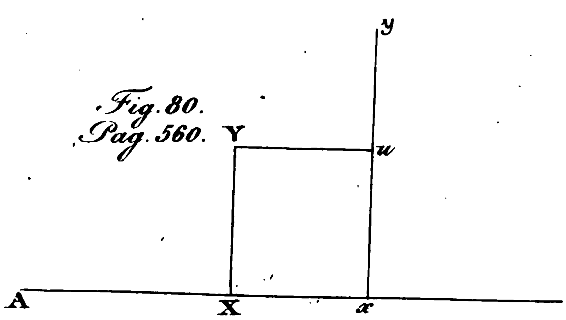


Fig. 81.
Pag. 560.

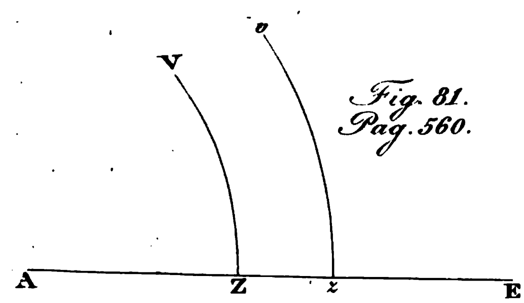


Fig. 82.
Pag. 563.

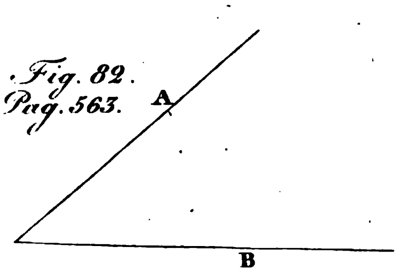


Fig. 83.
Pag. 567.

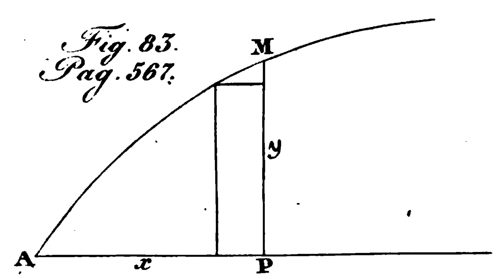


Fig. 84.
Pag. 582.

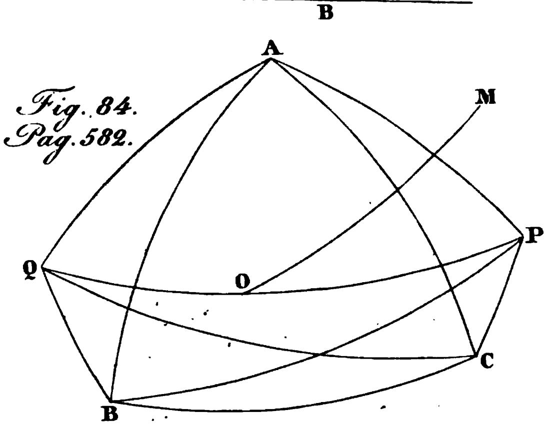


Fig. 85.
Pag. 586.

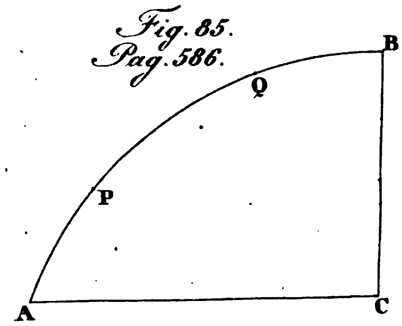


Fig. 86.
Pag. 587.

